

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition. (*rechtsseitig bzw. linksseitig stetig*)

6/3/46

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *rechtsseitig* (bzw. *linksseitig*) *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \geq a$ (bzw. $x \leq a$) gilt:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definition. (*rechtsseitiger bzw. linksseitiger Grenzwert*)

6/3/48

Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a) := D(f) \cap \{x : x > a\}$

bzw. von $D_l(f, a) := D(f) \cap \{x : x < a\}$.

f besitzt an der Stelle a (oder in a) den *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen Grenzwert* c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D_r(f, a)$ bzw. für jedes $x \in D_l(f, a)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \text{Bez.: } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) &= \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = c \quad \text{bzw.} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) &= \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = c \end{aligned}$$

Satz 6.19 Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a)$ bzw. von $D_l(f, a)$. Dann gilt:

6/3/50

f ist in a *rechtsseitig* bzw. *linksseitig stetig* \iff

$a \in D(f)$ und f besitzt in a den *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen Grenzwert* $f(a)$

$\iff a \in D(f)$ und für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ gilt:

Wenn $x_n \searrow a$ bzw. $x_n \nearrow a$, so $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

Beweis. (\implies) f habe in a den Grenzwert c . Dann gilt:

6/3/53

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Dies gilt insbesondere für alle x mit $x \in D_r(f, a) \subseteq D(f)$ bzw. $x \in D_l(f, a) \subseteq D(f)$.

Damit ist c sowohl rechts- als auch linksseitiger Grenzwert von f in a .

(\impliedby) f besitze in a einen rechtsseitigen Grenzwert c_r und einen linksseitigen Grenzwert c_l mit $c_r = c_l := c$. Dann gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_r > 0$, so daß für jedes $x \in D_r(f, a)$:

Wenn $|x - a| < \delta_r$, so $|f(x) - \underbrace{c}_{=c_r}| < \varepsilon$

und ein $\delta_l > 0$, so daß für jedes $x \in D_l(f, a)$:

Wenn $|x - a| < \delta_l$, so $|f(x) - \underbrace{c}_{=c_l}| < \varepsilon$.

Für $\delta = \min\{\delta_r, \delta_l\}$ und für jedes $x \in \underbrace{D_r(f, a) \cup D_l(f, a)}_{D(f) - \{a\}}$ gilt dann:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$. \square

Satz 6.21 Sei f in a definiert und a sei ein Häufungspunkt von $D_r(f, a)$ und von $D_l(f, a)$. Dann gilt:

f ist in a stetig $\iff f$ besitzt in a einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Grenzwert und beide Werte sind gleich $f(a)$.

Korollar. Sei f in a definiert und sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a)$ und von $D_l(f, a)$. Dann gilt:

f ist in a stetig $\iff f$ ist in a linksseitig und rechtsseitig stetig.

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 6

- Definitionen: rechtsseitige und linksseitige Stetigkeit, rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert; Beziehungen zwischen diesen Begriffen;

6/7/17