

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

#### Satz 2.4

2/2/11

- (1) *Die rationalen und die reellen Zahlen sind dicht geordnet*  
(d.h., zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt eine weitere rationale Zahl, und zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine weitere reelle Zahl).
- (2) *Die Menge der rationalen Zahlen ist dicht in  $\mathbb{R}$*   
(d.h., zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl).
- (3) *Zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt eine irrationale Zahl.*

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$

**Definition.** Der  $n$ -dimensionale Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  zusammen mit dem euklidischen Abstand heißt  *$n$ -dimensionaler euklidischer Raum*. 6/1/3

**Definition.** (*Beschränktheit*) 6/1/18

Es sei  $M \subseteq \mathbb{M}$ .

$M$  ist *beschränkt* (in  $\mathbb{M}$ )

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in \mathbb{M}$  und ein  $\varepsilon > 0$ , so daß  $M \subseteq U_\varepsilon(a)$   
(d.h.,  $M$  ist in einer Kugel – mit endlichem Radius  $\varepsilon$  – enthalten; also für jedes  $x \in M$  gilt:  
 $\varrho(x, a) < \varepsilon$ ; vgl. Abb. 6.3)

**Definition.** (*Häufungspunkt*) 6/1/20

Es sei  $M \subseteq \mathbb{M}$  und  $a \in \mathbb{M}$ .

$a$  ist ein *Häufungspunkt* von  $M$

$\overline{\text{Df}}$  In jeder Umgebung von  $a$  liegt noch wenigstens ein von  $a$  verschiedener Punkt aus  $M$ .

**Definition.** (*abgeschlossene Menge*) 6/1/26

Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{M}$  ist *abgeschlossen*

$\overline{\text{Df}}$  Jeder Häufungspunkt von  $M$  gehört zu  $M$ .

#### 6.5 Einige wichtige Ergänzungen

**Definition.** (*kompakt*) 6/5/3

Es sei  $(\mathbb{M}, \varrho)$  ein metrischer Raum und  $M \subseteq \mathbb{M}$ .

- (1)  $M$  ist *kompakt*  
 $\stackrel{\text{Def}}{=} \text{Jede offene Überdeckung von } M \text{ enthält eine endliche Teilüberdeckung von } M \text{ (d.h., ist } \mathcal{U} \text{ eine offene Überdeckung von } M, \text{ dann existiert ein endliches Teilsystem } \mathcal{U}_0 := \{U_1, \dots, U_m\} \subseteq \mathcal{U}, \text{ so daß schon } \mathcal{U}_0 \text{ die Menge } M \text{ überdeckt).}$
- (2)  $(\mathbb{M}, \varrho)$  ist *kompakt*  
 $\stackrel{\text{Def}}{=} M = \mathbb{M}$  ist kompakt.

**Korollar.** (*Überdeckungssatz von Heine-Borel*)

6/5/10

Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ .

$M$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\iff M$  ist kompakt.

## Übungsaufgaben

13. Welche der folgenden Mengen sind kompakt?

6/6/13

- (a)  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(n - \frac{3}{5}, n + \frac{3}{5}\right)$  in  $\mathbb{R}$ ,
- (b)  $A = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]\right)$  in  $\mathbb{R}$ ,
- (c)  $A = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in [0, 1]\}$  in  $\mathbb{R}^2$ ,
- (d)  $A = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$  in  $\mathbb{R}^2$ ,
- (e)  $A = \{(x_1, x_2) : x_2 \leq 2x_1 + 1\}$  in  $\mathbb{R}^2$ .