

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*Beschränktheit*)

6/1/18

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$.

M ist *beschränkt* (in \mathbb{M})

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{M}$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß $M \subseteq U_\varepsilon(a)$

(d.h., M ist in einer Kugel – mit endlichem Radius ε – enthalten; also für jedes $x \in M$ gilt:
 $\varrho(x, a) < \varepsilon$; vgl. Abb. 6.3)

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*Stetigkeit in metrischen Räumen*)

6/2/2

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in \mathbb{M}_1$.

f ist in a *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$
gilt: Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

(Andere Formulierung: Wenn $x \in U_\delta(a)$, so $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.)

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*partielle Ableitung*)

8/1/4

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert.

f ist in \bar{c} *partiell nach x_i differenzierbar* ($i = 1, \dots, n$)

$\overline{\text{Df}}$ Die Funktion $\varphi(x_i) := f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$ ist (als Funktion der einen
Veränderlichen x_i) an der Stelle c_i differenzierbar.

Nach der früheren Differenzierbarkeitsdefinition bedeutet dies, daß die folgenden Limites existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(c_i + h) - \varphi(c_i)}{h}, \quad \text{für } h := x_i - c_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - f(\bar{c})}{x_i - c_i}. \end{aligned}$$

Der Limes selbst (falls er existiert) heißt *partielle Ableitung* von f nach x_i an der Stelle \bar{c} (oder kurz: in \bar{c}).

$$\text{Bez.: } \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = f_{x_i}(\bar{c}).$$

Übungsaufgaben

10. Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, M eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n und f in M definiert. Weiterhin besitze f in jedem Punkt aus M partielle Ableitungen nach allen Variablen x_1, \dots, x_n . Zeigen Sie: Ist $\bar{a} \in M$ und sind alle partiellen Ableitungen in einer Umgebung von \bar{a} beschränkt, dann ist f in \bar{a} stetig.

8/5/10