

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Definition. (*Funktionenreihe*)

5/4/1

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine Folge von Funktionen, die alle in M definiert sind, und es sei $F_n := \sum_{i=0}^n f_i$ (die F_n sind also ebenfalls in M definierte Funktionen).

(1) Die Folge (F_n) heißt *Funktionenreihe*.

Bez.: $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ bzw. $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$ oder einfach $\sum f_i$ bzw. $\sum f_i(x)$

(2) $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M *konvergent* (bzw. *gleichmäßig konvergent*) gegen f
 $\stackrel{\text{Df}}{=} (F_n)$ ist in M konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen f .

(3) $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M *absolut konvergent* gegen f
 $\stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$ ist in M konvergent gegen f .

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.9 Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Satz 9.24 (*Integrierbarkeit der Grenzfunktion*)

9/9/1

Sei $a < b$, $I = [a, b]$ und (f_n) eine Folge von Funktionen, die in dem Intervall I definiert sind. Dann gilt:

(1) Konvergiert (f_n) in I gleichmäßig gegen die Funktion f und sind alle f_n in I integrierbar, dann ist f in I integrierbar, und es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

(Vertauschbarkeit des Limes mit dem Integral)

(2) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in I gleichmäßig gegen die Funktion f und sind alle f_n in I integrierbar, dann ist f in I integrierbar, und es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

(Vertauschbarkeit des Integrals mit der unendlichen Summe)

Korollar.

9/9/3

- (1) *Eine in einem Intervall $I = [a, b]$ gleichmäßig konvergente Funktionenreihe kann gliedweise integriert werden.*
- (2) *Potenzreihen können in jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Konvergenzreiches gliedweise integriert werden.*