

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.8 Länge von Kurven

Es sei $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ zunächst eine Kurve und $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Verbindet man die Bildpunkte $f(a_0), \dots, f(a_{n+1}) \in \mathfrak{k}$ von a_0, \dots, a_{n+1} der Reihe nach durch Verbindungsstrecken, dann entsteht ein der Kurve eingeschriebener Polygonzug $P_{\mathfrak{z}}$ (vgl. Abb. 9.23). Der Abstand zwischen je zwei „benachbarten“ Bildpunkten $f(a_i)$ und $f(a_{i+1})$ auf der Kurve beträgt $|f(a_{i+1}) - f(a_i)|$. Folglich ist die Länge des Polygonzuges gegeben durch

9/8/5

$$l(P_{\mathfrak{z}}) = \sum_{i=1}^n |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

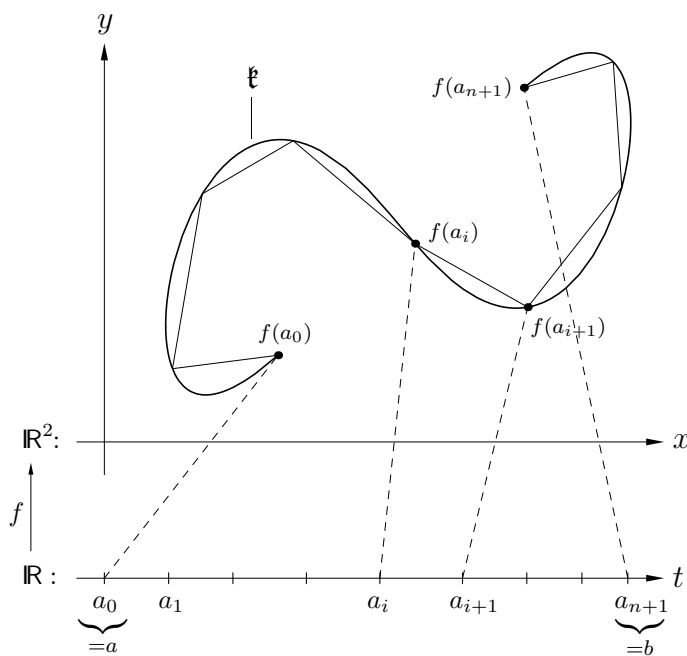


Abb. 9.23 Die Abbildung zeigt eine Kurve im \mathbb{R}^2 mit einem eingeschriebenen Polygonzug. Dabei ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig und $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$. Ist $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dann liegen die Bildpunkte $f(a_i)$, $i = 0, \dots, n+1$, auf der Kurve \mathfrak{k} .

Wir definieren jetzt, was unter der Länge einer Kurve zu verstehen ist.

Definition. (*Länge einer Kurve*)

9/8/6

Sei \mathfrak{k} eine Kurve mit der Parameterdarstellung $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$.

\mathfrak{k} ist *rektifizierbar* (d.h. \mathfrak{k} besitzt eine Länge)

$\overline{\text{Def}}$ Es existiert $\sup\{l(P_{\mathfrak{z}}) : \mathfrak{z} \text{ beliebige Zerlegung von } [a, b]\}$.

Das Supremum heißt, falls es existiert, *Länge der Kurve* und wird mit $l(\mathfrak{k})$ bezeichnet.

Beispiele.

Bemerkung. Die Stetigkeit von f ist nicht hinreichend für die Rektifizierbarkeit der entsprechenden Kurve \mathfrak{k} . Wir betrachten als Beispiel die Funktion

9/8/15/5

$$f(t) = \begin{cases} (t, t \sin \frac{\pi}{2t}) & \text{für } t \neq 0, \\ (0, 0) & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

f ist in $[0, \frac{1}{4}]$ stetig, aber nicht rektifizierbar.

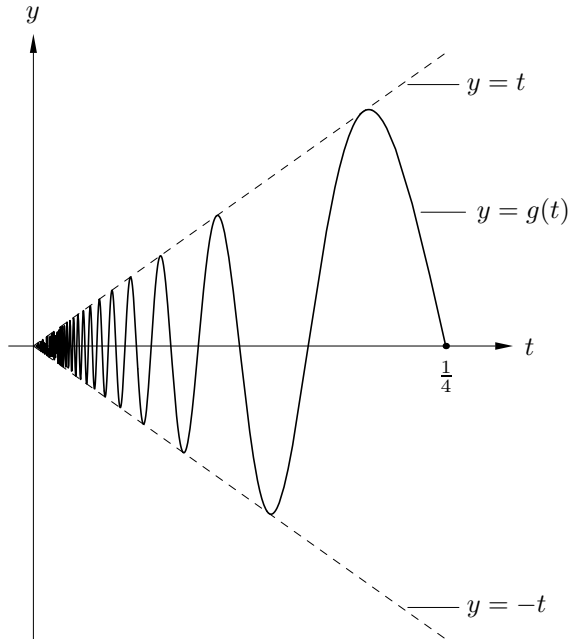


Abb. 9.24 Ist $g(t) := t \sin \frac{\pi}{2t}$, dann wird durch die Funktion $f : [0, \frac{1}{4}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t, g(t))$ die hier gezeigte Kurve definiert. (Für größere t setzt sich die Kurve so nicht fort!.) An den Stellen $t = \frac{1}{2n}$, $n = 2, 3, 4, \dots$, ist $g(t)$ null; an den Stellen $\frac{1}{4n+1}$ bzw. $\frac{1}{4n+3}$ ist $g(t) = t$ bzw. $g(t) = -t$, hierbei ist $n = 1, 2, 3, \dots$.

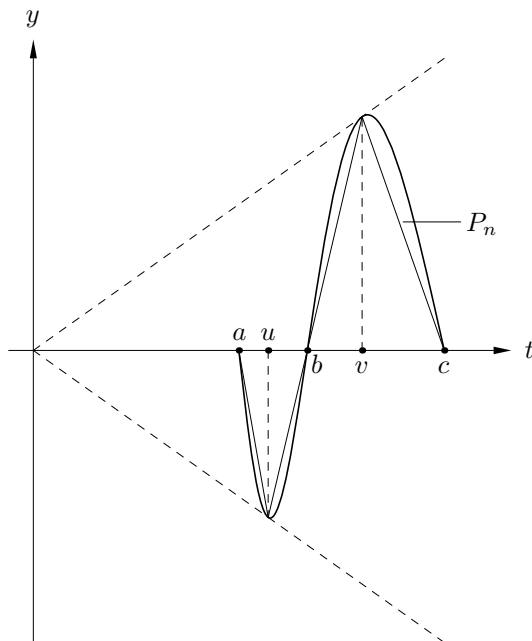


Abb. 9.25 In dieser Abbildung wird nur das Kurvenstück dargestellt, welches das Bild des Intervalls $[a, c]$ ist, wobei $a = \frac{1}{4n+4}$ und $c = \frac{1}{4n}$. Weiterhin ist $u = \frac{1}{4n+3}$, $b = \frac{1}{4n+2}$ und $v = \frac{1}{4n+1}$. Entsprechend dieser Zerlegung von $[a, c]$ ist P_n der einbeschriebene Polygonzug.

Wir betrachten jetzt die Funktion $g : [0, \frac{1}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(t) = t \sin \frac{\pi}{2t}$ und die Kurve

$\mathfrak{k} := \{f(t) = (t, g(t)) : 0 \leq t \leq \frac{1}{4}\}$ und zeigen, daß \mathfrak{k} nicht rektifizierbar ist.

Dazu sei $1 \leq n < k$ und $\mathfrak{z}_k = (\frac{1}{4k}, \dots, \underbrace{\frac{1}{4n+4}}_a, \underbrace{\frac{1}{4n+3}}_u, \underbrace{\frac{1}{4n+2}}_b, \underbrace{\frac{1}{4n+1}}_v, \underbrace{\frac{1}{4n}}_c, \dots, \frac{1}{4})$ eine

Zerlegung von $[\frac{1}{4k}, \frac{1}{4}]$ (siehe auch Abb. 9.25).

Wir berechnen zunächst den Abstand zwischen den Punkten $(a, 0)$ und $(u, \underbrace{f(u)}_{-u})$ in

\mathbb{R}^2 . Es ist

$$\begin{aligned} |(u, -u) - (a, 0)| &= \left| \left(\frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+4}, -\frac{1}{4n+3} \right) \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{(4n+3)(4n+4)}, -\frac{4n+4}{(4n+3)(4n+4)} \right) \right| \\ &= \frac{1}{(4n+3)(4n+4)} \cdot |(1, -(4n+4))| \\ &= \frac{1}{(4n+3)(4n+4)} \cdot \sqrt{1 + (4n+4)^2} \\ &\geq \frac{1}{4n+3}. \end{aligned}$$

Völlig analog ist

$$|(u, -u) - (b, 0)| \geq \frac{1}{4n+3}.$$

Ebenso zeigt man, daß die Abstände zwischen $(b, 0)$ und $(v, \underbrace{f(v)}_{=v})$ bzw. zwischen (v, v) und $(c, 0)$ größer oder gleich $\frac{1}{4n+1}$ sind.

Insgesamt erhält man, daß der Polygonzug P_n eine Länge

$$l(P_n) \geq 2 \cdot \frac{1}{4n+3} + 2 \cdot \frac{1}{4n+1} \geq \frac{1}{n+1}$$

besitzt. Für die Länge des gesamten (einbeschriebenen) Polygonzuges $P_{\mathfrak{z}_k}$ bezüglich des Intervalls $[\frac{1}{4k}, \frac{1}{k}]$ ist dann

$$l(P_{\mathfrak{z}_k}) \geq \sum_{n=1}^k \frac{1}{n+1};$$

und diese Summe ist für $k \rightarrow \infty$, also für $\frac{1}{4k} \rightarrow 0$, nicht beschränkt. Folglich ist \mathfrak{k} nicht rektifizierbar.