

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.2 Stetigkeit

**Definition.** (*uneigentlicher Grenzwert*)

5/2/7

Sei  $a$  ein Häufungspunkt von  $D(f)$ .

$f$  hat an der Stelle  $a$  den *uneigentlichen Grenzwert*  $\infty$  (bzw.  $-\infty$ )

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $x \in D(f)$  mit  $x \neq a$  gilt: Wenn  $|x - a| < \delta$ , so  $f(x) > c$  (bzw.  $f(x) < c$ ).

**Bez.:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  (bzw.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ )

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Definition.** (*rechtsseitiger bzw. linksseitiger Grenzwert*)

6/3/48

Sei  $a$  ein Häufungspunkt von  $D_r(f, a) := D(f) \cap \{x : x > a\}$

bzw. von  $D_l(f, a) := D(f) \cap \{x : x < a\}$ .

$f$  besitzt an der Stelle  $a$  (oder in  $a$ ) den *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen Grenzwert*  $c$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $x \in D_r(f, a)$  bzw. für jedes  $x \in D_l(f, a)$  gilt: Wenn  $|x - a| < \delta$ , so  $|f(x) - c| < \varepsilon$ .

**Bez.:**  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = c$  bzw.  
 $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = c$

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.1 Ableitung

**Definition.** (*Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient*)

7/1/3

$f$  ist an der Stelle  $a$  (oder kurz in  $a$ ) *differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$   $f$  ist in einer Umgebung  $U(a)$  definiert, und es existiert  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von  $f$  in  $a$ .

**Bez.**  $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$ .

### 7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

**Satz 7.12** (Regel von de l'Hospital für „ $\frac{0}{0}$ “)

7/3/0

Voraussetzung:

- (1) Sei  $a < b$  und seien  $f, g$  in  $(a, b)$  differenzierbar und in  $a$  (rechtsseitig) stetig.
- (2) Sei  $f(a) = g(a) = 0$  und  $g'(x) \neq 0$  für jedes  $x \in (a, b)$ .

Behauptung:

Existiert  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , dann existiert  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$ , und es ist  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**Korollar 2.** (Regel von de l'Hospital für „ $\frac{\infty}{\infty}$ “)

7/3/4

Voraussetzung:

- (1) Sei  $a < b$  und seien  $f, g$  in  $(a, b)$  differenzierbar.
- (2) Sei  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = \infty$  und  $g'(x) \neq 0$  für jedes  $x \in (a, b)$ .

Behauptung:

Existiert  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , dann existiert  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$ , und es ist  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .