

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

**Satz 8.10** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung mit mehreren Veränderlichen) 8/3/1

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $M$  differenzierbare Funktion. Weiterhin seien  $\bar{a}, \bar{b} \in M$  und die Verbindungsstrecke  $s(\bar{a}, \bar{b})$  zwischen  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$  gehöre zu  $M$ . Dann gibt es ein  $\bar{c} \in s(\bar{a}, \bar{b})$  mit  $\bar{c} \neq \bar{a}, \bar{b}$ , so daß  $f(\bar{b}) - f(\bar{a}) = f'(\bar{c}) \cdot (\bar{b} - \bar{a})$ .

Es sei jetzt  $M$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f \in C^{k+1}(M)$ . 8/3/10  
Weiterhin seien  $\bar{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\bar{c} = \bar{a} + t \cdot \bar{h}$ , wobei  $t \in [0, 1]$ ,  $\bar{h} = (h_1, h_2)$  und die Verbindungsstrecke  $s(\bar{a}, \bar{b})$  ganz zu  $M$  gehöre. Dann ist

$$\varphi(t) := f(\bar{a} + t\bar{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1$$

eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, deren Ableitung sich gemäß der Kettenregel wie folgt berechnet

$$\varphi'(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{c}) \cdot h_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(\bar{c}) \cdot h_2.$$

Für  $\frac{\partial}{\partial x}$  bzw.  $\frac{\partial}{\partial y}$  schreiben wir kurz  $D_1$  bzw.  $D_2$ . Damit ergibt sich

$$\varphi'(t) = h_1 \cdot D_1 f + h_2 \cdot D_2 f = (h_1 D_1 + h_2 D_2) f,$$

wobei das Argument von  $f$  der Einfachheit halber weggelassen wurde.

Für  $n = 2$  ist dann

$$\varphi''(t) = h_1(h_1 D_1 D_1 f + h_2 D_2 D_1 f) + h_2(h_1 D_1 D_2 f + h_2 D_2 D_2 f).$$

Nach dem Satz von Schwarz ist  $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$  und somit erhält man für  $D_i D_i := D_i^2$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$\varphi''(t) = h_1^2 D_1^2 f + 2h_1 h_2 D_1 D_2 f + h_2^2 D_2^2 f.$$

In Analogie zur binomischen Formel schreiben wir für  $h_1^2 D_1^2 f + 2h_1 h_2 D_1 D_2 f + h_2^2 D_2^2 f$  im folgenden auch  $(h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(2)} f$ .

Analog erhält man für  $\varphi^{(k)}(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , die Darstellung

$$\varphi^{(k)}(t) = (h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(k)} f.$$

(Beweis induktiv über  $k$ )

Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^{m+1}(M)$  und sind  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\bar{a} + t \cdot \bar{h}$  mit  $0 \leq t \leq 1$  und  $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$  Elemente aus  $M$ , deren Verbindungsstrecke ganz zu  $M$  gehört, und ist  $\varphi(t) = f(\bar{a} + t\bar{h}) = f(a_1 + th_1, \dots, a_n + th_n)$ , dann ist

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n h_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{a} + t\bar{h}).$$

Schreibt man  $D_i$  für  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n h_i D_i f \quad \text{und} \quad \varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j D_i D_j f \\ &= (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(2)} f, \end{aligned}$$

wenn man den Satz von Schwarz und eine der binomischen Formel (für  $n$  Summanden) analoge Schreibweise benutzt.

Induktiv zeigt man schließlich

$$\varphi^{(k)}(t) = (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(k)} f.$$

Jetzt sind wir in der Lage, den Taylorschen Satz in übersichtlicher Weise zu formulieren.

**Satz 8.12** (Satz von Taylor für Funktionen mit  $n$  Veränderlichen)

8/3/11

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $U$  eine offene Umgebung von  $\bar{c}$  und  $f \in C^{m+1}(U)$ . Sei  $\bar{x} \in U$ , so daß die Verbindungsstrecke von  $\bar{c}$  und  $\bar{x}$  ganz zu  $U$  gehört. Für  $\bar{x} - \bar{c} = (x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n) := (h_1, \dots, h_n) = \bar{h}$  gilt dann: Es gibt ein  $\vartheta \in \mathbb{R}$  mit  $0 < \vartheta < 1$ , so daß  $f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(i)} f(\bar{c}) + R_m(\bar{x})$ , wobei

$$R_m(\bar{x}) = \frac{1}{(m+1)!} \cdot (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(m+1)} f(\bar{c} + \vartheta \bar{h}).$$

**Korollar.**

8/3/13

- (1) Für  $m = 0$  liefert der Satz von Taylor (wie für Funktionen mit einer Veränderlichen) den Mittelwertsatz als Spezialfall.
- (2) Für  $m = 1$ ,  $n = 2$  und  $\bar{a} = (a, b)$ ,  $\bar{x} = (x, y)$ ,  $\bar{h} = \bar{x} - \bar{a} = (x - a, y - b)$  und  $\bar{u} := \bar{a} + \vartheta \bar{h}$  erhält man

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + f_x(\bar{a}) \cdot (x - a) + f_y(\bar{a}) \cdot (y - b) + \\ &\quad \frac{1}{2!} \left( f_{xx}(\bar{u}) \cdot (x - a)^2 + 2f_{xy}(\bar{u}) \cdot (x - a)(y - b) + f_{yy}(\bar{u}) \cdot (y - b)^2 \right). \end{aligned}$$

- (3) Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes 8.12, daß  $f \in C^\infty(M)$  (d.h.,  $f$  ist in  $M$  beliebig oft differenzierbar), dann läßt sich  $f$  in eine Potenzreihe (mit mehreren Veränderlichen) entwickeln.

$$\text{Wenn } R_m(\bar{x}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \text{ so ist } f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(i)} f(\bar{a}).$$