

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*Stetigkeit in metrischen Räumen*)

6/2/2

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in \mathbb{M}_1$.

f ist in a stetig

$\stackrel{\text{Df}}{=} a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

(Andere Formulierung: Wenn $x \in U_\delta(a)$, so $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.)

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition. (*gleichmäßige Stetigkeit*)

6/3/25

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $M \subseteq \mathbb{M}_1$.

f ist in M gleichmäßig stetig

$\stackrel{\text{Df}}{=} M \subseteq D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x, y \in M$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, y) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Stetigkeit in einer Menge ist immer punktweise Stetigkeit, d.h., eine Funktion f ist in einer Menge M stetig gdw f in jedem Punkt aus M stetig ist.

6/3/26

Wir wollen jetzt anhand einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ den Unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit von f in einer Menge M herausarbeiten, wobei man sich unter M ein Intervall vorstellen möge. (Wir wählen hierfür eine formale Schreibweise, um den Unterschied deutlicher hervortreten zu lassen.)

f ist in M stetig \iff

$\forall y \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon),$ und

f ist in M gleichmäßig stetig \iff

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in M (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon),$

Bei der Stetigkeit in der Menge M hängt δ von ε und von der betrachteten Stelle $y \in M$ ab; bei der gleichmäßigen Stetigkeit hängt δ nur von ε ab.

Wir werden jetzt zeigen, daß aus der gleichmäßigen Stetigkeit die Stetigkeit folgt, daß aber die Umkehrung im allgemeinen falsch ist. Hierbei beschränken wir uns wieder auf reellwertige Funktionen.