

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. (*monoton, streng monoton*)

5/1/11

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

(1) f ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Def}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 \leq x_2$, so $f(x_1) \leq f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

(2) f ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Def}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_1) < f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

Kapitel 7 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.9 (*1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung*)

7/2/2

Ist $a < b$ und f in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so daß $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Korollar. Ist I ein Intervall in \mathbb{R} , f in I differenzierbar, und ist $f'(x) = 0$ für jedes $x \in I$, dann ist f in I konstant. 7/2/4

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Satz 7.13 Es sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar. Dann gilt:

7/3/9

- (1) f ist in I *monoton wachsend* gdw $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$.
- (2) f ist in I *streng monoton wachsend* gdw $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, und es gibt kein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$ mit $a' < b'$, so daß $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a', b')$.

Beweis. (1). (\longrightarrow) Sei f in I monoton wachsend und $c \in I$.

7/3/10

z.z.: $f'(c) \geq 0$.

Für $h > 0$ ist $f(c + h) - f(c) \geq 0$, und für $h < 0$ ist $f(c + h) - f(c) \leq 0$. Also für alle $h \neq 0$ ist

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0 \implies$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(c+h) - f(c)}{h}}_{\geq 0} = f'(c) \geq 0.$$

(\longleftarrow) Für jedes $x \in I$ gelte: $f'(x) \geq 0$.

z.z.: Wenn $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2$, so $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

für ein geeignetes $c \in (x_1, x_2)$.

Nach Voraussetzung ist $f'(c) \geq 0$ und somit $f(x_2) \geq f(x_1)$, denn $x_2 - x_1 > 0$.

(2). (\longrightarrow) Sei f in I streng monoton wachsend. Dann ist f monoton wachsend, also $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$. Gäbe es ein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$ mit $a' < b'$, so daß $f'(x)$ dort null ist, dann wäre f in (a', b') konstant und damit nicht streng monoton (vgl. Korollar zu Satz 7.9).

(\longleftarrow) Wegen $f'(x) \geq 0$ in I ist f monoton wachsend. Wäre f nicht streng monoton wachsend in I , dann gäbe es ein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$, so daß f in (a', b') konstant ist. Also $f'(x) = 0$ für jedes $x \in (a', b')$. $\nexists!$ \square