

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.4 Implizite Funktionen

Satz 8.15 (Hauptsatz über implizite Funktionen mit zwei Veränderlichen)

8/4/3

Voraussetzung:

- (1) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in M .
- (2) Sei $\bar{c} = (a, b) \in M$ und $f(\bar{c}) = 0$.
- (3) f ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ stetig partiell nach y differenzierbar und $f_y(\bar{c}) \neq 0$.

Behauptung:

Es gibt eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in U_\delta(a)$ genau ein $y \in U_\varepsilon(b)$ existiert mit $f(x, y) = 0$ und $y = g(x)$ (insbesondere ist $b = g(a)$).

Korollar. Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 8.15 noch

8/4/5

(4) f ist in $U(\bar{c})$ stetig partiell nach x differenzierbar, dann ist die durch $f(x, y) = 0$ in $U_\delta(a)$ implizit definierte Funktion g differenzierbar, und es gilt: $g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$.

Beispiel. Es sei $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy - 1$.

8/4/7

Für f gelten die folgenden Voraussetzungen:

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ mit $\bar{c} = (1, 0)$ stetig.
2. $f(1, 0) = 0$.
3. f ist in $U(\bar{c})$ stetig partiell nach y differenzierbar und $f_y(1, 0) = -2 \neq 0$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es dann eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in U_\delta(1)$ genau ein $y \in U_\varepsilon(0)$ existiert mit $f(x, y) = 0$ und $g(x) = y$.

Offenbar ist auch f stetig partiell nach x differenzierbar. Damit ist (nach dem letzten Korollar) g in $U_\delta(1)$ differenzierbar und

$$y' = g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = \frac{3x^2 - 2y}{3y^2 - 2x}.$$

Hierbei entsteht eine Gleichung, die eine unbekannte Funktion y und deren Ableitung y' enthält. (Gleichungen dieser Art heißen *Differentialgleichungen*.)