

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Satz 10.3 (*iterierte Integrale über Rechteckbereichen*)

10/1/13

Sei $D = [a, b] \times [c, d]$ und f in D integrierbar. Ist $f(x, y)$ für jedes fixierte $x \in [a, b]$ als Funktion von y in $[c, d]$ integrierbar und ist $F(x) := \int_c^d f(x, y) dy$ in $[a, b]$ integrierbar, dann ist $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b F(x) dx$.

10.2 Dreifachintegrale

Satz 10.7 (*dreifach iterierte Integrale über Quadern*)

10/2/8

Sei $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ und $f(x, y, z)$ in D integrierbar. Ist $f(x, y, z)$ für jedes fixierte $x \in [a_1, b_1]$ (als Funktion von x, y in $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3] := D'$) integrierbar und $F(x) := \iint_{D'} f(x, y, z) dy dz$ (als Funktion von x in $[a_1, b_1]$) integrierbar, dann ist $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{D'} f(x, y, z) dy dz \right) dx$.

Einfache Bereiche in \mathbb{R}^3

10/2/12

Es sei $[a_1, b_1]$ ein Intervall in \mathbb{R} , $\varphi_1, \psi_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ seien in $[a_1, b_1]$ stetig, und es sei $\varphi_1(x) \leq \psi_1(x)$ für alle $x \in [a_1, b_1]$. Dann ist

$$B' := \{(x, y) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)\}$$

ein x -einfacher Bereich in \mathbb{R}^2 (d.h. in der (x, y) -Ebene). Weiterhin seien φ_2, ψ_2 stetige Funktionen von B' in \mathbb{R} , und für alle $(x, y) \in B'$ gelte stets $\varphi_2(x, y) \leq \psi_2(x, y)$. Dann heißt

$$B := \{(x, y, z) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x), \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

einfacher Bereich in \mathbb{R}^3 .

Da die Variablen x, y, z hierbei gleichberechtigt sind, hätte man auch mit y oder z beginnen können. Die Entscheidung darüber, mit welcher der Variablen man beginnt, wird vernünftigerweise so getroffen, daß sich die anschließende Integration am einfachsten gestaltet.

Betrachtet man zunächst einen y -einfachen Bereich B' , dann startet man mit einem Intervall $[a_2, b_2]$ und entsprechenden stetigen Funktionen $\varphi_1, \psi_1 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $\varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y)$ für alle $y \in [a_2, b_2]$. Dann ist

$$B' = \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y), a_2 \leq y \leq b_2\} \quad \text{und} \\ B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

In der folgenden Abbildung ist B' ein y -einfacher Bereich und B ein einfacher dreidimensionaler Bereich.

Wir werden jetzt Dreifachintegrale auf einfachen Bereichen definieren.

10/2/14

Dazu sei $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Quader und $B \subseteq D$ ein einfacher Bereich; o.B.d.A. gehen wir von einem x -einfachen Bereich B' über $[a_1, b_1]$ aus.

Sei $f(x, y, z) := f(\bar{x})$ in B definiert und stetig und

$$f^*(\bar{x}) \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{für } \bar{x} \in B, \\ 0, & \text{für } \bar{x} \in D \setminus B. \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $x \in [a_1, b_1]$:

$$\begin{aligned} &\text{wenn } a_2 \leq y < \varphi_1(x), \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0, \\ &\text{wenn } \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x), \text{ so } f^*(\bar{x}) = f(\bar{x}), \\ &\text{wenn } \psi_1(x) < y \leq b_2, \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Für jedes $y \in [a_2, b_2]$ erhält man:

$$\begin{aligned} &\text{wenn } a_3 \leq z < \varphi_2(x, y), \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0, \\ &\text{wenn } \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y), \text{ so } f^*(\bar{x}) = f(\bar{x}), \\ &\text{wenn } \psi_2(x, y) < z \leq b_3, \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Beweisidee. Den Beweis führt man analog zum Satz 10.4. Aufgrund von Satz 10.7

10/2/16

genügt folgendes zu zeigen:

1. f^* ist in D integrierbar.
2. Für jedes fixierte $x \in [a_1, b_1]$ ist $f^*(x, y, z)$ (als Funktion von x und y) in $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3] := D'$ integrierbar.
3. $F(x) := \iint_{D'} f^*(x, y, z) dy dz$ ist (als Funktion von x) in $[a_1, b_1]$ integrierbar.

Diese Behauptungen zeigt man durch ähnliche Überlegungen wie beim Beweis von Satz 10.3. \square