

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Definition. (*einfacher Bereich*)

10/1/20

Es seien $[a, b], [c, d]$ Intervalle in \mathbb{R} .

1. B ist ein *x-einfacher Bereich* (über $[a, b]$)
 $\overline{\text{Df}}$ Es gibt Funktionen $\varphi(x), \psi(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt:
 - (a) φ, ψ sind stetig in $[a, b]$,
 - (b) $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für jedes $x \in [a, b]$,
 - (c) $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ (vgl. Abb. 10.4).
2. B_1 ist ein *y-einfacher Bereich* (über $[c, d]$)
 $\overline{\text{Df}}$ Es gibt Funktionen $\varphi_1(y), \psi_1(y) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt:
 - (a) φ_1, ψ_1 sind stetig in $[c, d]$,
 - (b) $\varphi_1(y) \leq \psi_1(y)$ für jedes $y \in [c, d]$,
 - (c) $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$ (vgl. Abb. 10.5).
3. B ist ein *einfacher Bereich*
 $\overline{\text{Df}}$ B ist *x-einfach* oder *y-einfach*.

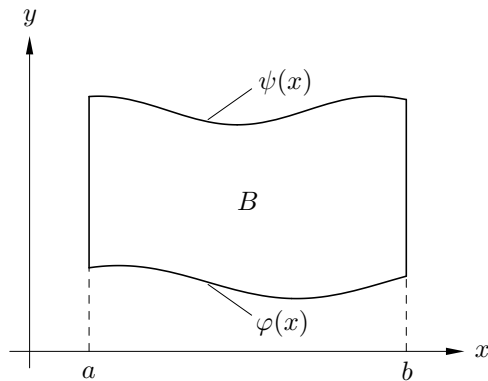


Abb. 10.4 Die Abbildung zeigt einen *x*-einfachen Bereich B .

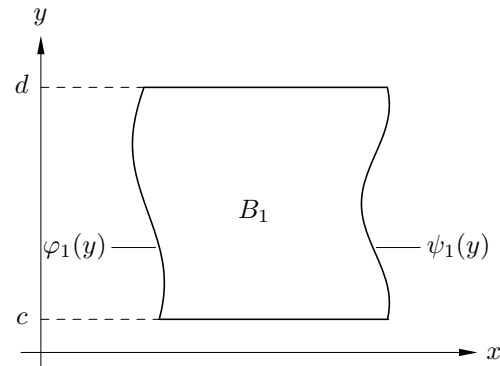


Abb. 10.5 Die Abbildung zeigt einen *y*-einfachen Bereich B_1 .

Bisher ist das Integral nur über Rechteckbereichen $D = [a, b] \times [c, d]$ definiert. Wir werden die Definition jetzt auf einfache Bereiche erweitern. Dazu sei zunächst B ein *x-einfacher Bereich* (für *y*-einfache Bereiche erfolgt die Definition analog), und $f(x, y)$ sei eine in B definierte und stetige Funktion.

10/1/21

B sei mit Hilfe der in $[a, b]$ stetigen Funktionen $\varphi(x), \psi(x)$ gegeben, und D sei so gewählt, daß $B \subseteq D$, also $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } c \leq \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \leq d\}$.

Durch den folgenden „Kunstgriff“ wird der Definitionsbereich von f auf D erweitert (vgl. Abb. 10.6).

$$f^*(x, y) \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{cases} f(x, y), & \text{für } (x, y) \in B, \\ 0, & \text{für } (x, y) \in D \setminus B. \end{cases}$$

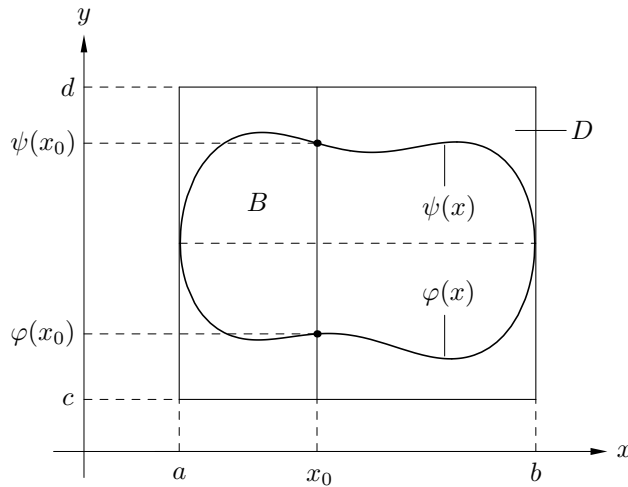


Abb. 10.6 In dieser Abbildung wird ein x -einfacher Bereich B dargestellt, der in einem Rechteck D eingeschlossen ist. Auf B ist eine Funktion $f(x, y)$ definiert, die auf D zu $f^*(x, y)$ erweitert wird. Fixiert man ein $x_0 \in [a, b]$, dann gilt entsprechend der Definition von ψ und φ stets: $f^*(x_0, y) = 0$, falls $c \leq y < \varphi(x_0)$ oder $\psi(x_0) < y \leq d$ und $f^*(x_0, y) = f(x_0, y)$, anderenfalls.

Man überlegt sich leicht, daß B kompakt ist, denn B ist offensichtlich beschränkt, und der Rand von B gehört zu B . Nach Voraussetzung ist f in B stetig, also auch beschränkt. Folglich ist f^* in D definiert und beschränkt, aber dort nicht mehr unbedingt stetig.

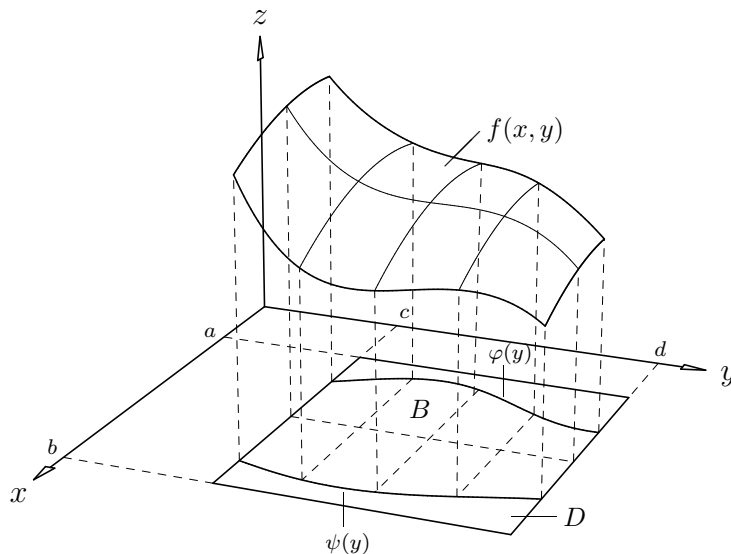


Abb. 10.7

Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x, y)$, die zunächst nur in dem y -einfachen Bereich B definiert ist. Mittels der obigen Definition von f^* wird $f(x, y)$ „trivial“ auf den Rechteckbereich D zu $f^*(x, y)$ erweitert.

Definition. (*Integral über einfachen Bereichen*)

10/1/24

Es sei B ein einfacher Bereich und D ein entsprechender Rechteckbereich, so daß $B \subseteq D$. $f(x, y) : B \rightarrow \mathbb{R}$ sei in B stetig und f^* wie oben definiert.

f ist in B integrierbar $\stackrel{\text{Def}}{=} f^*$ ist in D integrierbar, und

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy \stackrel{\text{Def}}{=} \iint_D f^*(x, y) \, dx dy.$$

$\iint_B f(x, y) \, dx dy$ heißt dann *Doppelintegral* (oder kurz *Integral*) über B .

Bemerkung. Die obige Definition des Integrals über einfachen Bereichen erfaßt nur einen Spezialfall, gewöhnlich wird das Integral allgemeiner definiert, worauf wir hier allerdings verzichten.

10/1/25

Ist $f(x, y)$ in dem einfachen Bereich B stetig und nicht negativ, dann wird der räumlichen Punktmenge $M = \{(x, y, z) : (x, y) \in B \text{ und } 0 \leq z \leq f(x, y, z)\}$ durch

$V := \iint_B f(x, y) \, dx dy$ ein Volumen zugeordnet (siehe Abb. 10.7).