

# Kapitel 9

## Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

### 9.1 Das unbestimmte Integral

Das unbestimmte Integral von einer Funktion – die eine Stammfunktion besitzt – ist also eine ganze Klasse von Funktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante unterscheiden. Will man mit diesen Klassen „rechnen“, dann kann man dies repräsentantenweise tun und jeweils entsprechende Konstanten addieren. 9/1/7

#### Zusammenstellung von Grundintegralen

$$\begin{array}{ll} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ \int \sin x dx = -\cos x + c & \\ \int \cos x dx = \sin x + c & \\ \int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + c & \\ \int \frac{dx}{\sin x} = -\cot x + c & \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c & \\ \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + c, & |x| < 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \\ \int e^x dx = e^x + c \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c, & |x| > 1 \\ \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|. \end{array}$$

Diese Grundintegrale werden alle durch Differentiation bewiesen.

### 9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

**Satz 9.19** (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*)

9/5/14

Ist  $f$  in  $[a, b]$  stetig und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  in  $[a, b]$ , dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Satz 9.20** (*partielle Integration*)

9/5/17

Sind  $f$  und  $g$  in  $[a, b]$  stetig differenzierbar, dann ist

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

**Satz 9.21** (Substitutionsregel)

9/5/19

Ist  $f$  in  $[a, b]$  stetig,  $g$  in  $[\alpha, \beta]$  stetig differenzierbar und  $g([\alpha, \beta]) = [a, b]$ ,  
 $g(\alpha) = a$  und  $g(\beta) = b$ , dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{a=g(\alpha)}^{b=g(\beta)} f(t) dt.$$

Ist außerdem  $g$  injektiv, also  $\alpha = g^{-1}(a)$  und  $\beta = g^{-1}(b)$ , dann ist

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x) dx.$$

**9.8 Länge von Kurven**

**Satz 9.23** Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  eine stetig  
differenzierbare Kurve. Dann ist  $\mathfrak{k}$  rektifizierbar, und es gilt

9/8/10

$$l(\mathfrak{k}) = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^k (f'_i(t))^2} dt.$$

**Beispiele.**

(4). Länge der Normalparabel, definiert im Intervall  $[0, 1]$  (Beispiel für die Berechnung der  
Länge einer Kurve mit Hilfe des Korollars zu Satz 9.23).

9/8/15/4

Es sei  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(t) = t^2$  und  $f(t) = (t, g(t))$ .

Dann ist durch  $\mathfrak{k} = \{f(t) : 0 \leq t \leq 1\}$  eine stetig differenzierbare Kurve gegeben und  
 $f'(t) = (1, 2t)$ . Also

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^1 \sqrt{1 + (g'(t))^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = (\star)$$

Man berechnet zunächst am besten das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + 4t^2} dt &= \frac{1}{2} \int \sqrt{1 + z^2} dz \\ &= \frac{1}{2} \left( (z \cdot \sqrt{1 + z^2}) + \ln(z + \sqrt{1 + z^2}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (2t \cdot \sqrt{1 + 4t^2}) + \ln(2t + \sqrt{1 + 4t^2}) \right). \end{aligned}$$

(Die eigentliche Berechnung des Integrals  $\int \sqrt{1 + z^2} dz$  bleibt als Übungsaufgabe.) Also

$$l(\mathfrak{k}) = \frac{1}{2} (2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})).$$