

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (höhere Ableitungen)

7/1/28

Sei f in $U(a)$ differenzierbar und f' die 1. Ableitung von f in $U(a)$.

f ist in a zweimal differenzierbar

$\overline{\text{Df}}$ f' ist in a differenzierbar;

$f''(a) := (f')'(a)$ heißt 2. Ableitung von f in a .

Induktiv definiert man n -mal differenzierbar und die n -te Ableitung von f in a .

Bez. $f^{(n)}(a) = \frac{d^n f}{dx^n}(a)$; $f^{(0)}(a) := f(a)$.

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Definition. (konvex)

7/3/12

Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar.

(1) f ist in I konvex (bzw. streng konvex) von unten

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c) \quad \text{bzw.}$$

$$f(x) > f(c) + f'(c)(x - c),$$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „oberhalb“ der Funktion).

(2) f ist in I konvex (bzw. streng konvex) von oben

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:

$$f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c) \quad \text{bzw.}$$

$$f(x) < f(c) + f'(c)(x - c),$$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „unterhalb“ der Funktion).

Korollar. Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ zweimal differenzierbar.

7/3/16

(1) f ist in I konvex von unten gdw $f''(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$.

(2) f ist in I streng konvex von unten gdw $f''(x) > 0$ für jedes $x \in I$, und es gibt kein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$ mit $a' < b'$, so daß $f''(x) = 0$ für alle $x \in (a', b')$.

(3) Die Behauptungen gelten analog für konvex bzw. streng konvex von oben.