

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Satz 7.12 (Regel von de l'Hospital für „ $\frac{0}{0}$ “)

7/3/0

Voraussetzung:

- (1) Sei $a < b$ und seien f, g in (a, b) differenzierbar und in a (rechtsseitig) stetig.
- (2) Sei $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Behauptung:

Existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis. (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des 2. Mittelwertsatzes.)

7/3/1

Es sei $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a^*$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes x

mit $a < x < a + \delta$ gilt: $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - a^* \right| < \varepsilon$.

z.z.: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes x mit $a < x < a + \delta$ gilt:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - a^* \right| < \varepsilon.$$

Zunächst gilt: $g(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Angenommen, es existiert ein $x \in (a, b)$ mit $g(x) = 0$.

Dann gibt es nach dem Satz von Rolle ein $c \in (a, x)$, so daß $g'(c) = 0$. **⚡**

Sei jetzt $\varepsilon > 0$ und δ entsprechend der Existenz von $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a^*$ gewählt.

Nach dem 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt dann für $a < x < a + \delta$:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - a^* \right| = \left| \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - a^* \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - a^* \right| < \varepsilon,$$

für ein c_x mit $a < c_x < x < a + \delta$. **□**

Korollar 1.

7/3/2

Voraussetzung:

- (1) Sei $a > 0$ und f, g seien in (a, ∞) differenzierbar.

(2) Sei $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, \infty)$.

Behauptung:

Existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweisidee. Es werden Hilfsfunktionen φ und ψ definiert:

7/3/3

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x}), & \text{für } 0 < x < \frac{1}{a}, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} g(\frac{1}{x}), & \text{für } 0 < x < \frac{1}{a}, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Man überlegt sich leicht, daß φ und ψ in $(0, \frac{1}{a})$ differenzierbar und in 0 (rechtsseitig) stetig sind. Dann läßt sich die Regel von de l'Hospital auf φ, ψ an der Stelle 0 anwenden. Daraus erhält man die Behauptung. \square

Korollar 2. (Regel von de l'Hospital für „ ∞ “)

7/3/4

Voraussetzung:

(1) Sei $a < b$ und seien f, g in (a, b) differenzierbar.

(2) Sei $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = \infty$ und $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Behauptung:

Existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß g' in (a, b) stets positiv oder stets negativ ist.

7/3/5

Angenommen, es gibt Elemente $a' < b'$ in (a, b) , so daß $g'(a') < 0 < g'(b')$ (den Fall $g'(a') > 0 > g'(b')$ beweist man analog). Da g in (a, b) differenzierbar ist, ist g in $[a', b']$ stetig und besitzt dort ein Minimum und ein Maximum. Wenigstens eins von beiden liegt im Inneren der Intervalls. Sei c eine Extremstelle von g in (a', b') . Dann ist $g'(c) = 0$ (siehe Beweis des Satzes von Rolle). $\nabla!$

Da g' in (a, b) das Vorzeichen nicht wechselt, ist g dort streng monoton (dies folgt sofort aus Satz 7.9). Wegen $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = \infty$ ist g in (a, b) streng monoton fallend und in einer hinreichend kleinen rechtsseitigen Umgebung von a positiv.

Mit diesen Informationen beweisen wir nun die Behauptung.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} := c$ ($c \in \mathbb{R}$). Folglich gibt es nach Definition des Limes ein $u \in (a, b)$, so daß

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in (a, u).$$

Wir wählen jetzt u so nahe bei a , daß g in $(a, u]$ positiv ist. Nach dem 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für jedes x mit $a < x < u$ ein $\xi \in (x, u)$, so daß

$$\frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dann gilt für jedes feste $u \in (a, b)$ und jedes $x \in (a, u)$:

$$\left| \frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} - c \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weiterhin ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} - c = \frac{f(u) - c \cdot g(u)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(u)}{g(x)}\right) \cdot \left(\frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} - c\right). \quad (\star)$$

((\star) kann durch ausrechnen bewiesen werden.)

Wegen $a < x < u$ ist $0 < g(x) < g(u)$ und somit $0 < \frac{g(u)}{g(x)} < 1$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| &\leq \left| \frac{f(u) - c \cdot g(u)}{g(x)} \right| + \underbrace{\left| 1 - \frac{g(u)}{g(x)} \right|}_{< 1} \cdot \underbrace{\left| \frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} - c \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \\ &< \frac{1}{g(x)} \cdot \underbrace{|f(u) - c \cdot g(u)|}_{:= d} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (u \text{ fest} \implies d \text{ konstant}) \\ &= \frac{d}{g(x)} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = \infty$ ist $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{1}{g(x)} = 0$. Folglich existiert ein δ mit $0 < \delta < u - a$,

so daß für jedes $x \in (a, a + \delta)$ gilt: $\frac{d}{g(x)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Hieraus folgt schließlich für alle $x \in (a, a + \delta)$:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| < \frac{d}{g(x)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \implies \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = c. \quad \square$$

Bemerkung.

7/3/6

(1) Der Beweis läßt sich nicht unmittelbar auf den Fall „ $\frac{0}{0}$ “ zurückführen, denn differenziert man in $\left(\frac{1}{g}\right)/\left(\frac{1}{f}\right)$ Zähler und Nenner, dann kommen in der jeweiligen Ableitung f^2 bzw. g^2 vor, und über das Grenzwertverhalten des entsprechenden Quotienten dieser Funktionen weiß man nicht Bescheid.

(2) Satz 7.12 und die Korollare 1 und 2 können analog auf die folgenden Fälle übertragen werden:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \pm\infty.$$

(3) Häufig läßt sich der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ leichter bestimmen als $\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{g(x)}$. Daher sind die oben angegebenen Regeln oft sehr hilfreich bei der Berechnung solcher Limites.

(4) Einen Ausdruck der Form „ $0 \cdot \infty$ “ kann man in eine der Formen „ $\frac{0}{0}$ “ oder „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ überführen.

Denn wenn $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \dots} g(x) = \infty$, so ist

$$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

falls diese Limites existieren.

(5) Ausdrücke der Form „ 0^0 “, „ ∞^0 “ und „ 1^∞ “ lassen sich auf die vorhergehenden Fälle zurückführen, indem man die Definition der Potenzfunktion mit Hilfe des natürlichen Logarithmus ausnutzt:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Wenn $f(x) \searrow 0$, so $\ln f(x) \rightarrow -\infty$,

wenn $f(x) \rightarrow \infty$, so $\ln f(x) \rightarrow \infty$,

wenn $f(x) \rightarrow 1$, so $\ln f(x) \rightarrow 0$.

Man versucht zunächst, den Grenzwert des Exponenten in $e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ zu bestimmen. Mit diesem Wert erhält man dann wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion den Grenzwert von $f(x)^{g(x)}$.

Beispiele.

1. Es sei $f(x) = e^x - 1$ und $g(x) = \sin x$.

7/3/7/1

Man berechne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Es ist

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(e^x - 1)'}{(\sin x)'} = \frac{e^x}{\cos x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1.$$

Also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1.$$

2. Es sei $f(x) = (e^x - 1)^2$ und $g(x) = x^2$.

7/3/7/2

Man berechne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Es ist

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{((e^x - 1)^2)'}{(x^2)'} = \frac{(e^x - 1) \cdot e^x}{x}.$$

Den Grenzwert dieses Quotienten kann man noch nicht unmittelbar auswerten, da Zähler und Nenner wieder gegen null streben. Daher versuchen wir, die Regel auf den neu entstandenen Quotienten noch einmal anzuwenden, da er die Voraussetzungen der Regel von de l'Hospital erfüllt.

$$\frac{((e^x - 1) \cdot e^x)'}{(x)'} = \frac{e^x \cdot e^x + (e^x - 1) \cdot e^x}{1} = 2e^{2x} - e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2 - 1 = 1.$$

Also

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Achtung! Die Regeln dürfen nicht „formal“ angewendet werden, man hat immer zu überprüfen, ob die Voraussetzungen zur Anwendung einer Regel erfüllt sind.

Betrachtet man z.B. die Funktionen $f(x) = e^x - 1$ und $g(x) = x^2$ und geht man formal vor bei der Bestimmung des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$, dann berechnet man zunächst die Ableitungen der Zähler- und Nennerfunktion und erhält $f'(x) = e^x$ und $g'(x) = 2x$. Der Nenner strebt wieder gegen null, aber nicht der Zähler. Wenn man jetzt die Regel abermals (aber falsch) anwendet, also Zähler- und Nennerfunktion noch einmal differenziert, dann erhält man $f''(x) = e^x$ und $g''(x) = 2$. Damit existiert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{2}$, aber da die Voraussetzungen für $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht erfüllt waren, gilt nicht

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

3. Es sei $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ und $x > 0$.

7/3/7/3

Man berechne $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)^{g(x)}$.

Nach Definition gilt $f(x)^{g(x)} = (\sin x)^x = e^{x \cdot \ln(\sin x)}$.

Wir versuchen zunächst, den Grenzwert des Exponenten zu bestimmen. Es ist

$$x \cdot \ln(\sin x) = \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = -\frac{\ln(\sin x)}{-\frac{1}{x}}.$$

Für $x \searrow 0$ streben in dem letzten Bruch Zähler und Nenner gegen $-\infty$. Damit sind die Voraussetzungen für eine der de l'Hospital'schen Regeln erfüllt.

Zähler- und Nennerfunktion differenziert ergeben

$$\frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{\frac{1}{x^2}} = \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{x \cos x}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Also

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(\sin x) = 0$$

und damit

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \cdot \ln(\sin x)} = 1.$$

Bemerkung. Die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ließen sich auch mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital bestimmen, aber um $\sin x$ bzw. e^x überhaupt differenzieren zu können, benötigt man zuvor schon diese Limites.

7/3/8

Kurvendiskussion

Bei der *Kurvendiskussion* geht es darum, mit Hilfe der Differentialrechnung wichtige Informationen über eine Funktion zu erhalten, die einerseits besonders interessante Stellen und andererseits den globalen Verlauf der entsprechenden Kurve betreffen.

Hierzu sollte man zunächst den Definitionsbereich bestimmen und die Nullstellen der Funktion berechnen (falls dies möglich ist).

(a) Monotonie

Satz 7.13 Es sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar. Dann gilt:

7/3/9

- (1) f ist in I monoton wachsend gdw $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$.
- (2) f ist in I streng monoton wachsend gdw $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, und es gibt kein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$ mit $a' < b'$, so daß $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a', b')$.

Beweis. (1). (\longrightarrow) Sei f in I monoton wachsend und $c \in I$.

7/3/10

z.z.: $f'(c) \geq 0$.

Für $h > 0$ ist $f(c+h) - f(c) \geq 0$, und für $h < 0$ ist $f(c+h) - f(c) \leq 0$. Also für alle $h \neq 0$ ist

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad \implies$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(c+h) - f(c)}{h}}_{\geq 0} = f'(c) \geq 0.$$

(\longleftarrow) Für jedes $x \in I$ gelte: $f'(x) \geq 0$.

z.z.: Wenn $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2$, so $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

für ein geeignetes $c \in (x_1, x_2)$.

Nach Voraussetzung ist $f'(c) \geq 0$ und somit $f(x_2) \geq f(x_1)$, denn $x_2 - x_1 > 0$.

(2). (\longrightarrow) Sei f in I streng monoton wachsend. Dann ist f monoton wachsend, also $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$. Gäbe es ein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$ mit $a' < b'$, so daß $f'(x)$ dort null ist, dann wäre f in (a', b') konstant und damit nicht streng monoton (vgl. Korollar zu Satz 7.9).

(\longleftarrow) Wegen $f'(x) \geq 0$ in I ist f monoton wachsend. Wäre f nicht streng monoton wachsend in I , dann gäbe es ein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$, so daß f in (a', b') konstant ist. Also $f'(x) = 0$ für jedes $x \in (a', b')$. $\nabla!$ \square

Bemerkung. Die Behauptungen gelten völlig analog auch für monoton fallend (bzw. streng monoton fallend). 7/3/11

(b) Konvexität

Definition. (*konvex*)

7/3/12

Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar.

(1) f ist in I *konvex* (bzw. *streng konvex*) *von unten*

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:
 $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$ bzw.
 $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c),$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „oberhalb“ der Funktion).

(2) f ist in I konvex (bzw. streng konvex) von oben

$\overline{\text{Def}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:

$$f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c) \quad \text{bzw.}$$

$$f(x) < f(c) + f'(c)(x - c),$$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „unterhalb“ der Funktion).

7/3/13

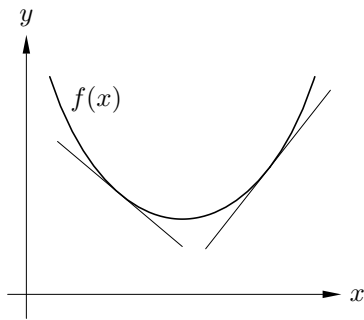


Abb. 7.10 a $f(x)$ ist streng konvex von unten

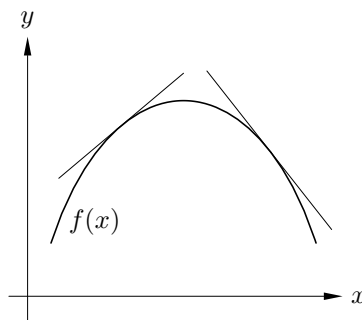


Abb. 7.10 b $f(x)$ ist streng konvex von oben

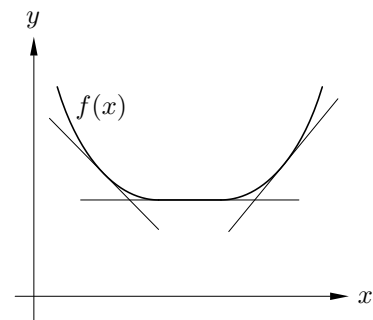


Abb. 7.10 c $f(x)$ ist konvex, aber nicht streng konvex von unten

Satz 7.14 Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar. Dann gilt:
 f ist in I konvex (bzw. streng konvex) von unten gdw f' in I monoton (bzw. streng monoton) wächst.

7/3/14

(Der Satz gilt analog für „von oben“ und „monoton fallend“.)

Beweis. (\longrightarrow) Sei f in I konvex von unten und seien $c_1, c_2 \in I$ mit $c_1 < c_2$.
 z.z.: $f'(c_1) \leq f'(c_2)$.

7/3/15

Nach Definition der Konvexität gilt:

$$f(c_2) \geq f(c_1) + f'(c_1) \cdot (c_2 - c_1) \quad \text{und}$$

$$f(c_1) \geq f(c_2) + f'(c_2) \cdot (c_1 - c_2) \quad \implies$$

$$f(c_2) + f(c_1) \geq f(c_1) + f(c_2) + f'(c_1) \cdot (c_2 - c_1) + f'(c_2) \cdot \underbrace{(c_1 - c_2)}_{-(c_2 - c_1)} \implies$$

$$0 \geq \underbrace{(c_2 - c_1)}_{>0} \cdot (f'(c_1) - f'(c_2)) \implies$$

$$f'(c_1) - f'(c_2) \leq 0.$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung.

(\longleftarrow) Sei f' in I monoton wachsend und $c, x \in I$, $x \neq c$, und o.B.d.A. sei $c < x$ (den Fall $x < c$ beweist man analog).

Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein c_1 mit $c < c_1 < x$, so daß

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c_1).$$

Da f' in I monoton wächst, gilt

$$f(x) = f(c) + \underbrace{f'(c_1)}_{\geq f'(c)} \cdot \underbrace{(x - c)}_{> 0},$$

und damit ist $f(x) \geq f(c) + f'(c) \cdot (x - c)$.

Den verbleibenden Teil der Behauptung: „streng konvex“ und „streng monoton“ zeigt man sehr leicht durch ähnliche Überlegungen wie im Beweis von Satz 7.13. \square

Korollar. Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ zweimal differenzierbar.

7/3/16

- (1) f ist in I konvex von unten gdw $f''(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$.
- (2) f ist in I streng konvex von unten gdw $f''(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, und es gibt kein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$ mit $a' < b'$, so daß $f''(x) = 0$ für alle $x \in (a', b')$.
- (3) Die Behauptungen gelten analog für konvex bzw. streng konvex von oben.

Beweis. Mit Hilfe der Sätze 7.13 und 7.14 erhält man sofort

7/3/17

(1). f ist in I konvex von unten gdw

f' in I monoton wächst gdw

$f''(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$.

(2). f ist in I streng konvex von unten gdw

f' in I streng monoton wächst gdw

$f''(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, und es gibt kein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$ mit $a' < b'$, so daß $f''(x) = 0$ für alle $x \in (a', b')$.

(3) zeigt man analog. \square

(c) Lokale oder relative Extrema

7/3/18

Definition. (lokales Extremum)

7/3/19

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ definiert und $c \in I$.

f besitzt an der Stelle c (oder kurz in c) ein lokales oder relatives Extremum

(\doteq lokales Maximum bzw. lokales Minimum)

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine Umgebung $U(c)$, so daß für jedes $x \in U(c)$ mit $x \neq c$ gilt:

$f(c) > f(x)$ für ein lokales Maximum und

$f(c) < f(x)$ für ein lokales Minimum.

7/3/20

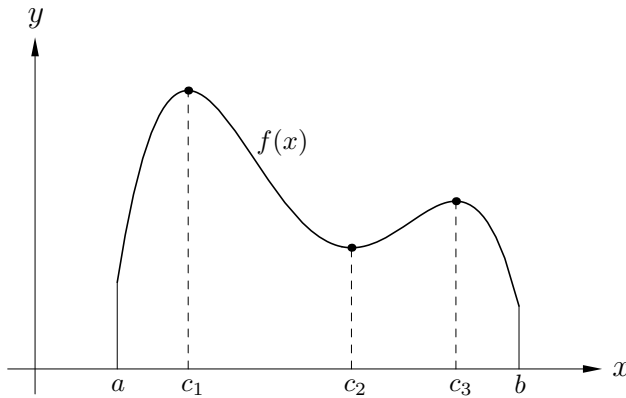


Abb. 7.11 An den Stellen c_1, c_3 besitzt f jeweils ein lokales Maximum und an der Stelle c_2 ein lokales Minimum.

Bemerkung. Für differenzierbare Funktionen können die Ergebnisse der Differentialrechnung ausgenutzt werden, um lokale Extrema zu bestimmen.

Satz 7.15 (Notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums)

7/3/21

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ differenzierbar und $c \in I$.

Besitzt f in c ein lokales Extremum, dann ist $f'(c) = 0$.

Beweis. Sei $f(c)$ ein lokales Minimum von f in I (für ein lokales Maximum verläuft der Beweis analog).

7/3/22

Dann existiert eine Umgebung $U(c)$, so daß für jedes $x \in U(c)$ mit $x \neq c$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \quad \text{für } x > c$$

und

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0 \quad \text{für } x < c.$$

Da f in c differenzierbar ist, existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle c , und er ist $f'(c)$. Folglich existieren auch rechts- und linksseitiger Grenzwert dieses Differenzenquotienten und beide Grenzwerte sind gleich $f'(c)$. Also

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{>0} = f'(c) \geq 0$$

und

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{< 0} = f'(c) \leq 0.$$

Damit gilt insgesamt $f'(c) = 0$. \square

Bemerkung. Ist f in c differenzierbar und $f'(c) = 0$, dann heißt c auch *kritischer* oder *stationärer Punkt* von f . 7/3/23

Aus der Kontraposition von Satz 7.15 folgt sofort, daß f höchstens an den kritischen Stellen ein lokales Extremum besitzen kann. Nur diese Stellen müssen untersucht werden, um alle lokalen Extrema aufzuspüren.

Satz 7.16 (*Hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums*) 7/3/24

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ zweimal differenzierbar und $c \in I$.

Ist $f'(c) = 0$ und $f''(c) > 0$ (bzw. $f''(c) < 0$), dann besitzt f in c ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum).

Beweis. Sei $f''(c) > 0$ (den Fall $f''(c) < 0$ beweist man analog). 7/3/25

Dann gilt nach der Definition der Differenzierbarkeit von f' in c

$$0 < f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}.$$

Nach den Eigenschaften des Grenzwertes gibt es eine Umgebung $U(c)$, so daß

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0 \quad \text{für alle } x \in U(c).$$

Wegen $f'(c) = 0$ gilt also für alle $x \in U(c)$

$$\frac{f'(x)}{x - c} > 0.$$

Folglich haben $f'(x)$ und $x - c$ in $U(c)$ stets das gleiche Vorzeichen.

Wenn also $x > c$, so $f'(x) > 0$,

und wenn $x < c$, so $f'(x) < 0$.

Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c_x),$$

wobei c_x zwischen x und c liegt, also $c < c_x < x$ bzw. $x < c_x < c$.

Da die Funktionen $f'(x)$ und $x - c$ links und rechts von c jeweils das gleiche Vorzeichen besitzen, folgt aus der letzten Gleichheit

$$f(x) - f(c) = f'(c_x) \cdot (x - c) > 0 \quad \text{für } x \in U(c) \setminus \{c\} \quad \implies$$

$$f(x) > f(c) \quad \text{für } x \in U(c) \setminus \{c\}.$$

Folglich besitzt f in c ein lokales Minimum. \square

Satz 7.17 Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ $2n$ -mal differenzierbar und $c \in I$. 7/3/26
Ist $f'(c) = \dots = f^{(2n-1)}(c) = 0$ und $f^{(2n)}(c) > 0$ (bzw. $f^{(2n)}(c) < 0$),
dann besitzt f in c ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum).

Beweis. (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Satzes von Taylor.) 7/3/27

Sei $f^{(2n)}(c) > 0$ (für $f^{(2n)}(c) < 0$ verläuft der Beweis analog).

Dann gilt

$$0 < f^{(2n)}(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f^{(2n-1)}(x) - f^{(2n-1)}(c)}{x - c} \implies$$

$$\frac{f^{(2n-1)}(x) - f^{(2n-1)}(c)}{x - c} > 0$$

für alle $x \in U(c) \setminus \{c\}$, wobei $U(c)$ eine hinreichend kleine Umgebung von c ist.

Wegen $f^{(2n-1)}(c) = 0$ gilt analog wie im Beweis von Satz 7.16, daß $f^{(2n-1)}$ und $x - c$ links und rechts von c jeweils das gleiche Vorzeichen besitzen.

Aus dem Satz von Taylor für $2n - 2$ erhält man

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} \cdot (x - c) + \dots + \frac{f^{(2n-2)}(c)}{(2n-2)!} \cdot (x - c)^{2n-2} +$$

$$\frac{f^{(2n-1)}(c + \vartheta(x - c))}{(2n-1)!} \cdot (x - c)^{2n-1}.$$

Wegen $f'(c) = \dots = f^{(2n-2)}(c) = 0$ gilt

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{(2n-1)}(c + \vartheta(x - c))}{(2n-1)!} \cdot (x - c)^{2n-1} > 0,$$

denn $2n - 1$ ist ungerade, folglich haben $x - c$ und $(x - c)^{2n-1}$ links und rechts von c gleiches Vorzeichen, und damit haben auch $f^{(2n-1)}(c + \vartheta(x - c))$ und $(x - c)^{2n-1}$ gleiches Vorzeichen.

Es ist also $f(x) > f(c)$ für alle $x \in U(c) \setminus \{c\}$ und somit $f(c)$ ein lokales Minimum von f . \square

Beispiel. Es sei $f(x) = x^4$ 7/3/28

Offensichtlich ist $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ und $f^{(4)}(0) > 0$. Damit ist eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Minimums an der Stelle $x = 0$ erfüllt. Das lokale Minimum selbst hat den Wert $f(0) = 0$. (vgl. Abb. 7.12)

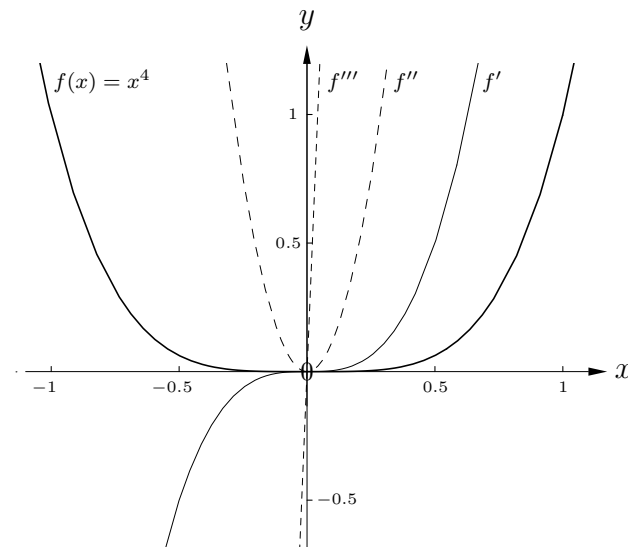


Abb. 7.12 Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x) = x^4$ mit den Ableitungen f' , f'' , f''' . Die Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ sind die kritischen Punkte. $x = 0$ ist der einzige kritische Punkt, den man weiter zu untersuchen hat.

Wegen $f''(0) = f'''(0) = 0$ und $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ besitzt $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ ein lokales Minimum.

(d) Wendepunkte

7/3/29

Definition. (Wendepunkt)

7/3/30

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ stetig und $c \in I$.

f besitzt in c einen Wendepunkt

$\overline{\text{Df}}$ f ist in (a, c) und in (c, b) differenzierbar und es gilt

(f ist in einer linksseitigen Umgebung von c streng konvex von unten und in einer rechtsseitigen Umgebung von c streng konvex von oben) oder
(f ist in einer linksseitigen Umgebung von c streng konvex von oben und in einer rechtsseitigen Umgebung von c streng konvex von unten).

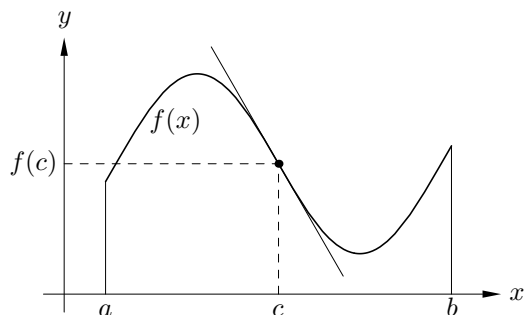


Abb. 7.13 a $f(x)$ besitzt in c einen Wendepunkt, denn in $[a, c]$ und in $[c, b]$ ist f streng konvex von oben bzw. streng konvex von unten.

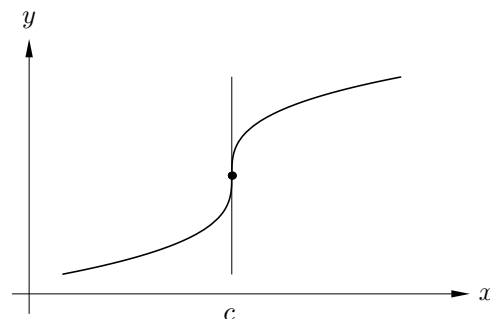


Abb. 7.13 b $f(x)$ ist in c nicht differenzierbar, besitzt aber in c einen Wendepunkt, denn die Konvexitätsbedingungen sind erfüllt.

Ein Wendepunkt markiert also die Umkehr des Konvexitätsverhaltens der betrachteten Funktion.

Satz 7.18 Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ 2-mal differenzierbar und $c \in I$. 7/3/32
 f besitzt in c einen Wendepunkt gdw f' in c ein lokales Extremum besitzt.

Beweis. Übungsaufgabe! 7/3/33
 (Man führt den Beweis mit Hilfe von Satz 7.14; da die Funktion f auch an der Stelle c differenzierbar ist, scheidet der Fall, daß eine „senkrechte Tangente“ existiert, aus.) \square

Satz 7.19 (Notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes) 7/3/34
 Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ zweimal differenzierbar und $c \in I$.
 Besitzt f in c einen Wendepunkt, dann ist $f''(c) = 0$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist f in I zweimal differenzierbar, folglich ist f' in I noch differenzierbar. Da f in c einen Wendepunkt besitzt, hat f' (nach Satz 7.18) in c ein lokales Extremum. Nach Satz 7.15 ist dann $f''(c) = 0$. \square 7/3/35

Satz 7.20 (Hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes) 7/3/36
 Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ dreimal differenzierbar und $c \in I$.
 Ist $f''(c) = 0$ und $f'''(c) \neq 0$, dann besitzt f in c einen Wendepunkt.

Beweis. Nach Voraussetzung ist f' in I zweimal differenzierbar. Wegen der hinreichenden Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums (Satz 7.16) besitzt f' in c ein lokales Extremum. Folglich hat f in c einen Wendepunkt. \square 7/3/37

Satz 7.21 Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ $(2n + 1)$ -mal differenzierbar und $c \in I$. 7/3/38
 Ist $f''(c) = \dots = f^{(2n)}(c) = 0$ und $f^{(2n+1)}(c) \neq 0$, dann besitzt f in c einen Wendepunkt.

Beweis. Wendet man auf f' den Satz 7.17 an, dann erhält man sofort die gewünschte Behauptung. \square 7/3/39

(e) Unendlichkeitsstellen 7/3/40

Definition. (Unendlichkeitsstelle) 7/3/41

Sei $a < b$ und $a \leq c \leq b$ und f in $(a, b) \setminus \{c\}$ definiert.

(1) Ist $c = a$ bzw. $c = b$, dann besitzt f in c eine *rechtsseitige* (bzw. *linksseitige*) *Unendlichkeitsstelle*

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > 0}} f(x) = \pm\infty \quad (\text{bzw.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < 0}} f(x) = \pm\infty).$$

(2) Ist $a < c < b$, dann besitzt f in c eine *Unendlichkeitsstelle* oder *Polstelle*

$\stackrel{\text{Df}}{=} f$ besitzt in c eine rechtsseitige und eine linksseitige Unendlichkeitsstelle.

(f) Verhalten im Unendlichen

7/3/42

Hierzu sind die Limites $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ zu berechnen, falls die Grenzwerte existieren.

Beispiel einer Kurvendiskussion.

7/3/43

$$\text{Sei } f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; Nullstellen sind nicht vorhanden.

(a). Monotonie

Wir bilden zunächst

$$f'(x) = -\frac{-2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$

Für $x = \pm 1$ sind die Ableitungen nicht definiert.

Ist $x \neq \pm 1$, dann ist der Nenner von f' positiv, und damit gilt:

Wenn $x < -1$, so $f'(x) < 0 \implies f$ ist in $(-\infty, -1)$ streng monoton fallend;

wenn $-1 < x < 0$, so $f'(x) < 0 \implies f$ ist in $(-1, 0)$ streng monoton fallend;

wenn $0 < x < 1$, so $f'(x) > 0 \implies f$ ist in $(0, 1)$ streng monoton wachsend;

wenn $1 < x$, so $f'(x) > 0 \implies f$ ist in $(1, \infty)$ streng monoton wachsend.

(b). Konvexität

Wir bilden $f''(x)$ und benutzen Satz 7.14 und das Korollar zu diesem Satz. Es ist

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (1-x^2)^2 - 2x \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2+6x^2}{(1-x^2)^3}.$$

Der Zähler von f'' ist stets positiv; der Nenner ist in $(-1, 1)$ negativ, sonst (außer in ± 1) positiv. Folglich gilt:

Wenn $x < -1$, so $f''(x) < 0 \implies f$ ist in $(-\infty, -1)$ streng konvex von oben;

wenn $-1 < x < 1$, so $f''(x) > 0 \implies f$ ist in $(-1, 1)$ streng konvex von unten;

wenn $1 < x$, so $f''(x) < 0 \implies f$ ist in $(1, \infty)$ streng konvex von oben.

(c). Lokale Extrema

Um die kritischen Stellen zu ermitteln, setzen wir zunächst

$$f'(x) = 0 = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \implies x = 0.$$

Also höchstens an der Stelle $x = 0$ besitzt f ein lokales Extremum.

Wir überprüfen jetzt die hinreichende Bedingung.

Es ist $f''(0) = 2 > 0$, folglich besitzt f in $x = 0$ ein lokales Minimum.

Der Extremwert selbst (also das lokale Minimum) ist $f(0) = 1$.

(d). Wendepunkte

Die Gleichung $f''(x) = 0$ besitzt keine Lösung, folglich hat f keinen Wendepunkt.

(e). Unendlichkeitsstellen

Hier kommen höchstens die Stellen ± 1 in Frage, da der Nenner von f an diesen Stellen null wird. Es ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty.$$

(f). Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{<0} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{<0} = 0.$$

Insgesamt haben wir über f folgende Informationen:

- Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,
- Nullstellen von f : keine,
- Monotoniebereiche:
In $(-\infty, -1)$ und in $(-1, 0)$ ist f streng monoton fallend,
in $(0, 1)$ und in $(1, \infty)$ ist f streng monoton wachsend.
- Konvexitätsbereiche:
In $(-\infty, -1)$ und in $(1, \infty)$ ist f streng konvex von oben,
in $(-1, 1)$ ist f streng konvex von unten.
- lokale Extrema:
In $x = 0$ besitzt f ein lokales Minimum der Größe $f(0) = 1$.
- Wendepunkte: f besitzt keine Wendepunkte.

- Unendlichkeitsstellen:
In -1 besitzt f den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert $-\infty$ bzw. ∞ ,
in 1 besitzt f den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert ∞ bzw. $-\infty$.
- Verhalten im Unendlichen:
Für $x \rightarrow \pm\infty$ strebt $f(x)$ von unten gegen null.

Aus diesen Informationen kann man den groben Verlauf der Funktion skizzieren.
(vgl. hierzu Abb. 7.14)

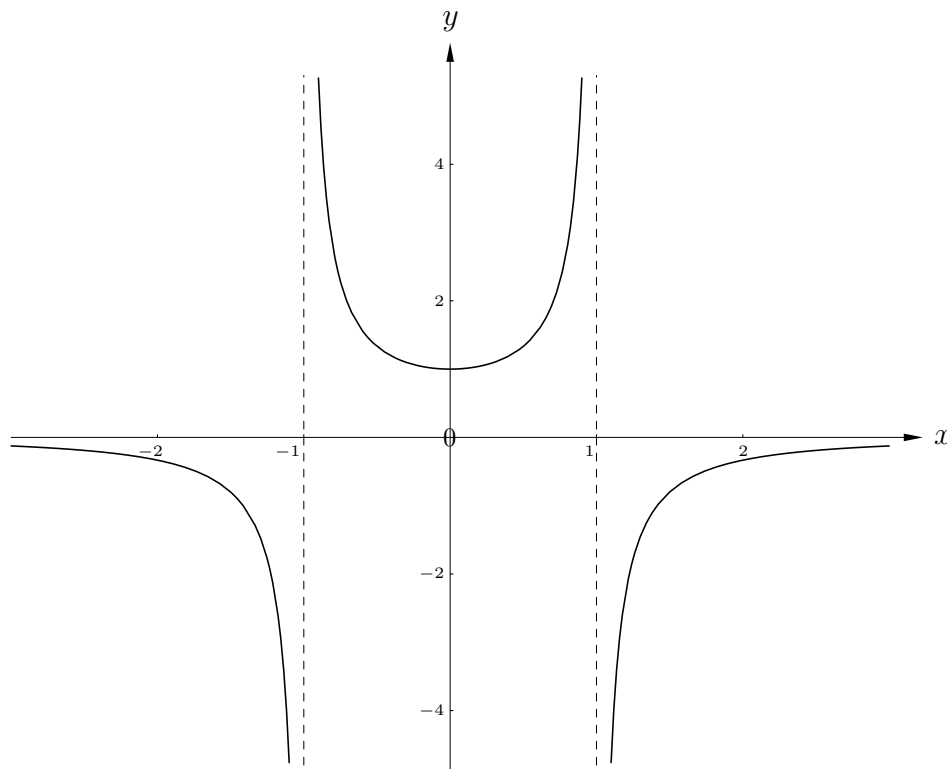


Abb. 7.14 Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.