

## Kapitel 10

### Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 10.1 Doppelintegrale

**Satz 10.1** *Es sei  $f$  in  $D$  definiert und beschränkt und  $\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\mathfrak{z}}', \bar{\mathfrak{z}}_1, \bar{\mathfrak{z}}_2$  seien beliebige Zerlegungen von  $D$ . Dann gilt:* 10/1/3

- (1)  $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ .
- (2)  $D \cdot \inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$  und  $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq D \cdot \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x})$ .
- (3) Ist  $\bar{\mathfrak{z}}'$  eine Verfeinerung von  $\bar{\mathfrak{z}}$ , dann gilt  $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ .
- (4) Es ist stets  $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_1) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_2)$ .

#### 10.2 Dreifachintegrale

**Satz 10.6** *Es sei  $f$  in  $D$  definiert und beschränkt und  $\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\mathfrak{z}}', \bar{\mathfrak{z}}_1, \bar{\mathfrak{z}}_2$  seien beliebige Zerlegungen von  $D$ . Dann gilt:* 10/2/3

- (1)  $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ .
- (2)  $D \cdot \inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$  und  $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq D \cdot \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x})$ .
- (3) Ist  $\bar{\mathfrak{z}}'$  eine Verfeinerung von  $\bar{\mathfrak{z}}$ , dann gilt  $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ .
- (4) Es ist stets  $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_1) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_2)$ .

**Beweis.** Der Beweis verläuft analog zu dem des Satzes 10.1 □

10/2/4
--------