

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (*Häufungspunkt*)

2/3/11

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

a ist ein Häufungspunkt von M

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ In jeder ε -Umgebung von a liegt wenigstens ein von a verschiedenes Element
 (:= Punkt) aus M ,
 (d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in M$ mit $x \neq a$ und $x \in U_\varepsilon(a)$).

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition. (*rechtsseitig bzw. linksseitig stetig*)

6/3/46

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *rechtsseitig* (bzw. *linksseitig*) *stetig*

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$
 mit $x \geq a$ (bzw. $x \leq a$) gilt:
 Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definition. (*rechtsseitiger bzw. linksseitiger Grenzwert*)

6/3/48

Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a) := D(f) \cap \{x : x > a\}$

bzw. von $D_l(f, a) := D(f) \cap \{x : x < a\}$.

f besitzt an der Stelle a (oder in a) den *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen Grenzwert* c

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D_r(f, a)$ bzw.
 für jedes $x \in D_l(f, a)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = c$ bzw.

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = c$

Satz 6.19 Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a)$ bzw. von $D_l(f, a)$. Dann gilt:

6/3/50

f ist in a *rechtsseitig* bzw. *linksseitig stetig* \iff

$a \in D(f)$ und f besitzt in a den *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen Grenzwert* $f(a)$

$\iff a \in D(f)$ und für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ gilt:

Wenn $x_n \searrow a$ bzw. $x_n \nearrow a$, so $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.