

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Beweis. Sei $b = g(\bar{c})$. Nach Voraussetzung ist g in \bar{c} und f in $b = g(\bar{c})$ differenzierbar. Damit gilt: 8/1/31

$$g(\bar{x}) - g(\bar{c}) = g'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o_1(\bar{x})$$

für alle \bar{x} in einer Umgebung $U(\bar{c})$ und $\frac{o_1(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0$, und es ist

$$f(y) - f(b) = f'(b) \cdot (y - b) + o_2(y)$$

für alle y in einer Umgebung $U(b)$ und $\frac{o_2(y)}{|y - b|} \xrightarrow{y \rightarrow b} 0$.

Da g in \bar{c} differenzierbar, also dort auch stetig ist, gilt für $\bar{x} \rightarrow \bar{c}$ auch $g(\bar{x}) \rightarrow g(\bar{c})$. Nach Voraussetzung strebt $o_2(y)$ für $y \rightarrow b$ von höherer als 1. Ordnung gegen null, d.h., es gibt eine Funktion $r(y)$, so daß $o_2(y) = r(y) \cdot (y - b)$ und $r(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} 0$.

Wir wählen jetzt $y := g(\bar{x})$. Damit erhält man insgesamt

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\bar{x}) - (f \circ g)(\bar{c}) &= f(\underbrace{g(\bar{x})}_{=y}) - f(\underbrace{g(\bar{c})}_{=b}) = \\ &= f'(g(\bar{c})) \cdot (g(\bar{x}) - g(\bar{c})) + o_2(g(\bar{x})) = \\ &= f'(g(\bar{c})) \cdot (g'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o_1(\bar{x})) + o_2(g(\bar{x})) = \\ &= f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + \underbrace{f'(g(\bar{x})) \cdot o_1(\bar{x}) + o_2(g(\bar{x}))}_{:= o(\bar{x})}. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß

$$\frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0.$$

$f'(g(\bar{c}))$ ist konstant, folglich gilt $f'(g(\bar{c})) \cdot \frac{o_1(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0$.

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \frac{|o_2(g(\bar{x}))|}{|\bar{x} - \bar{c}|} &= \frac{|r(g(\bar{x})) \cdot (g(\bar{x}) - g(\bar{c}))|}{|\bar{x} - \bar{c}|} \\ &= |r(g(\bar{x}))| \cdot \frac{|g(\bar{x}) - g(\bar{c})|}{|\bar{x} - \bar{c}|} = |r(g(\bar{x}))| \cdot \frac{|g'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o_1(\bar{x})|}{|\bar{x} - \bar{c}|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |r(g(\bar{x}))| \cdot \left(\frac{|g'(\bar{c})| \cdot |\bar{x} - \bar{c}|}{|\bar{x} - \bar{c}|} + \frac{|o_1(\bar{x})|}{|\bar{x} - \bar{c}|} \right) \\
&= \underbrace{|r(g(\bar{x}))|}_{\xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0} \cdot \left(\underbrace{|g'(\bar{c})|}_{\text{konstant}} + \underbrace{\frac{|o_1(\bar{x})|}{|\bar{x} - \bar{c}|}}_{\xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0} \right) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0.
\end{aligned}$$

Damit ist $f \circ g$ in $U(\bar{c})$ durch

$$t(\bar{x}) := (f \circ g)(\bar{c}) + \left(\underbrace{f'(g(\bar{c}))}_{\in \mathbf{R}} \cdot \underbrace{g'(\bar{c})}_{\in \mathbf{R}^n} \right) \cdot (\bar{x} - \bar{c})$$

linear approximiert, folglich ist

$$(f \circ g)'(\bar{c}) = f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c}). \quad \square$$

Satz 8.8 (Kettenregel)

8/1/32

Es sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ (also $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$).

Ist g in \bar{c} und f in $g(\bar{c})$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ in \bar{c} differenzierbar, und es ist $(f \circ g)'(\bar{c}) = f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c})$.

(Das Produkt der „inneren“ und der „äußeren“ Ableitung ist ein Produkt von Matrizen.)

Beweis. Die grundlegende Beweisidee ist die gleiche wie im vorhergehenden Satz. Da der technische Aufwand jedoch wesentlich größer ist, kann hier nur auf die Literatur verwiesen werden. (vgl. z.B. Literaturangabe [4], Teil II, Seite 217) \square

8/1/33

Literaturhinweise

[4] Endl, K. und W. Luh: Analysis I u. II. Eine integrierte Darstellung. Aula-Verlag, Wiesbaden.

11/1/4