

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

### 3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

**Definition.** (*gleichmäßige Konvergenz*)

3/2/12

Die Funktionenfolge  $(f_n)$  konvergiert in  $M$  gleichmäßig gegen  $f$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  und für alle  $x \in M$  gilt:  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

### 5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

**Definition.** (*Funktionenreihe*)

5/4/1

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die alle in  $M$  definiert sind, und es sei

$F_n := \sum_{i=0}^n f_i$  (die  $F_n$  sind also ebenfalls in  $M$  definierte Funktionen).

(1) Die Folge  $(F_n)$  heißt *Funktionenreihe*.

**Bez.:**  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  bzw.  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$  oder einfach  $\sum f_i$  bzw.  $\sum f_i(x)$

(2)  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  ist in  $M$  konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen  $f$

$\overline{\text{Df}}$   $(F_n)$  ist in  $M$  konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen  $f$ .

(3)  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  ist in  $M$  absolut konvergent gegen  $f$

$\overline{\text{Df}}$   $\sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$  ist in  $M$  konvergent gegen  $f$ .

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

### 9.3 Integrierbarkeitskriterien

**Satz 9.8** (*Riemannsches Integrierbarkeitskriterium*)

9/3/1

Sei  $f$  in  $I = [a, b]$  definiert und beschränkt. Dann gilt:  $f$  ist in  $I$  integrierbar gdw für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $\mathfrak{z}$  von  $I$  existiert, so daß  $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$ .

## 9.9 Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

**Satz 9.24** (Integrierbarkeit der Grenzfunktion)

9/9/1

Sei  $a < b$ ,  $I = [a, b]$  und  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die in dem Intervall  $I$  definiert sind. Dann gilt:

- (1) Konvergiert  $(f_n)$  in  $I$  gleichmäßig gegen die Funktion  $f$  und sind alle  $f_n$  in  $I$  integrierbar, dann ist  $f$  in  $I$  integrierbar, und es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

(Vertauschbarkeit des Limes mit dem Integral)

- (2) Konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  in  $I$  gleichmäßig gegen die Funktion  $f$  und sind alle  $f_n$  in  $I$  integrierbar, dann ist  $f$  in  $I$  integrierbar, und es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

(Vertauschbarkeit des Integrals mit der unendlichen Summe)

**Beweis.** (1). Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Definition der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  und für jedes  $x \in I$  gilt:

9/9/2

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} := \varepsilon'.$$

Da  $f_n$  in  $I$  integrierbar ist, ist  $f_n$  und damit auch  $f$  in  $I$  beschränkt. Mit Hilfe des Riemannschen Integrierbarkeitskriteriums zeigen wir, daß  $f$  in  $I$  integrierbar ist.

Sei  $n \geq n_0$  fixiert. Nach der obigen Ungleichung ist

$$f_n(x) - \varepsilon' < f(x) < f_n(x) + \varepsilon' \text{ für alle } x \in I.$$

Folglich gilt für jedes Teilintervall  $I' \subseteq I$ :

$$\sup_{x \in I'} f(x) \leq \sup_{x \in I'} f_n(x) + \varepsilon' \quad \text{und} \quad \inf_{x \in I'} f(x) \geq \inf_{x \in I'} f_n(x) - \varepsilon'.$$

Da  $f_n$  in  $I$  integrierbar ist, existiert eine Zerlegung  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{k+1})$  von  $I$ , so daß

$$\overline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Schließlich erhält man für  $I_i := [a_i, a_{i+1}]$ :

$$\begin{aligned} \overline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^k (a_{i+1} - a_i) \cdot \left( \sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right) \\ &\leq \sum_{i=0}^k (a_{i+1} - a_i) \cdot \left( \sup_{x \in I_i} f_n(x) + \varepsilon' - \inf_{x \in I_i} f_n(x) + \varepsilon' \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\varepsilon' \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^k (a_{i+1} - a_i)}_{=b-a} + \underbrace{(\overline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}))}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\
&< 2\varepsilon'(b-a) + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Folglich ist  $f$  in  $I$  integrierbar.

Wegen  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon'$  gilt weiterhin

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\
&\leq \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{< \varepsilon'} dx \\
&< \varepsilon' \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

(2). Setzt man  $F_n(x) := \sum_{i=0}^n f_i(x)$ , dann konvergiert  $(F_n)$  in  $I$  gleichmäßig gegen  $f$ , und alle  $F_n$  sind in  $I$  integrierbar. Folglich gilt nach (1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b F_n(x) dx = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \right) dx = \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b F_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left( \sum_{i=0}^n f_i(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \underbrace{\int_a^b f_i(x) dx}_{:=g_i(x)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n g_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b f_i(x) dx,
\end{aligned}$$

und damit gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad \square$$