

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Konvergenz*)

3/1/0

Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

(a_n) ist *konvergent gegen* a

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

In diesem Falle heißt a *Grenzwert* oder *Limes* von (a_n) .

Bez.: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $a = \lim a_n$ oder auch einfach
 $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ oder $a_n \rightarrow a$.

Satz 3.10 (*Eigenschaften konvergenter Folgen*)

3/1/43

Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen und c, d seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1) $(c \cdot a_n)$ ist konvergent und $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$.
- (2) $(a_n + b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
- (3) $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.
- (4) Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ konvergent und

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}.$$

- (4') Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent

$$\text{und } \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

- (5) $(|a_n|)$ ist konvergent und $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.
- (6) Ist $a_n \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq \lim b_n$.
Ist insbesondere $a_n \leq d$ bzw. $d \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq d$
bzw. $d \leq \lim b_n$.

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Satz 4.5 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ist konvergent gdw für jedes $k \geq 1$ gilt: $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ ist konvergent

4/1/21

(und es ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{k-1} a_i + \sum_{i=k}^{\infty} a_i$).

Beweis. Der Beweis ergibt sich sofort aus den Eigenschaften für konvergente Folgen.

4/1/22

Man benutzt für $n \geq k$:

$$S_n = a_0 + \cdots + a_n = \underbrace{a_0 + \cdots + a_{k-1}}_{:=c} + \underbrace{a_k + \cdots + a_n}_{:=S'_n}.$$

Wir wissen schon, daß (S_n) konvergiert gdw (S'_n) konvergiert und daß $\lim S_n = c + \lim S'_n$.
Hieraus folgt die Behauptung. \square