

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung*)

8/1/1

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

f ist in \bar{c} differenzierbar (oder total differenzierbar)

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert, und es existiert eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $o(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0}, \text{ so daß für jedes } \bar{x} \in U(\bar{c}) \text{ gilt: } f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x}).$$

Die Matrix A heißt dann 1. Ableitung von f an der Stelle \bar{c} .

Bez.: $A := f'(\bar{c})$.

Satz 8.5 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/25

Ist f in \bar{c} differenzierbar, dann ist f an der Stelle \bar{c} in jede Richtung \bar{r} (mit $|\bar{r}| = 1$)

differenzierbar, und es ist $f_{\bar{r}}(\bar{c}) = f'(\bar{c}) \cdot \bar{r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot r_i$, wobei $\bar{r} = (r_1, \dots, r_n)$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt für alle \bar{x} aus einer Umgebung $U(\bar{c})$:

8/1/26

$$f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + f'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x})$$

Speziell für $\bar{x} := \bar{c} + h\bar{r} \in U(\bar{c})$ erhält man dann

$$f(\bar{c} + h\bar{r}) - f(\bar{c}) = f'(\bar{c}) \cdot \underbrace{(\bar{c} + h\bar{r} - \bar{c})}_{h\bar{r}} + o(\bar{x})$$

und schließlich

$$\frac{f(\bar{c} + h\bar{r}) - f(\bar{c})}{h} = f'(\bar{c}) \cdot \bar{r} + \underbrace{\frac{o(\bar{x})}{h}}_{\rightarrow 0}.$$

Folglich ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{c} + h\bar{r}) - f(\bar{c})}{h} = f'(\bar{c}) \cdot \bar{r}.$$

Andererseits ist dieser Limes gleich $f_{\bar{r}}(\bar{c})$. Hieraus folgt die Behauptung. \square