

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.1 Differenzierbarkeit

**Definition.** (*Differenzierbarkeit, Ableitung*)

8/1/1

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ .

$f$  ist in  $\bar{c}$  differenzierbar (oder total differenzierbar)

$\stackrel{\text{Df}}{=}$   $f$  ist in einer Umgebung  $U(\bar{c})$  definiert, und es existiert eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und eine Funktion  $o(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit der Eigenschaft

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0}, \text{ so daß für jedes } \bar{x} \in U(\bar{c}) \text{ gilt: } f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x}).$$

Die Matrix  $A$  heißt dann 1. Ableitung von  $f$  an der Stelle  $\bar{c}$ .

**Bez.:**  $A := f'(\bar{c})$ .

**Satz 8.1** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ .

8/1/9

Ist  $f$  in  $\bar{c}$  differenzierbar, dann ist  $f$  in  $\bar{c}$  stetig.

**Satz 8.7** (*Spezialfall für die Kettenregel*)

8/1/30

Es sei  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (also  $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ).

Ist  $g$  in  $\bar{c}$  und  $f$  in  $g(\bar{c})$  differenzierbar, dann ist  $f \circ g$  in  $\bar{c}$  differenzierbar, und es ist  $(f \circ g)'(\bar{c}) = f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c})$ .

**Beweis.** Sei  $b = g(\bar{c})$ . Nach Voraussetzung ist  $g$  in  $\bar{c}$  und  $f$  in  $b = g(\bar{c})$  differenzierbar. Damit gilt:

8/1/31

$$g(\bar{x}) - g(\bar{c}) = g'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o_1(\bar{x})$$

für alle  $\bar{x}$  in einer Umgebung  $U(\bar{c})$  und  $\frac{o_1(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0$ , und es ist

$$f(y) - f(b) = f'(b) \cdot (y - b) + o_2(y)$$

für alle  $y$  in einer Umgebung  $U(b)$  und  $\frac{o_2(y)}{|y - b|} \xrightarrow{y \rightarrow b} 0$ .

Da  $g$  in  $\bar{c}$  differenzierbar, also dort auch stetig ist, gilt für  $\bar{x} \rightarrow \bar{c}$  auch  $g(\bar{x}) \rightarrow g(\bar{c})$ . Nach Voraussetzung strebt  $o_2(y)$  für  $y \rightarrow b$  von höherer als 1. Ordnung gegen null, d.h., es gibt eine Funktion  $r(y)$ , so daß  $o_2(y) = r(y) \cdot (y - b)$  und  $r(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} 0$ .

Wir wählen jetzt  $y := g(\bar{x})$ . Damit erhält man insgesamt

$$(f \circ g)(\bar{x}) - (f \circ g)(\bar{c}) = \underbrace{f(g(\bar{x}))}_{=y} - \underbrace{f(g(\bar{c}))}_{=b} =$$

$$\begin{aligned}
& f'(g(\bar{c})) \cdot (g(\bar{x}) - g(\bar{c})) + o_2(g(\bar{x})) = \\
& f'(g(\bar{c})) \cdot \left( g'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o_1(x) \right) + o_2(g(\bar{x})) = \\
& f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + \underbrace{f'(g(\bar{x})) \cdot o_1(x) + o_2(g(\bar{x}))}_{:= o(\bar{x})}.
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß

$$\frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0.$$

$f'(g(\bar{c}))$  ist konstant, folglich gilt  $f'(g(\bar{c})) \cdot \frac{o_1(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0$ .

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
\frac{|o_2(g(\bar{x}))|}{|\bar{x} - \bar{c}|} &= \frac{|r(g(\bar{x})) \cdot (g(\bar{x}) - g(\bar{c}))|}{|\bar{x} - \bar{c}|} \\
&= |r(g(\bar{x}))| \cdot \frac{|g(\bar{x}) - g(\bar{c})|}{|\bar{x} - \bar{c}|} = |r(g(\bar{x}))| \cdot \frac{|g'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o_1(\bar{x})|}{|\bar{x} - \bar{c}|} \\
&\leq |r(g(\bar{x}))| \cdot \left( \frac{|g'(\bar{c})| \cdot |\bar{x} - \bar{c}|}{|\bar{x} - \bar{c}|} + \frac{|o_1(\bar{x})|}{|\bar{x} - \bar{c}|} \right) \\
&= \underbrace{|r(g(\bar{x}))|}_{\xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0} \cdot \left( \underbrace{|g'(\bar{c})|}_{\text{konstant}} + \underbrace{\frac{|o_1(\bar{x})|}{|\bar{x} - \bar{c}|}}_{\xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0} \right) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0.
\end{aligned}$$

Damit ist  $f \circ g$  in  $U(\bar{c})$  durch

$$t(\bar{x}) := (f \circ g)(\bar{c}) + \left( \underbrace{f'(g(\bar{c}))}_{\in \mathbf{R}} \cdot \underbrace{g'(\bar{c})}_{\in \mathbf{R}^n} \right) \cdot (\bar{x} - \bar{c})$$

linear approximiert, folglich ist

$$(f \circ g)'(\bar{c}) = f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c}). \quad \square$$