

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.5 Rechnen mit Potenzreihen

**Satz 4.22** (*Summe von Potenzreihen*)

4/5/0

Es seien  $\sum a_n(x-a)^n$  und  $\sum b_n(x-a)^n$  Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_2$  und  $\alpha, \beta$  seien reelle oder komplexe Zahlen. Dann gilt:

- (1) Die Potenzreihe  $\sum (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) \cdot (x-a)^n$  hat einen Konvergenzradius  $\varrho \geq \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ .
- (2) Für  $|x-a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$  ist  

$$\sum (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) \cdot (x-a)^n = \alpha \cdot \sum a_n(x-a)^n + \beta \cdot \sum b_n(x-a)^n.$$

**Beweis.** Der Beweis erfolgt sehr leicht mit Hilfe der Sätze über Folgen (von Partialsummen) und über Reihen.  $\square$

4/5/1

**Satz 4.23** (*Produkt von Potenzreihen*)

4/5/2

Es seien  $\sum a_n(x-a)^n$  und  $\sum b_n(x-a)^n$  Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_2$ , und es sei  $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$  ( $= \sum_{\nu=0}^n a_\nu b_{n-\nu}$ ). Dann gilt:

- (1) Die Potenzreihe  $\sum c_n(x-a)^n$  hat einen Konvergenzradius  $\varrho \geq \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ .
- (2) Für  $|x-a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$  ist  

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

**Beweis.** Für  $|x-a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$  konvergieren beide Potenzreihen absolut; folglich läßt sich ihr Cauchyprodukt bilden (vgl. Satz 4.14), das auch wenigstens dort absolut konvergiert. Also  $\varrho \geq \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$  und

4/5/3

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\nu=0}^n a_\nu(x-a)^\nu \cdot b_{n-\nu}(x-a)^{n-\nu} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\nu=0}^n a_\nu b_{n-\nu} \cdot (x-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^n \cdot \underbrace{\sum_{\nu=0}^n a_\nu b_{n-\nu}}_{=c_n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n. \end{aligned}$$

Für  $|x-a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$  konvergiert  $\sum c_n(x-a)^n$  absolut (vgl. Satz 4.14).  $\square$

**Satz 4.24** (Umordnen von Potenzreihen)

4/5/4

Voraussetzungen:

- (1) Es sei  $\sum a_n(x-a)^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $\varrho > 0$ .
- (2) Weiterhin sei  $b \neq a$ ,  $|b-a| < \varrho$  und  $\varrho - |b-a| = \varrho' (> 0)$ .

Behauptung:

Es gibt eine Potenzreihe  $\sum b_n(x-b)^n$  mit einem Konvergenzradius  $\geq \varrho'$ , so daß für jedes  $x$  mit  $|x-b| < \varrho'$  gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-b)^n, \text{ wobei } b_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m \binom{m}{n} (b-a)^{m-n}.$$

(Bez.:  $\sum b_n(x-b)^n$  entsteht aus  $\sum a_n(x-a)^n$  durch Umordnung nach Potenzen von  $(x-b)$ .)

**Beweis.** Zum Beweis benutzen wir das Korollar zum Großen Umordnungssatz.

4/5/5

Für alle  $x$  mit  $|x-a| < \varrho$  gilt stets

$$\begin{aligned} a_n(x-a)^n &= a_n((x-b) + (b-a))^n \\ &= \sum_{m=0}^n a_n \binom{n}{m} (x-b)^m (b-a)^{n-m} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{:= a_{nm}} \\ &= \sum_{m=0}^n a_{nm} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}. \end{aligned} \quad (\text{wegen } \binom{n}{m} = 0 \text{ für } m > n)$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| &= \sum_{m=0}^n |a_{nm}| = |a_n| \cdot \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} |x-b|^m |b-a|^{n-m} \\ &= |a_n| \cdot (|x-b| + |b-a|)^n := \alpha_n. \end{aligned}$$

Da Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzgebietes absolut konvergieren und nach Voraussetzung stets  $|x-b| + |b-a| < \varrho$  ist, konvergiert  $\sum \alpha_n$  absolut. Damit sind die Voraussetzungen für das Korollar erfüllt. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n((x-b) + (b-a))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_n \binom{n}{m} (x-b)^m (b-a)^{n-m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \binom{n}{m} (x-b)^m (b-a)^{n-m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n}{m} (x-b)^m (b-a)^{n-m} \quad (\text{nach dem Korollar}) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n}{m} (b-a)^{n-m} \right) (x-b)^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=m}^{\infty} a_n \underbrace{\binom{n}{m}}_{=c_n} (b-a)^{n-m} \right) (x-b)^m; \quad \left( \binom{n}{m} = 0 \text{ für } n < m \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-b)^n. \quad \square
\end{aligned}$$

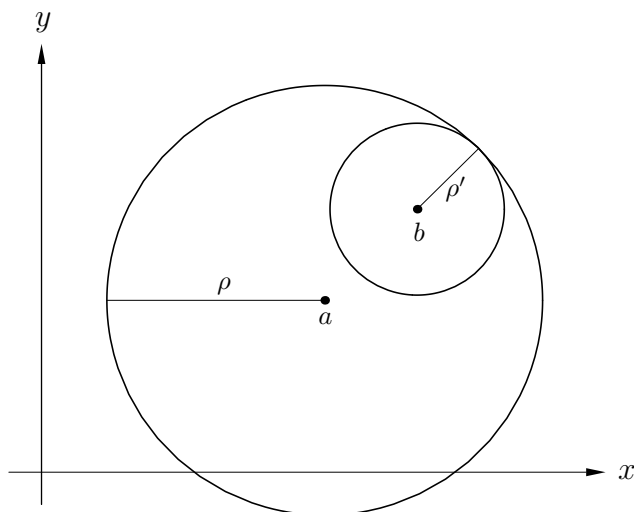


Abb. 4.3 Umordnung einer Potenzreihe  $\sum a_n(x-a)^n$  nach Potenzen von  $(x-b)$ . Die Ausgangsreihe konvergiert innerhalb des größeren Kreises. Zumindest in dem kleineren Kreis  $\{x : |x-a| < \rho'\}$  ist die umgeordnete Reihe  $\sum b_n(x-b)^n$  absolut konvergent.

#### Satz 4.25 (Identitätssatz für Potenzreihen)

4/5/6

Voraussetzungen:

- (1) Es seien  $\sum a_n(x-a)^n$  und  $\sum b_n(x-a)^n$  Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_2$  und  $\varrho_1, \varrho_2 > 0$ .
- (2)  $(x_\nu)$  sei eine Folge mit  $x_\nu \neq a$ ,  $\lim x_\nu = a$  und  $|x_\nu - a| < \varrho_1, \varrho_2$ .
- (3) Für jedes  $\nu \in \mathbb{N}$  gilt:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_\nu - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_\nu - a)^n$ .

Behauptung: Für jedes  $n$  ist  $a_n = b_n$ .

(D.h., stimmen zwei Potenzreihen in unendlich vielen Punkten  $x_\nu$  überein und ist der Mittelpunkt  $a$  der Potenzreihen wenigstens ein Häufungspunkt dieser Menge, dann stimmen die Reihen schon koeffizientenweise überein, sie sind also identisch.)

#### Beweis.

4/5/7/1

Zum Beweis des Satzes benötigen wir zunächst einen Hilfssatz.

**Lemma.** Es sei  $\sum c_n(x-a)^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $\varrho > 0$ , und sei  $(x_\nu)$  eine Folge mit  $x_\nu \neq a$ ,  $|x_\nu - a| < \varrho$  und  $\lim x_\nu = a$ .

4/5/7/2

Dann ist  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0$ .

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist  $|x_\nu - a| < \varrho$ . Wegen  $x_\nu \rightarrow a$  existiert ein  $n_0$ , so daß für alle  $\nu \geq n_0$  gilt:  $|x_\nu - a| < \frac{\varrho}{2} < \varrho$ .

4/5/7/3

Da Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzkreises absolut konvergieren, ist

$\sum_{n=0}^{\infty} \left| c_n \left( \frac{\varrho}{2} \right)^n \right|$  konvergent. Damit ist offenbar auch  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| c_n \left( \frac{\varrho}{2} \right)^{n-1} \right|$  konvergent.

Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| c_n \left( \frac{\varrho}{2} \right)^{n-1} \right| < c$ .

Für  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $m_0$ , so daß für alle  $\nu \geq m_0$  gilt:  $|x_\nu - a| < \frac{\varepsilon}{c}$ .

Ist  $k_0 = \max\{m_0, n_0\}$  und  $\nu \geq k_0$ , dann ist

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n - c_0 \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot |(x_\nu - a)^n| = \\ &= |x_\nu - a| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot \underbrace{|x_\nu - a|^{n-1}}_{< \frac{\varrho}{2}} \leq |x_\nu - a| \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot \left( \frac{\varrho}{2} \right)^{n-1}}_{< c} < c \cdot \underbrace{|x_\nu - a|}_{< \frac{\varepsilon}{c}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n = c_0. \quad \square$$

Wir setzen nun den Beweis von Satz 4.25 fort.

4/5/7/4

Es sei  $c_n = a_n - b_n$ .

g.z.z.:  $c_n = 0$  für jedes  $n$ .

Für alle  $x_\nu$  mit  $|x_\nu - a| < \varrho_1, \varrho_2$  gilt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_\nu - a)^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x_\nu - a)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \cdot (x_\nu - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n. \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt induktiv, daß  $c_n = 0$  für alle  $n$ .

1.  $n = 0$ .

Es ist  $0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n \implies 0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n = c_0$ .

2. Es gelte schon  $c_0 = \dots = c_k = 0$ .

3. Behauptung:  $c_{k+1} = 0$ .

Es ist

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k+1} (x_{\nu} - a)^{n+k+1} \\
&= (x_{\nu} - a)^{k+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k+1} (x_{\nu} - a)^n.
\end{aligned}$$

Aus  $x_{\nu} - a \neq 0$  folgt

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k+1} (x_{\nu} - a)^n.$$

Analog wie für  $n = 0$  gilt hier auch  $c_{0+k+1} = c_{k+1} = 0$ .  $\square$

**Bemerkung.** Als Folgerung erhält man sofort: Stimmen zwei Potenzreihen in einem „kleinen Intervall“ überein, dann sind sie schon identisch. 4/5/8

Es sei hier ein Ausblick auf eine spätere wichtige Anwendung des Lemmas gegeben.

Mit Potenzreihen lassen sich auf einfache Weise Funktionen definieren:

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ , wobei  $f(x)$  dann im Konvergenzgebiet der Potenzreihe definiert ist.

Es gilt offenbar  $f(a) = a_0$ , und aus dem Lemma erhält man:

Wenn  $x_{\nu} \rightarrow a$ , so  $f(x_{\nu}) \rightarrow f(a)$ . Hieraus folgt, daß die Funktion wenigstens an der Stelle  $x = a$  stetig ist (dieser Begriff ist natürlich noch zu definieren). Aus der Stetigkeit an einer Stelle folgt bei einigen wichtigen Funktionen schon die Stetigkeit im gesamten Definitionsbereich (z.B. für die Sinusfunktion und die Exponentialfunktion, mit deren Hilfe sich weitere elementare Funktionen definieren lassen).

In den späteren Kapiteln werden wir uns noch ausführlicher mit weiteren Eigenschaften von Funktionenfolgen und -reihen befassen, insbesondere werden wir Untersuchungen zur Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei gleichmäßiger Konvergenz vornehmen.