

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.2 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

2/2/3

- (0) $0 < 1$.
- (1) *nicht* $(a < a)$. (Irreflexivität)
- (2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$. (Transitivität)
- (3) Für jedes a, b gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$. (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Trichotomie)
- (4) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$,
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.
- (6) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, so $a + c \leq b + d$.
Ist zusätzlich $a < b$ oder $c < d$, so ist $a + c < b + d$.
- (7) Es gilt: $a < b \iff -b < -a$.
- (8) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$,
Wenn $0 < a$ und $b < 0$, so $a \cdot b < 0$,
Wenn $a < 0$ und $b < 0$, so $0 < a \cdot b$.
- (9) Wenn $0 < a$, so $0 < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0$, so $\frac{1}{a} < 0$.
- (10) Wenn $0 < a < b$, so $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0 < b$, so $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$,
Wenn $a < b < 0$, so $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.
- (11) Wenn $0 < a$, dann gibt es natürliche Zahlen m und n , so daß $0 < a < m$ und $0 < \frac{1}{n} < a$.
- (12) Wenn $a < b$, so $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Lemma. (Bernoullische Ungleichung)

2/2/8/2

Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$ und ist m eine natürliche Zahl, dann gilt $(1 + a)^m \geq 1 + ma$.

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

Definition. (*Folge*)

3/0/1

F ist eine *Folge* (von reellen Zahlen)

$\overline{\text{Df}}$ F ist eine Abbildung von \mathbb{N} in \mathbb{R} ,

d.h., jeder natürlichen Zahl n wird eine reelle Zahl a_n zugeordnet, so daß $F(n) = a_n$.

Bez.: $F = (a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ oder einfach $F = (a_n)$.

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Konvergenz*)

3/1/0

Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

(a_n) ist *konvergent gegen* a

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

In diesem Falle heißt a *Grenzwert* oder *Limes* von (a_n) .

Bez.: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $a = \lim a_n$ oder auch einfach
 $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ oder $a_n \rightarrow a$.

Definition. (*Beschränktheit bei Folgen*)

3/1/11

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

(1) (a_n) ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c$ (bzw. $c \leq a_n$) für jedes n .

(2) (a_n) ist *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$ (a_n) ist nach oben und nach unten beschränkt.

Definition. (*monoton wachsend bzw. monoton fallend*)

3/1/31

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

(1) (a_n) ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$).

(2) (a_n) ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$).

Satz 3.8 Eine monotone Folge ist konvergent gdw sie beschränkt ist.

3/1/33

Beispiel. (Definition der Eulerschen Zahl e)

3/1/35

Sei $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Behauptung: (a_n) ist streng monoton wachsend und beschränkt. (Dann ist (a_n) nach Satz 3.8 konvergent.)

z.z.: 1. $a_n < a_{n+1}$ für jedes n und

2. (a_n) ist beschränkt.

Zu 1. g.z.z.: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ (denn alle a_n sind positiv).

Es ist

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n}_{\geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}} \\ &\geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \quad (\text{nach der Bernoullischen Ungleichung}) \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1, \quad \text{denn}\end{aligned}$$

$$\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1 \iff (n+2)(n^2 + n + 1) > (n+1)(n^2 + 2n + 1)$$

$$\iff n^3 + 3n^2 + 3n + 2 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

(und die letzte Ungleichung gilt offensichtlich).

Also $a_n < a_{n+1}$ für jedes n , und damit ist (a_n) streng monoton wachsend.

Zu 2. (a_n) ist beschränkt.

Offenbar ist $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \leq a_n$ für jedes n .

Weiterhin ist

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} := b_n.$$

Es genügt zu zeigen, daß die Folge (b_n) streng monoton fällt.

g.z.z.: $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$ (denn alle b_n sind positiv).

Der Beweis hierzu verläuft ähnlich wie für (a_n) , er wird als Übungsaufgabe gestellt.

Damit haben wir

$$b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4 \geq b_n \text{ für jedes } n.$$

Also

$$2 \leq a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \leq 4.$$

Dann ist (a_n) monoton wachsend und beschränkt, also konvergent und (b_n) monoton fallend und beschränkt, und somit auch konvergent.

Folglich existieren Zahlen e und e' , so daß

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{und} \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e'.$$

Behauptung: $e = e'$.

Annahme: $e \neq e'$.

Dann ist $\varepsilon := |e - e'| > 0$, und folglich gilt für hinreichend große n

$$\begin{aligned} |e - e'| &= |e - a_n + a_n - b_n + b_n - e'| \leq \underbrace{|e - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + |a_n - b_n| + \underbrace{|b_n - e'|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + |a_n - b_n|. \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\leq 4} \cdot \frac{1}{n} \leq 4 \cdot \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{falls } \frac{12}{\varepsilon} < n. \end{aligned}$$

Folglich ist $|e - e'| < \varepsilon$ **!**

Also $e = e'$.