

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.8 Länge von Kurven

Beispiele.

(1). Verbindungsstrecke zweier Punkte in der Ebene.

9/8/15/1

Es sei $\bar{a} = (1, 1)$ und $\bar{b} = (3, 2)$. Wählt man als Parameterintervall $[0, 1]$, dann ist durch $f(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}) = (1 + 2t, 1 + t) := (f_1(t), f_2(t))$ eine Parameterdarstellung der Verbindungsstrecke \mathfrak{k} gegeben. Offenbar sind f_1, f_2 in $[0, 1]$ stetig differenzierbar und $f'_1(t) = 2$, $f'_2(t) = 1$ und damit $f'(t) = (2, 1)$ für jedes $t \in [0, 1]$. Folglich ist \mathfrak{k} rektifizierbar und

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^1 |f'(t)| dt = \int_0^1 |(2, 1)| dt = \int_0^1 \sqrt{2^2 + 1^2} dt = \sqrt{5}.$$

Natürlich hätte man das Ergebnis in diesem einfachen Fall auch ohne Integrale erhalten.

(2). Umfang eines Kreises mit dem Radius r .

9/8/15/2

Wir betrachten einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$ und dem Radius r (vgl. auch Abb. 9.20).

Für die Kreislinie \mathfrak{k} ist durch $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (r \cos t, r \sin t)$ eine Parameterdarstellung gegeben. Offenbar ist f in $[0, 2\pi]$ stetig differenzierbar und $f'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$. Folglich ist

$$|f'(t)| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r$$

und damit

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^{2\pi} |f'(t)| dt = \int_0^{2\pi} r dt = r2\pi.$$

(3). Länge der Schraubenlinie (vgl. Abb. 9.22).

9/8/15/3

Wir betrachten eine Schraubenlinie mit dem Radius r und zwei „Gewindegängen“. Es sei $f : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$, $c \neq 0$. f ist in $[0, 4\pi]$ stetig differenzierbar und $f'(t) = (-r \sin t, r \cos t, c)$. Dann ist

$$|f'(t)| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + c^2} = \sqrt{r^2 + c^2}.$$

Damit erhält man

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^{4\pi} \sqrt{r^2 + c^2} dt = \sqrt{r^2 + c^2} \cdot 4\pi.$$

(4). Länge der Normalparabel, definiert im Intervall $[0, 1]$ (Beispiel für die Berechnung der Länge einer Kurve mit Hilfe des Korollars zu Satz 9.23).

9/8/15/4

Es sei $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(t) = t^2$ und $f(t) = (t, g(t))$.

Dann ist durch $\mathfrak{k} = \{f(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ eine stetig differenzierbare Kurve gegeben und $f'(t) = (1, 2t)$. Also

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^1 \sqrt{1 + (g'(t))^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = (\star)$$

Man berechnet zunächst am besten das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + 4t^2} dt &= \frac{1}{2} \int \sqrt{1 + z^2} dz \\ &= \frac{1}{2} \left((z \cdot \sqrt{1 + z^2}) + \ln(z + \sqrt{1 + z^2}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((2t \cdot \sqrt{1 + 4t^2}) + \ln(2t + \sqrt{1 + 4t^2}) \right). \end{aligned}$$

(Die eigentliche Berechnung des Integrals $\int \sqrt{1 + z^2} dz$ bleibt als Übungsaufgabe.) Also

$$l(\mathfrak{k}) = \frac{1}{2} (2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})).$$

Bemerkung. Die Stetigkeit von f ist nicht hinreichend für die Rektifizierbarkeit der entsprechenden Kurve \mathfrak{k} . Wir betrachten als Beispiel die Funktion 9/8/15/5

$$f(t) = \begin{cases} (t, t \sin \frac{\pi}{2t}) & \text{für } t \neq 0, \\ (0, 0) & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

f ist in $[0, \frac{1}{4}]$ stetig, aber nicht rektifizierbar.

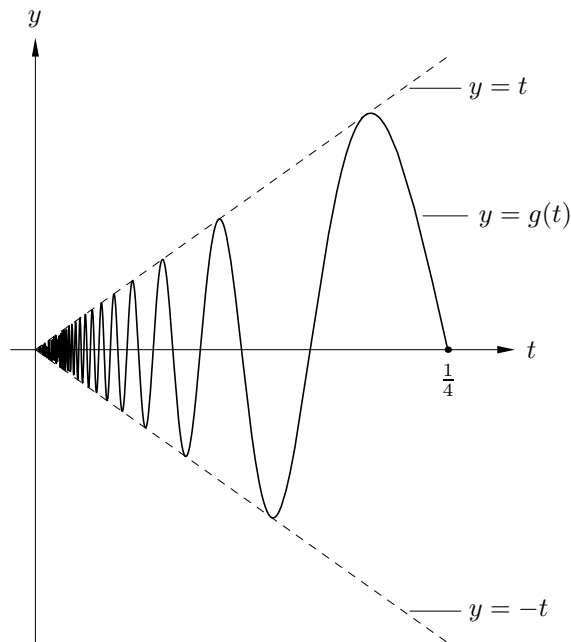


Abb. 9.24 Ist $g(t) := t \sin \frac{\pi}{2t}$, dann wird durch die Funktion $f : [0, \frac{1}{4}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t, g(t))$ die hier gezeigte Kurve definiert. (Für größere t setzt sich die Kurve so nicht fort!) An den Stellen $t = \frac{1}{2n}$, $n = 2, 3, 4, \dots$, ist $g(t)$ null; an den Stellen $\frac{1}{4n+1}$ bzw. $\frac{1}{4n+3}$ ist $g(t) = t$ bzw. $g(t) = -t$, hierbei ist $n = 1, 2, 3, \dots$

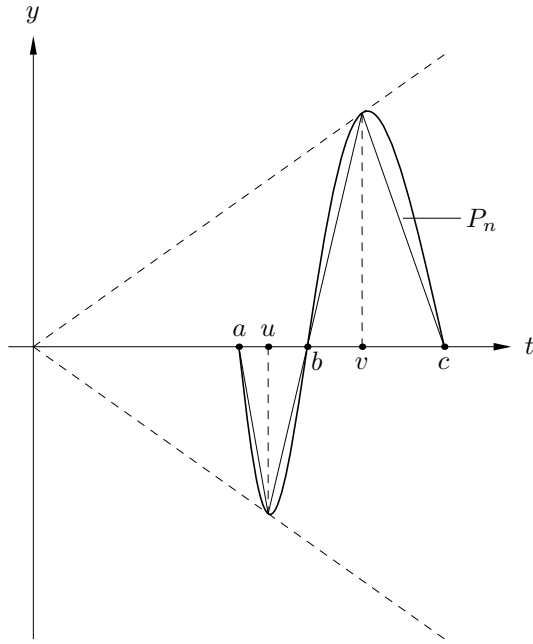


Abb. 9.25 In dieser Abbildung wird nur das Kurvenstück dargestellt, welches das Bild des Intervalls $[a, c]$ ist, wobei $a = \frac{1}{4n+4}$ und $c = \frac{1}{4n}$. Weiterhin ist $u = \frac{1}{4n+3}$, $b = \frac{1}{4n+2}$ und $v = \frac{1}{4n+1}$. Entsprechend dieser Zerlegung von $[a, c]$ ist P_n der eingeschriebene Polygonzug.

Wir betrachten jetzt die Funktion $g : [0, \frac{1}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(t) = t \sin \frac{\pi}{2t}$ und die Kurve $\mathfrak{k} := \{f(t) = (t, g(t)) : 0 \leq t \leq \frac{1}{4}\}$ und zeigen, daß \mathfrak{k} nicht rektifizierbar ist.

Dazu sei $1 \leq n < k$ und $\mathfrak{z}_k = (\underbrace{\frac{1}{4k}, \dots, \frac{1}{4n+4}}_a, \underbrace{\frac{1}{4n+3}}_u, \underbrace{\frac{1}{4n+2}}_b, \underbrace{\frac{1}{4n+1}}_v, \underbrace{\frac{1}{4n}}_c, \dots, \frac{1}{4})$ eine

Zerlegung von $[\frac{1}{4k}, \frac{1}{4}]$ (siehe auch Abb. 9.25).

Wir berechnen zunächst den Abstand zwischen den Punkten $(a, 0)$ und $(u, \underbrace{f(u)}_{-u})$ in

\mathbb{R}^2 . Es ist

$$\begin{aligned} |(u, -u) - (a, 0)| &= \left| \left(\frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+4}, -\frac{1}{4n+3} \right) \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{(4n+3)(4n+4)}, -\frac{4n+4}{(4n+3)(4n+4)} \right) \right| \\ &= \frac{1}{(4n+3)(4n+4)} \cdot |(1, -(4n+4))| \\ &= \frac{1}{(4n+3)(4n+4)} \cdot \sqrt{1 + (4n+4)^2} \\ &\geq \frac{1}{4n+3}. \end{aligned}$$

Völlig analog ist

$$|(u, -u) - (b, 0)| \geq \frac{1}{4n+3}.$$

Ebenso zeigt man, daß die Abstände zwischen $(b, 0)$ und $(v, \underbrace{f(v)}_{=v})$ bzw. zwischen (v, v) und $(c, 0)$ größer oder gleich $\frac{1}{4n+1}$ sind.

Insgesamt erhält man, daß der Polygonzug P_n eine Länge

$$l(P_n) \geq 2 \cdot \frac{1}{4n+3} + 2 \cdot \frac{1}{4n+1} \geq \frac{1}{n+1}$$

besitzt. Für die Länge des gesamten (einbeschriebenen) Polygonzuges $P_{\mathfrak{Z}_k}$ bezüglich des Intervalls $[\frac{1}{4k}, \frac{1}{k}]$ ist dann

$$l(P_{\mathfrak{Z}_k}) \geq \sum_{n=1}^k \frac{1}{n+1};$$

und diese Summe ist für $k \rightarrow \infty$, also für $\frac{1}{4k} \rightarrow 0$, nicht beschränkt. Folglich ist \mathfrak{k} nicht rektifizierbar.