

## Kapitel 1

### Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen ist die *vollständige Induktion*. Sie beruht auf dem

#### Induktionsaxiom:

Es sei  $E$  eine Eigenschaft für natürliche Zahlen  $n$ . Dann gilt

$$E(0) \wedge \forall n (E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m E(m).$$

Um die Aussage  $\forall m E(m)$  zu beweisen, genügt es:

1.  $E(0)$  zu zeigen (*Anfangsschritt*) und
2.  $\forall n (E(n) \rightarrow E(n+1))$  nachzuweisen (*Induktionsschritt*).

Bei der Eigenschaft 2. betrachtet man ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  und zeigt:

Wenn  $E(n)$ , so  $E(n+1)$ .

$E(n)$  heißt *Induktionsvoraussetzung*,  $E(n+1)$  *Induktionsbehauptung*.

Eigentlich müßte beim Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Fall (a):  $E(n)$  ist falsch.

Dann ist die Implikation  $E(n) \rightarrow E(n+1)$  aber trivialerweise richtig. Daher läßt man diesen Fall im Induktionsbeweis in der Regel weg und betrachtet nur noch

Fall (b):  $E(n)$  ist richtig.

Unter dieser Voraussetzung ist dann die Gültigkeit von  $E(n+1)$  zu zeigen.

**Achtung:** Häufig findet man bei „Anfängern“ die folgende falsche Formulierung im Induktionsschritt:

„Für beliebiges  $n$  wird vorausgesetzt, daß  $E(n)$  schon gilt.“

Wer dies so formuliert, hat die Behauptung bereits vorausgesetzt.

## Kapitel 2

### Reelle Zahlen

#### 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

**Satz 2.2** Für alle reellen Zahlen  $a, b, c$  gilt:

2/2/3

(0)  $0 < 1$ .

(1) *nicht*  $(a < a)$ . (Irreflexivität)

(2) Wenn  $a < b$  und  $b < c$ , so  $a < c$ . (Transitivität)

(3) Für jedes  $a, b$  gilt:  $a < b$  oder  $a = b$  oder  $b < a$ . (Konnexität)

**Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die *Axiome für die irreflexive Ordnung*.

(3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen:  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$ . (Trichotomie)

(4) Wenn  $a < b$ , so  $a + c < b + c$ . (Monotonie der Addition)

(5) Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $a \cdot c < b \cdot c$ ,

Wenn  $a < b$  und  $c < 0$ , so  $a \cdot c > b \cdot c$ .

(6) Wenn  $a \leq b$  und  $c \leq d$ , so  $a + c \leq b + d$ .

Ist zusätzlich  $a < b$  oder  $c < d$ , so ist  $a + c < b + d$ .

(7) Es gilt:  $a < b \iff -b < -a$ .

(8) Wenn  $0 < a$  und  $0 < b$ , so  $0 < a \cdot b$ ,

Wenn  $0 < a$  und  $b < 0$ , so  $a \cdot b < 0$ ,

Wenn  $a < 0$  und  $b < 0$ , so  $0 < a \cdot b$ .

(9) Wenn  $0 < a$ , so  $0 < \frac{1}{a}$ ,

Wenn  $a < 0$ , so  $\frac{1}{a} < 0$ .

(10) Wenn  $0 < a < b$ , so  $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ,

Wenn  $a < 0 < b$ , so  $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$ ,

Wenn  $a < b < 0$ , so  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ .

(11) Wenn  $0 < a$ , dann gibt es natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ , so daß  $0 < a < m$  und  $0 < \frac{1}{n} < a$ .

(12) Wenn  $a < b$ , so  $a < \frac{a+b}{2} < b$ .

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

#### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Definition.** (Beschränktheit bei Folgen)

3/1/11

Sei  $(a_n)$  eine Folge von reellen Zahlen.

(1)  $(a_n)$  ist nach oben (bzw. nach unten) beschränkt

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $c \in \mathbb{R}$ , so daß  $a_n \leq c$  (bzw.  $c \leq a_n$ ) für jedes  $n$ .

(2)  $(a_n)$  ist beschränkt

$\overline{\text{Df}}$   $(a_n)$  ist nach oben und nach unten beschränkt.

#### Übungsaufgaben

10. Prüfen Sie, ob die Folgen  $(a_n)$ ,  $n \geq 1$ , beschränkt sind:

**3/3/10**

(a)  $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} \quad (n \text{ Wurzeln}),$

(b)  $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n + 1},$

(c)  $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } n = 2k, \\ \frac{n^2}{n+2} & \text{für } n = 2k + 1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$