

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.4 Implizite Funktionen

Definition. (*Implizit definierte Funktion*)

8/4/1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} = (a, b)$ und f in einer Umgebung $U(\bar{a})$ definiert und $f(a, b) = 0$. Weiterhin seien $\varepsilon, \delta > 0$, jedoch so klein, daß $U_\delta(a) \times U_\varepsilon(b) \subseteq U(\bar{a})$.

Durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ ist in der Umgebung $U_\delta(a)$ eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ implizit definiert

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x \in U_\delta(a)$ gibt es genau ein $y \in U_\varepsilon(b)$, so daß $f(x, y) = 0$ und $y = g(x)$ (insbesondere ist $b = g(a)$).

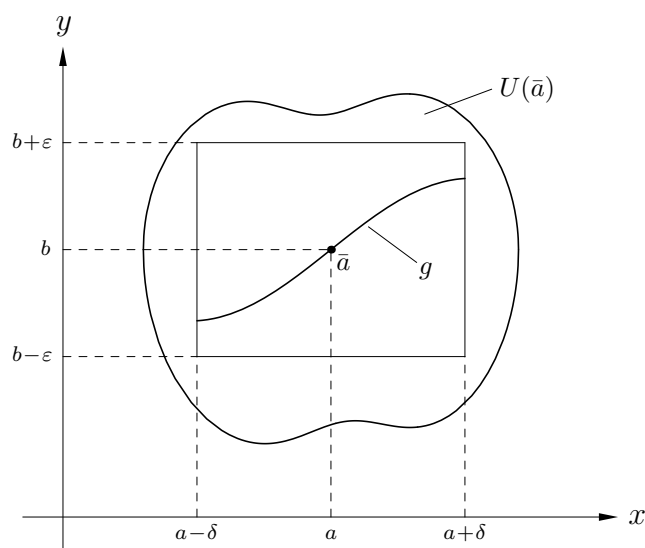


Abb. 8.13 zeigt die durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ in dem Intervall $(a - \delta, a + \delta)$ implizit definierte Funktion g . Die entsprechende Kurve ist der Durchschnitt der dreidimensionalen Punktmenge $\{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$ mit der Ebene $z = 0$.

Hierfür denke man sich die z -Achse senkrecht auf der (x, y) -Ebene stehend.

Satz 8.15 (*Hauptsatz über implizite Funktionen mit zwei Veränderlichen*)

8/4/3

Voraussetzung:

- (1) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in M .
- (2) Sei $\bar{c} = (a, b) \in M$ und $f(\bar{c}) = 0$.
- (3) f ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ stetig partiell nach y differenzierbar und $f_y(\bar{c}) \neq 0$.

Behauptung:

Es gibt eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in U_\delta(a)$ genau ein $y \in U_\varepsilon(b)$ existiert mit $f(x, y) = 0$ und $y = g(x)$ (insbesondere ist $b = g(a)$).

Korollar. Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 8.15 noch

- (4) f ist in $U(\bar{c})$ stetig partiell nach x differenzierbar,

8/4/5

dann ist die durch $f(x, y) = 0$ in $U_\delta(a)$ implizit definierte Funktion g differenzierbar,
und es gilt: $g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$.