

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Satz 5.19 (Majorantenkriterium für Funktionenreihen)

5/4/5

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine Folge von Funktionen, die alle in M definiert sind, und es seien c_n reelle Zahlen.

Ist $|f_n(x)| \leq c_n$ für fast alle n und alle $x \in M$, und ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent, dann

ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig und absolut konvergent in M .

Beweis. (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Cauchyschen Kriteriums.)

5/4/6

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} c_i < \varepsilon$$

für hinreichend große n . Folglich ist die Funktionenreihe gleichmäßig konvergent. Die absolute Konvergenz erhält man sofort aus dem Majorantenkriterium für Reihen mit konstanten Gliedern. \square