

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Satz 8.1 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/9

Ist f in \bar{c} differenzierbar, dann ist f in \bar{c} stetig.

Beispiel.

8/1/12

Es sei $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq \bar{0}, \\ 0, & \text{falls } (x, y) = \bar{0}. \end{cases}$

Dann ist f an der Stelle $(0, 0)$ nach x und y differenzierbar, denn es ist

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) = 0$$

und

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \frac{0 - 0}{y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) = 0.$$

Aber f ist in $\bar{0}$ nicht stetig, denn anderenfalls wäre $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$.

Speziell für $x = y$, $x \neq 0$ und $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ gilt dann

$$f(x, y) = f(x, x) = \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = 1 \not\rightarrow 0. \quad \text{!}$$

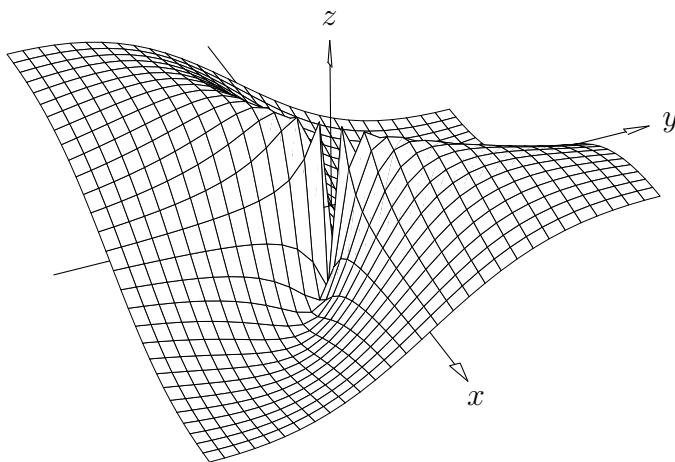


Abb. 8.3 Die Abbildung zeigt die Funktion f aus dem letzten Beispiel. In jeder Umgebung des Nullpunktes nimmt f die Werte ± 1 an, folglich kann die Funktion dort nicht stetig sein. In $(0, 0)$ selbst ist der Anstieg von f in Richtung der x -Achse und der y -Achse jeweils null.

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 8

- Aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit; aus der partiellen Differenzierbarkeit (nach allen Variablen) folgt noch nicht die Stetigkeit, also auch nicht die Differenzierbarkeit,

8/6/3