

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 9.10 Ist f in I stetig, dann ist f in I integrierbar.

9/4/0

Satz 9.11 Ist f in I definiert und beschränkt und besitzt f in I höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen, dann ist f in I integrierbar.

9/4/2

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Bemerkung. Völlig analog wie im eindimensionalen Fall gelten auch hier

10/1/10

(1) die Sätze über Zwischensummen

(ein Zwischenstellensystem $\bar{\tau}$ bei einer Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}} = \{D_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$ ist gegeben durch $\bar{\tau} = \{\bar{\xi}_{ij} \in D_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$, wobei $\bar{\xi}_{ij}$ beliebig in D_{ij} zu wählen ist und die entsprechende Zwischensumme durch $S_f(\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\tau})$ definiert ist),

(2) das Riemannsche Integrierbarkeitskriterium,

(3) stetige Funktionen sind integrierbar,

(4) beschränkte Funktionen mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen sind integrierbar.

Die Beweise verlaufen ähnlich wie für Funktionen mit einer Veränderlichen.

Weiterhin gilt:

Satz 10.3 (iterierte Integrale über Rechteckbereichen)

10/1/13

Sei $D = [a, b] \times [c, d]$ und f in D integrierbar. Ist $f(x, y)$ für jedes fixierte $x \in$

$[a, b]$ als Funktion von y in $[c, d]$ integrierbar und ist $F(x) := \int_c^d f(x, y) dy$ in $[a, b]$

integrierbar, dann ist $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b F(x) dx$.

Bisher ist das Integral nur über Rechteckbereichen $D = [a, b] \times [c, d]$ definiert. Wir werden die Definition jetzt auf einfache Bereiche erweitern. Dazu sei zunächst B ein x -einfacher Bereich (für y -einfache Bereiche erfolgt die Definition analog), und $f(x, y)$ sei eine in B definierte und stetige Funktion.

10/1/21

B sei mit Hilfe der in $[a, b]$ stetigen Funktionen $\varphi(x), \psi(x)$ gegeben, und D sei so gewählt, daß $B \subseteq D$, also $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } c \leq \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \leq d\}$.

Durch den folgenden „Kunstgriff“ wird der Definitionsbereich von f auf D erweitert (vgl. Abb. 10.6).

$$f^*(x, y) \stackrel{\text{Df}}{=} \begin{cases} f(x, y), & \text{für } (x, y) \in B, \\ 0, & \text{für } (x, y) \in D \setminus B. \end{cases}$$

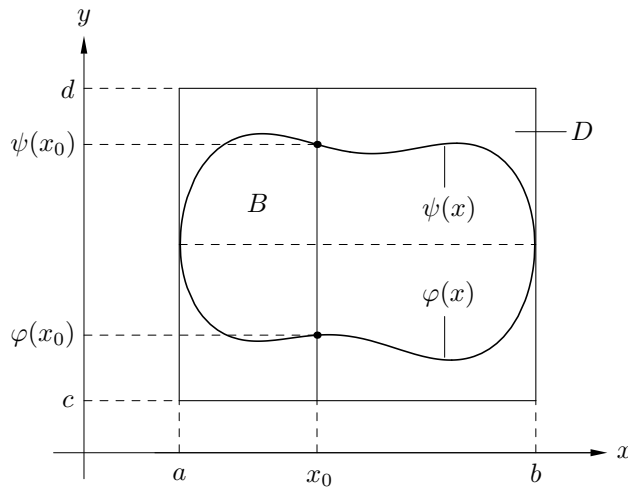


Abb. 10.6 In dieser Abbildung wird ein x -einfacher Bereich B dargestellt, der in einem Rechteck D eingeschlossen ist. Auf B ist eine Funktion $f(x, y)$ definiert, die auf D zu $f^*(x, y)$ erweitert wird. Fixiert man ein $x_0 \in [a, b]$, dann gilt entsprechend der Definition von ψ und φ stets: $f^*(x_0, y) = 0$, falls $c \leq y < \varphi(x_0)$ oder $\psi(x_0) < y \leq d$ und $f^*(x_0, y) = f(x_0, y)$, anderenfalls.

Man überlegt sich leicht, daß B kompakt ist, denn B ist offensichtlich beschränkt, und der Rand von B gehört zu B . Nach Voraussetzung ist f in B stetig, also auch beschränkt. Folglich ist f^* in D definiert und beschränkt, aber dort nicht mehr unbedingt stetig.

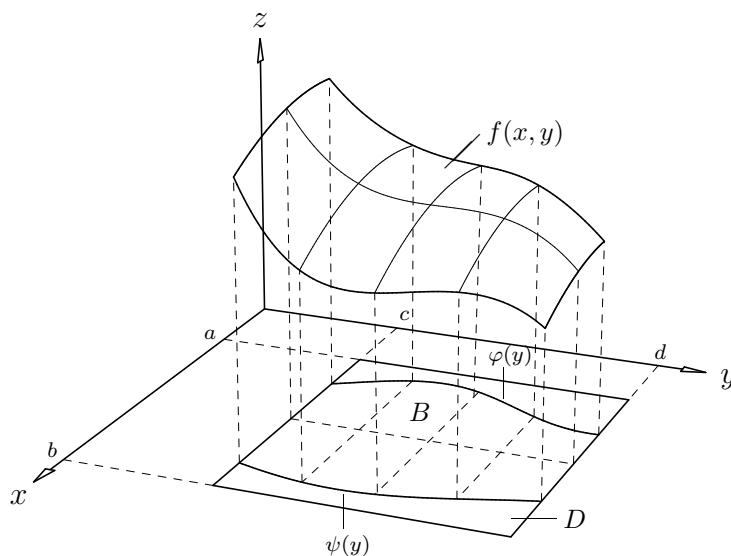


Abb. 10.7

Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x, y)$, die zunächst nur in dem y -einfachen Bereich B definiert ist. Mittels der obigen Definition von f^* wird $f(x, y)$ „trivial“ auf den Rechteckbereich D zu $f^*(x, y)$ erweitert.

Satz 10.4 Es sei B ein über $[a, b]$ x -einfacher bzw. über $[c, d]$ y -einfacher Bereich, $B \subseteq D := [a, b] \times [c, d]$, und $f(x, y)$ sei in B definiert und stetig. Dann ist f^* in D

10/1/22

integrierbar, und es ist

$$\iint_D f^*(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f^*(x, y) \, dy \right) dx \quad \text{bzw.}$$

$$\iint_D f^*(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f^*(x, y) \, dx \right) dy.$$

Beweisidee. Wir betrachten den Fall, daß B ein x -einfacher Bereich ist, den verbleibenden Fall beweist man analog.

10/1/23

Aufgrund von Satz 10.3 genügt folgendes zu zeigen:

1. f^* ist in D integrierbar,
2. Für jedes feste $x \in [a, b]$ ist $f^*(x, y)$ (als Funktion von y) in $[c, d]$ integrierbar, und
3. $F(x) := \int_c^d f^*(x, y) \, dy$ ist (als Funktion von x) in $[a, b]$ integrierbar.

Behauptung 1 kann mit Hilfe des Riemannschen Integrierbarkeitskriteriums nachgewiesen werden. Der Beweis ist jedoch etwas langwierig, daher wird er hier weggelassen.

2. Für jedes fixierte $x_0 \in [a, b]$ ist $f^*(x_0, y)$ in $[c, d]$ definiert und beschränkt und in $[c, d] \setminus \{\varphi(x_0), \psi(x_0)\}$ stetig (als Funktion der Veränderlichen y , vgl. Abb. 10.6). Folglich ist $f^*(x_0, y)$ in $[c, d]$ integrierbar.

3. Für die Integrierbarkeit von $F(x)$ genügt es, die Stetigkeit von $F(x)$ in $[a, b]$ nachzuweisen.

Dazu sei $x_0 \in [a, b]$ und $\varepsilon > 0$. Wir suchen ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in [a, b]$ gilt: Wenn $|x - x_0| < \delta$, so $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$.

Offenbar ist f^* in $D := [a, b] \times [c, d]$ beschränkt. Folglich gibt es ein $c^* \in \mathbb{R}$, so daß $|f^*(x, y)| < c^*$ für alle $(x, y) \in D$.

Nach Voraussetzung sind φ, ψ in $[a, b]$ stetig. Damit gilt:

Für jedes $\varepsilon' > 0$ gibt es ein $\delta' > 0$, so daß für alle $x \in [a, b]$ gilt: wenn $|x - x_0| < \delta'$, so $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon'$ und $|\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon'$.

Sei o.B.d.A. $c < \varphi(x_0) < \psi(x_0) < d$ (falls $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, dann vereinfacht sich der Beweis) und ε' so klein, daß $c < \varphi(x_0) - \varepsilon' < \varphi(x_0) + \varepsilon' < \psi(x_0) - \varepsilon' < \psi(x_0) + \varepsilon' < d$.

Der Einfachheit halber setzen wir jetzt

$$c := c_0, \quad \varphi(x_0) - \varepsilon' := c_1, \quad \varphi(x_0) + \varepsilon' := c_2, \quad \psi(x_0) - \varepsilon' := c_3, \quad \psi(x_0) + \varepsilon' := c_4, \quad d := c_5$$

(vgl. Abb. auch 10.6).

Es ist

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_c^d f^*(x, y) \, dy - \int_c^d f^*(x_0, y) \, dy \right| \\ &= \left| \int_c^d (f^*(x, y) - f^*(x_0, y)) \, dy \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_c^d \underbrace{|f^*(x, y) - f^*(x_0, y)|}_{:= g(y)} dy \\
&= \int_{c_0}^{c_1} g(y) dy + \cdots + \int_{c_4}^{c_5} g(y) dy,
\end{aligned}$$

wobei $g(y) := |f^*(x, y) - f^*(x_0, y)|$.

Aufgrund der Definition von f^* gilt:

für $y \in [c_0, c_1]$ bzw. $y \in [c_4, c_5]$ ist $f^*(x, y) = f^*(x_0, y) = 0$,
für $y \in [c_1, c_2]$ bzw. $y \in [c_3, c_4]$ ist $g(y) \leq 2c^*$, und
für $y \in [c_2, c_3]$ ist $g(y) < \varepsilon'$, falls $|x - x_0| < \delta'$.

Daraus erhält man

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0)| &= \int_{c_0}^{c_1} \underbrace{g(y)}_{=0} dy + \int_{c_1}^{c_2} \underbrace{g(y)}_{< 2c^*} dy + \int_{c_2}^{c_3} \underbrace{g(y)}_{< \varepsilon'} dy + \int_{c_3}^{c_4} \underbrace{g(y)}_{< 2c^*} dy + \int_{c_4}^{c_5} \underbrace{g(y)}_{=0} dy \\
&< 2c^* \underbrace{(c_2 - c_1)}_{=\varepsilon'} + \varepsilon' (c_3 - c_2) + 2c^* \underbrace{(c_4 - c_3)}_{=\varepsilon'} \\
&= \varepsilon' \underbrace{(4c^* + c_3 - c_2)}_{:= c^{**}} = \varepsilon' c^{**} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

falls $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{c^{**}}$ und $|x - x_0| < \delta' := \delta$.

Folglich ist $F(x)$ in $[a, b]$ stetig. \square

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich das Doppelintegral über einfache Bereiche wie folgt definieren.