

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.7 Uneigentliche Integrale

**Definition.** (*uneigentliches Integral über unendlichen Intervallen*)

9/7/1

Es sei  $a$  eine reelle Zahl,  $f$  sei für alle  $x \geq a$  definiert und in  $[a, x]$  integrierbar,

und es sei  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ .

$f$  ist in  $[a, \infty) = \{x : a \leq x\}$  *uneigentlich integrierbar*

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ .

Der Limes heißt dann *uneigentliches Integral* von  $f$  in  $[a, \infty)$ .

$$\text{Bez.: } \int_a^\infty f(t) dt$$

Ist  $f$  in  $[a, \infty)$  uneigentlich integrierbar, dann heißt  $\int_a^\infty f(t) dt$  *konvergent*, anderenfalls *divergent*.

Ist  $|f|$  in  $[a, \infty)$  uneigentlich integrierbar, dann heißt  $\int_a^\infty f(t) dt$  *absolut konvergent*.

Analog definiert man das uneigentliche Integral von  $f$  in  $(-\infty, a]$ . Hierbei sei  $f$  für jedes  $x \leq a$  definiert und in  $[x, a]$  integrierbar.

Man betrachtet dann  $F(x) := \int_x^a f(t) dt$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ .

**Definition.**  $f$  ist in  $(-\infty, \infty)$  *uneigentlich integrierbar*

9/7/2

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in \mathbb{R}$ , so daß  $f$  in  $(-\infty, a]$  und in  $[a, \infty)$  uneigentlich integrierbar ist.

$\int_{-\infty}^\infty f(t) dt \overline{\text{Df}} \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^\infty f(t) dt$  heißt *uneigentliches Integral* von  $f$  in  $(-\infty, \infty)$ .

**Definition.** (*uneigentliche Integrale über unbeschränkten Funktionen*)

9/7/5

Es sei  $a < b$  und es gelte eine der Bedingungen:

- (1)  $f$  ist in  $[a, b)$  definiert und für jedes  $x \in [a, b)$  in  $[a, x]$  integrierbar.
- (2)  $f$  ist in  $(a, b]$  definiert und für jedes  $x \in (a, b]$  in  $[x, b]$  integrierbar.
- (3)  $a < c < b$ , und  $f$  ist für jedes  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit  $a \leq x_1 < c < x_2 \leq b$  in  $[a, x_1]$  und in  $[x_2, a]$  integrierbar.

$f$  ist in  $[a, b]$  *uneigentlich integrierbar*

$$\begin{aligned} \overline{\text{Df}} \quad (1) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f(t) dt \quad \text{existiert} \quad \text{bzw.} \\ (2) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \int_x^b f(t) dt \quad \text{existiert} \quad \text{bzw.} \\ (3) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \int_a^x f(t) dt \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \int_x^b f(t) dt \quad \text{existieren.} \end{aligned}$$

Diese Limites heißen – falls sie existieren – *uneigentliche Integrale* von  $f$  in  $[a, b]$ , und  $\int_a^b f(t) dt$  heißt dann *konvergent*, anderenfalls *divergent*.

Die verschiedenen Typen von uneigentlichen Integralen über unendlichen Intervallen bzw. über unbeschränkten Funktionen lassen sich natürlich auch kombinieren.

9/7/8

Tiefergehende Untersuchungen über uneigentliche Integrale findet man z.B. in der Literaturangabe [3], Band II, XII Uneigentliche Integrale, Seite 574 – 676.

## Literaturhinweise

- [3] Fichtenholz, G.M.: Differential- und Integralrechnung, Band I – III. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

11/1/3