

## Kapitel 2

### Reelle Zahlen

Es bleibt noch die Frage zu diskutieren, ob es überhaupt irrationale Zahlen gibt. Es könnte doch sein, daß für jeden Dedekindschen Schnitt die entsprechende Oberklasse ein kleinstes Element enthält. Dazu betrachten wir den Schnitt  $(A, B)$ , so daß

2/0/2

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \text{ und } 2 \leq x^2\}; \text{ und}$$

$$A = \mathbb{Q} \setminus B.$$

Angenommen,  $B$  enthält ein kleinstes Element  $r$ . Dann ist  $r \in \mathbb{Q}$  mit  $r > 0$  und  $r^2 = 2$ . (Wäre  $r^2 > 2$ , dann ließe sich eine rationale Zahl  $r' > 0$  konstruieren mit  $r' < r$  und  $2 \leq r'^2 < r^2$ . Damit ist  $r$  nicht kleinstes Element in  $B$ .) Folglich existieren positive ganze Zahlen  $m$  und  $n$ , so daß  $r = \frac{m}{n}$ .  $m$  und  $n$  seien o.B.d.A. teilerfremd. Dann gilt:

$$2 = r^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} \text{ und damit } 2n^2 = m^2.$$

Also  $2|m^2$ . Da  $2$  eine Primzahl ist, gilt auch  $2|m$ . Folglich existiert eine natürliche Zahl  $k$ , so daß  $m = 2k$ . Damit haben wir  $2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2$  und schließlich  $n^2 = 2k^2$ . Also  $2|n^2$  und somit  $2|n$ . Folglich ist  $2$  ein Teiler von  $m$  und  $n$ . Das widerspricht aber der Voraussetzung, daß  $m$  und  $n$  teilerfremd sind. Damit bestimmt  $(A, B)$  eine Lücke, also eine irrationale Zahl.

Dies zeigt, daß  $\sqrt{2}$  nicht rational ist.

Wir befassen uns nun mit den grundlegenden Eigenschaften der reellen Zahlen.