

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (*Grenze*)

2/3/2

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

(1) Sei M nach oben beschränkt. a ist *obere Grenze* von M

$\stackrel{\text{Df}}{=} a$ ist die kleinste obere Schranke von M .

Bez.: $a = \sup M$ (*Supremum* von M).

(2) Sei M nach unten beschränkt. a ist *untere Grenze* von M

$\stackrel{\text{Df}}{=} a$ ist die größte untere Schranke von M .

Bez.: $a = \inf M$ (*Infimum* von M).

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition.

3/1/2

(1) (a_n) *konvergiert* (oder ist *konvergent*) in \mathbb{R}

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert ein } a \in \mathbb{R}, \text{ so daß } (a_n) \text{ gegen } a \text{ konvergiert.}$

(2) (a_n) *divergiert* (oder ist *divergent*) in \mathbb{R}

$\stackrel{\text{Df}}{=} (a_n)$ ist nicht konvergent in \mathbb{R} .

Satz 3.3 Jede konvergente Folge ist beschränkt.

3/1/14

Satz 3.8 Eine monotone Folge ist konvergent gdw sie beschränkt ist.

3/1/33

Beweis. (\longrightarrow) Konvergente Folgen sind beschränkt (nach Satz 3.3; hierzu ist die Monotonie nicht notwendig).

3/1/34

(\longleftarrow) Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt (für „fallend“ verläuft der Beweis analog). z.z.: (a_n) ist konvergent.

Sei $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Behauptung: $a_n \rightarrow a$.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung ist a kleinste obere Schranke von (a_n) , d.h., ist $a' < a$, dann ist a' keine obere Schranke von (a_n) . Sei $a' = a - \varepsilon$, dann existiert ein Folgenglied a_{n_0} , so daß $a - \varepsilon < a_{n_0}$. Da (a_n) monoton wächst, gilt für alle $n \geq n_0$:

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a, \quad \text{also} \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0. \quad \square$$