

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*euklidischer Abstand*)

6/1/1

Seien $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

$|\bar{a} - \bar{b}| \stackrel{\text{Def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$ heißt *euklidischer Abstand* zwischen \bar{a} und \bar{b} .

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Bemerkung. Aus der Differenzierbarkeit folgt also die Stetigkeit; die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung stetig ist, heißt *stetig differenzierbar*.

7/1/14

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.9 (*1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung*)

7/2/2

Ist $a < b$ und f in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so daß $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Zerlegung*)

9/2/1

\mathfrak{z} ist eine *Zerlegung* (oder *Partition*) von I

$\stackrel{\text{Def}}{=} \mathfrak{z}$ ist eine endliche Folge (a_0, \dots, a_{n+1}) von reellen Zahlen a_0, \dots, a_{n+1} , so daß $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$.

9.3 Integrierbarkeitskriterien

Definition. (*Zwischensumme*)

9/3/4

Es sei f in I definiert, $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I , und für jedes $i = 1, \dots, n$ sei $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

Dann nennt man $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ ein *Zwischenstellensystem* bei der Zerlegung \mathfrak{z} , und $S_f(\mathfrak{z}, \tau) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot f(\xi_i)$ heißt *Zwischensumme* von f bei der Zerlegung \mathfrak{z} und dem Zwischenstellensystem τ .

9.8 Länge von Kurven

Zur Erinnerung: $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ ist eine Kurve in \mathbb{R}^k , falls $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetige Vektorfunktion ist. 9/8/0

Es sei $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ zunächst eine Kurve und $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Verbindet man die Bildpunkte $f(a_0), \dots, f(a_{n+1}) \in \mathfrak{k}$ von a_0, \dots, a_{n+1} der Reihe nach durch Verbindungsstrecken, dann entsteht ein der Kurve eingeschriebener Polygonzug $P_{\mathfrak{z}}$ (vgl. Abb. 9.23). Der Abstand zwischen je zwei „benachbarten“ Bildpunkten $f(a_i)$ und $f(a_{i+1})$ auf der Kurve beträgt $|f(a_{i+1}) - f(a_i)|$. Folglich ist die Länge des Polygonzuges gegeben durch 9/8/5

$$l(P_{\mathfrak{z}}) = \sum_{i=1}^n |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

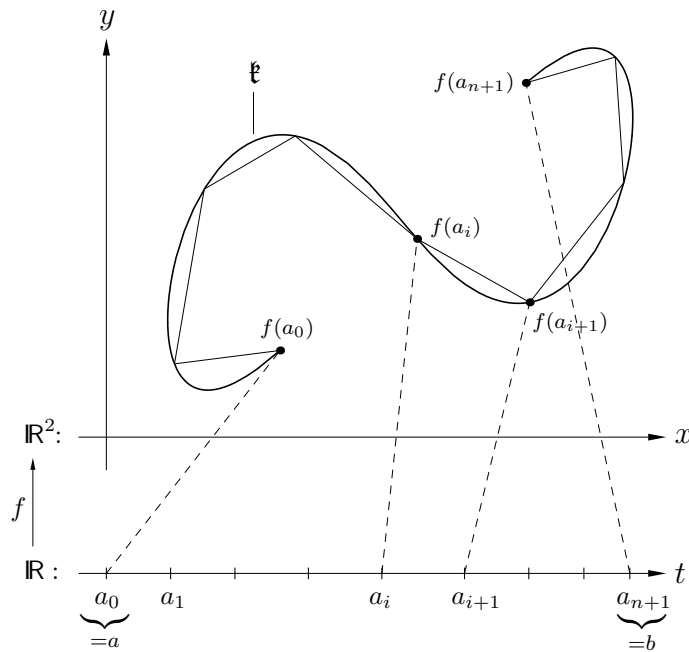


Abb. 9.23 Die Abbildung zeigt eine Kurve im \mathbb{R}^2 mit einem eingeschriebenen Polygonzug. Dabei ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig und $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$. Ist $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dann liegen die Bildpunkte $f(a_i)$, $i = 0, \dots, n+1$, auf der Kurve \mathfrak{k} .

Wir definieren jetzt, was unter der Länge einer Kurve zu verstehen ist.

Es sei jetzt $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ eine stetig differenzierbare Kurve in \mathbb{R}^k . Insbesondere ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f = (f_1, \dots, f_k)$ und $f_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar für jedes $j = 1, \dots, k$. Weiterhin sei $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$, und der Einfachheit halber sei $u := a_i$ und $v := a_{i+1}$. Der Abstand zwischen den auf der Kurve liegenden Punkten $f(u)$ und $f(v)$ beträgt 9/8/7

$$\begin{aligned} |f(v) - f(u)| &= |(f_1(v), \dots, f_k(v)) - (f_1(u), \dots, f_k(u))| \\ &= |(f_1(v) - f_1(u), \dots, f_k(v) - f_k(u))| = (\star). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind f_1, \dots, f_k differenzierbar in $[u, v]$. Folglich gibt es nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung für jedes f_j ein $\xi_{ij} \in [u, v]$, so daß

$$f_j(v) - f_j(u) = f'_j(\xi_{ij})(v - u). \quad (\xi_{ij} \text{ hängt von } [a_i, a_{i+1}] = [u, v] \text{ und } f_j \text{ ab.})$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} |f(v) - f(u)| &= (\star) = \left| \left(f'_1(\xi_{i1}) \cdot (v - u), \dots, f'_k(\xi_{ik}) \cdot (v - u) \right) \right| \\ &= \left| \left(f'_1(\xi_{i1}), \dots, f'_k(\xi_{ik}) \right) \cdot (v - u) \right| \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_{ij}) \right)^2} \cdot (v - u). \end{aligned}$$

Also

$$|f(a_{i+1}) - f(a_i)| = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_{ij}) \right)^2} \cdot (a_{i+1} - a_i).$$

Die Länge des einbeschriebenen Polygonzuges ist somit

$$\begin{aligned} l(P_{\mathfrak{z}}) &= \sum_{i=0}^n |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \\ &= \sum_{i=0}^n \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_{ij}) \right)^2} \cdot (a_{i+1} - a_i). \end{aligned}$$

Die letzte Summe sieht einer Zwischensumme bezüglich der Funktion

$$g(t) = |f'(t)| = |(f'_1(t), \dots, f'_k(t))| = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(t) \right)^2}$$

ähnlich. Offenbar ist für $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n$ und $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$,

$$\begin{aligned} S_g(\mathfrak{z}, \tau) &= \sum_{i=0}^n g(\xi_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_i) \right)^2} \cdot (a_{i+1} - a_i) \end{aligned}$$

eine Zwischensumme. Wir werden jetzt zeigen, daß sich $l(P_{\mathfrak{z}})$ und $S_g(\mathfrak{z}, \tau)$ bei geeigneten Zerlegungen um beliebig wenig unterscheiden.