

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.4 Klassifikation von Unstetigkeitsstellen

**Definition.** (*hebbare Unstetigkeit*)

6/4/0

Sei  $a$  ein Häufungspunkt von  $D(f)$  und  $f$  in  $a$  unstetig.

$f$  besitzt in  $a$  eine *hebbare Unstetigkeit*

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

**Beispiele.**

1. Sei  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

6/4/1/1

Dann besitzt  $f$  in  $a = 0$  eine hebbare Unstetigkeit. (vgl. Abb. 6.18 a)

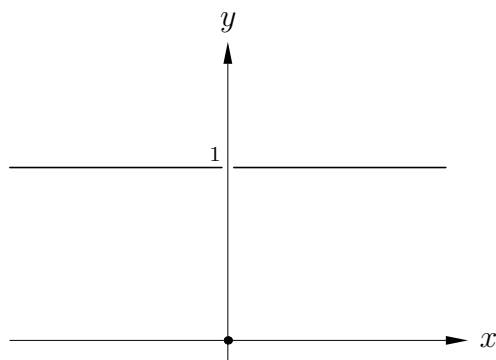


Abb. 6.18 a

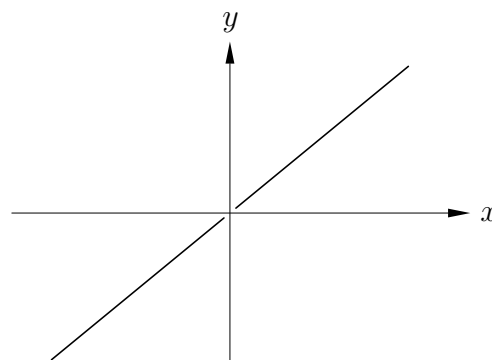


Abb. 6.18 b

2. Sei  $f(x) = \frac{x^2}{x}$  ( $f$  ist in  $x = 0$  nicht definiert!)

6/4/1/2

Offenbar besitzt  $f$  in  $a = 0$  eine hebbare Unstetigkeit, und

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \neq 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x), & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist stetig in  $0$  (vgl. Abb. 6.18 b).

**Definition.** (*Sprungstelle bzw. Sprung*)

6/4/2

Sei  $a$  ein Häufungspunkt von  $D(f)$ .

$f$  besitzt in  $a$  einen *Sprung* (der Größe  $d > 0$ )

$\overline{\text{Df}}$   $f$  besitzt in  $a$  einen rechtsseitigen Grenzwert  $c_r$  und einen linksseitigen Grenzwert  $c_l$  mit  $c_r \neq c_l$  (und  $d = |c_r - c_l|$ ).

$a$  heißt dann auch *Sprungstelle*.

Ist z.B.  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \geq 0, \\ -1, & \text{für } x < 0, \end{cases}$  dann besitzt  $f$  an der Stelle  $0$  einen Sprung der Größe 2. (vgl. Abb. 6.17) 6/4/3

**Definition.** Sei  $a$  ein Häufungspunkt von  $D(f)$ , und sei  $f$  in  $a$  unstetig. 6/4/4

(1)  $a$  ist *Unstetigkeitsstelle erster Art*

$\overline{\text{Df}}$   $a$  ist eine hebbare Unstetigkeitsstelle oder eine Sprungstelle.

(2)  $a$  ist *Unstetigkeitsstelle zweiter Art*

$\overline{\text{Df}}$   $a$  ist **nicht** Unstetigkeitsstelle erster Art

(d.h.,  $a$  ist Unendlichkeitsstelle oder rechtsseitiger bzw. linksseitiger Grenzwert existieren nicht).

**Beispiele.**

6/4/5

Die folgenden Abbildungen zeigen typische Beispiele für Unstetigkeitsstellen zweiter Art.

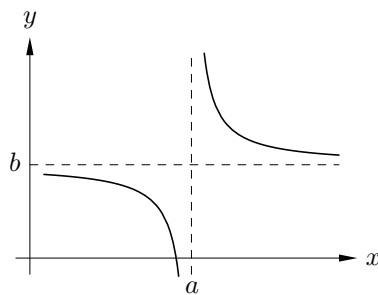


Abb. 6.19 a

Sei  $f(x) = \frac{1}{x-a} + b$ .

$a$  ist Unstetigkeitsstelle zweiter Art.

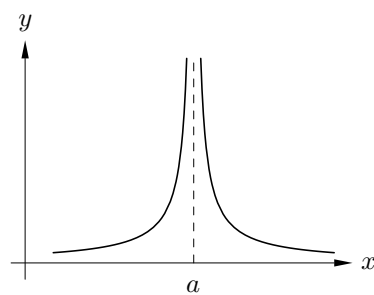


Abb. 6.19 b

Sei  $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$ .

$a$  ist Unstetigkeitsstelle zweiter Art.

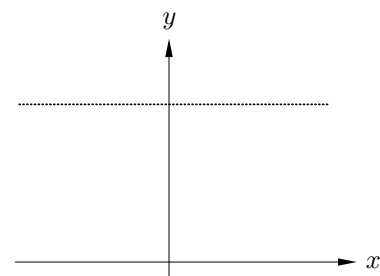


Abb. 6.19 c

$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Jedes  $a \in \mathbb{R}$  ist Unstetigkeitsstelle zweiter Art.

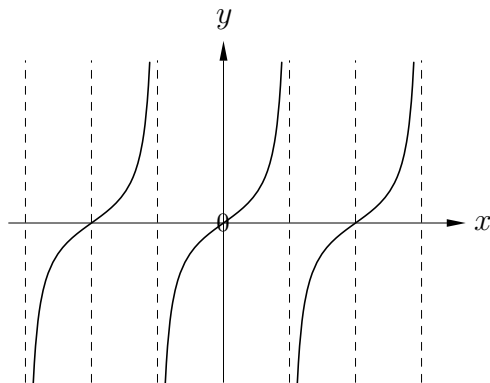


Abb. 6.19 d

Sei  $f(x) = \tan x$ .

An den Stellen  $a = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , besitzt  $f$  Unstetigkeiten zweiter Art.

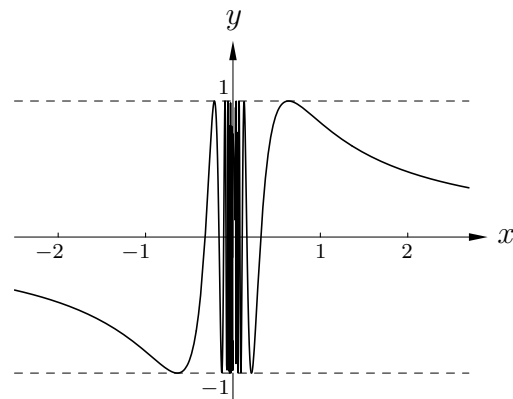


Abb. 6.19 e

Sei  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ .

An der Stelle  $a = 0$  besitzt  $f$  eine Unstetigkeit zweiter Art.