

# Kapitel 8

## Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

### 8.1 Differenzierbarkeit

**Definition.** (*Differenzierbarkeit, Ableitung*)

8/1/1

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ .

$f$  ist in  $\bar{c}$  differenzierbar (oder total differenzierbar)

$\overline{\text{Df}}$   $f$  ist in einer Umgebung  $U(\bar{c})$  definiert, und es existiert eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und eine Funktion  $o(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit der Eigenschaft

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0}, \text{ so daß für jedes } \bar{x} \in U(\bar{c}) \text{ gilt: } f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x}).$$

Die Matrix  $A$  heißt dann 1. Ableitung von  $f$  an der Stelle  $\bar{c}$ .

**Bez.:**  $A := f'(\bar{c})$ .

**Definition.** (*Richtungsableitung*)

8/1/7

Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$  und  $f$  in einer Umgebung  $U(\bar{c})$  definiert.

Weiterhin sei  $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$  und  $|\bar{r}| = 1$ .

$f$  ist an der Stelle  $\bar{c}$  in Richtung  $\bar{r}$  differenzierbar

$\overline{\text{Df}}$  Die Funktion  $\varphi(h) := f(\bar{c} + h \cdot \bar{r})$  ist (als Funktion der einen Veränderlichen  $h$ ) an der Stelle 0 differenzierbar;

d.h., es existiert  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{c} + h \cdot \bar{r}) - f(\bar{c})}{h}$ .

Der Limes heißt dann Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $\bar{c}$  in Richtung  $\bar{r}$ .

**Bez.:**  $\frac{\partial f}{\partial \bar{r}}(\bar{c}) = f_{\bar{r}}(\bar{c})$ .

In dem folgenden Satz wird nachgewiesen, daß man aus der totalen Differenzierbarkeit die Richtungsableitbarkeit erhält und daß sich die Richtungsableitung mit Hilfe der partiellen Ableitungen berechnen läßt.

8/1/24