

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*bestimmte Divergenz*)

3/1/45

Es sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

(a_n) *divergiert bestimmt* gegen $+\infty$ (bzw. gegen $-\infty$)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $c \in \mathbb{R}$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt:
 $c \leq a_n$ (bzw. $a_n \leq c$).

Bez.: $\lim a_n = +\infty$ bzw. $\lim a_n = -\infty$ oder auch
 $a_n \rightarrow \infty$ bzw. $a_n \rightarrow -\infty$

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Abschließend betrachten wir noch Funktionenfolgen. Dazu sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine in M definierte Funktion. Weiterhin sei auch $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in M definiert. 3/2/10

Definition. (*Konvergenz von Funktionenfolgen*)

(1) Die Funktionenfolge (f_n) *konvergiert an der Stelle* $a \in M$ *gegen* b

$\overline{\text{Df}}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = b$.

(2) (f_n) *konvergiert in* M *gegen die Funktion* f

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $a \in M$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a)$,

(d.h., für jedes fixierte $a \in M$ konvergiert die Zahlenfolge $(f_n(a))$ gegen die Zahl $f(a)$;
diese Art Konvergenz nennen wir auch *punktweise Konvergenz*).

Bez.: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

(3) (f_n) *konvergiert in* M

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß (f_n) in M gegen f konvergiert.

Definition. (*gleichmäßige Konvergenz*)

3/2/12

Die Funktionenfolge (f_n) *konvergiert in* M *gleichmäßig* gegen f

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und für alle $x \in M$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 3

- Definitionen: Bestimmte Divergenz; Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen;

3/4/12