

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Das unbestimmte Integral von einer Funktion – die eine Stammfunktion besitzt – ist also eine ganze Klasse von Funktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante unterscheiden. Will man mit diesen Klassen „rechnen“, dann kann man dies repräsentantenweise tun und jeweils entsprechende Konstanten addieren. 9/1/7

Zusammenstellung von Grundintegralen

$$\begin{aligned}
 \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} & \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \\
 \int \sin x dx &= -\cos x + c & \quad \int e^x dx &= e^x + c \\
 \int \cos x dx &= \sin x + c & \quad \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c \\
 \int \frac{dx}{\cos x} &= \tan x + c & \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + c \\
 \int \frac{dx}{\sin x} &= -\cot x + c & \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c \\
 \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + c & \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c, \quad |x| > 1 \\
 \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + c, & |x| < 1 & \quad \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|.
 \end{aligned}$$

Diese Grundintegrale werden alle durch Differentiation bewiesen.

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Flächeninhalt*)

9/2/10

Sei f in $[a, b]$ definiert, beschränkt und nicht negativ.

Die (ebene) Punktmenge $M := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$ besitzt einen *Flächeninhalt* (der Größe A)

$\overline{\text{Df}}$ f ist in $[a, b]$ integrierbar (und $\int_a^b f(x) dx = A$).

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.21 (*Substitutionsregel*)

9/5/19

Ist f in $[a, b]$ stetig, g in $[\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar und $g([\alpha, \beta]) = [a, b]$, $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$, dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{a=g(\alpha)}^{b=g(\beta)} f(t) dt.$$

Ist außerdem g injektiv, also $\alpha = g^{-1}(\alpha)$ und $\beta = g^{-1}(b)$, dann ist

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x) dx.$$

Übungsaufgaben

10. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von oben bzw. von unten durch

9/10/10

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad r > 0, \quad \text{bzw. durch} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{r} \cdot x^2$$

begrenzt wird.