

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Als wichtigsten Spezialfall erhält man die Differenzierbarkeit bzw. die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$. A besteht in diesem Falle nur aus einer Zeile. Die Ableitung $f'(\bar{c})$ ist dann ein Vektor (im allgemeinen ist $f'(\bar{c})$ eine Matrix). Dieser Vektor heißt auch *Gradient* von f an der Stelle \bar{c} (oder kurz in \bar{c}). 8/1/2

Bez.: $f'(\bar{c}) = \text{grad } f(\bar{c})$.

Definition. (*Richtungsableitung*)

8/1/7

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert.

Weiterhin sei $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ und $|\bar{r}| = 1$.

f ist an der Stelle \bar{c} in Richtung \bar{r} differenzierbar

$\overline{\text{Df}}$ Die Funktion $\varphi(h) := f(\bar{c} + h \cdot \bar{r})$ ist (als Funktion der einen Veränderlichen h) an der Stelle 0 differenzierbar;

d.h., es existiert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{c} + h \cdot \bar{r}) - f(\bar{c})}{h}$.

Der Limes heißt dann *Richtungsableitung* von f an der Stelle \bar{c} in Richtung \bar{r} .

Bez.: $\frac{\partial f}{\partial \bar{r}}(\bar{c}) = f_{\bar{r}}(\bar{c})$.

Übungsaufgaben

3. (a) Berechnen Sie die Gradienten von

8/5/3

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{und}$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

- (b) Bestimmen Sie für $f(x, y) = x^2 - y^2$ in den Punkten (1,1) und (-1,1) die Richtungsableitung in Richtung $\bar{a} = (r_1, r_2)$ und in Richtung $-\bar{a}$, wobei $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.