

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Satz 4.4 Es seien $\sum a_i, \sum b_i$ konvergent und $a, b \in \mathbb{R}$. 4/1/19
Dann ist $\sum(a \cdot a_i + b \cdot b_i)$ konvergent und $\sum(a \cdot a_i + b \cdot b_i) = a \cdot \sum a_i + b \cdot \sum b_i$.

4.3 Komplexe Zahlen

Bemerkung. Man kann mit komplexen Zahlen im Prinzip rechnen wie mit reellen Zahlen, allerdings ist in \mathbb{C} keine Ordnung definiert. 4/3/5

Wir haben uns schon überlegt, daß $\{(1, 0), (0, 1)\}$ eine Basis für den Vektorraum \mathbb{R}^2 bildet. Der Teilraum $\{x \cdot (1, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ von \mathbb{R}^2 ist offenbar isomorph mit \mathbb{R} (als 1-dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R}). Daher identifizieren wir in Zukunft $(1, 0)$ mit 1. Für $(0, 1)$ schreibt man auch i (nicht zu verwechseln mit natürlichen Zahlen i), so daß durch $\{1, i\}$ eine Basis für \mathbb{R}^2 gegeben ist.

Mit dieser Vereinbarung gilt

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i.$$

Für $a \cdot 1$ bzw. für $b \cdot i$ schreiben wir kurz a bzw. ib . Damit erhält man eine geeignete Darstellung für komplexe Zahlen:

$$(a, b) = a + ib, \quad (0, 0) = 0 + i0 := 0.$$

Bez.: In $z = x + iy$ heißt x *Realteil* ($:= \operatorname{Re}(z)$) und y *Imaginärteil* ($:= \operatorname{Im}(z)$) von z .

Bemerkung. Aus der Definition der Multiplikation für komplexe Zahlen ergibt sich 4/3/6

$$i \cdot i = i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = (-1) \cdot (1, 0) = -1.$$

und weiterhin

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = ac - bd + i(ad + bc).$$

Berechnet man das Produkt (formal) wie in einem Körper, so entsteht dasselbe Ergebnis:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = a \cdot c + a \cdot id + ib \cdot c + \underbrace{ib \cdot id}_{i^2 \cdot db} = ac - bd + i \cdot (ad + bc).$$

4.4 Potenzreihen

Definition. (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls

reell oder komplex.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *Potenzreihe* in $x-a$ mit den *Koeffizienten* a_n .

Übungsaufgaben

21. Zerlegen Sie $\exp(ix) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ in Real- und Imaginärteil ($i^2 = -1$).

4/6/21
