

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Beispiele.

1. Es sei $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

5/2/11/1

f ist in $a = 1$ nicht definiert (also auch nicht stetig), aber f besitzt in $a = 1$ einen Grenzwert, nämlich $c = 2$. Dazu betrachten wir für $x \neq 1$

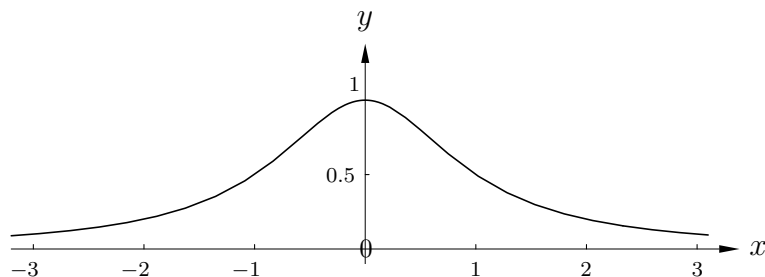
$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = \left| \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} - 2 \right| \\ &= |(x + 1) - 2| = |x - 1| := (\star). \end{aligned}$$

Ist $\varepsilon > 0$ und wählt man $\delta = \varepsilon$, dann erhält man für $|x - 1| < \delta$:
 $|f(x) - 2| = |x - 1| = (\star) < \varepsilon$.

2. Sei $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

5/2/11/2

Behauptung: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$



Sei $\varepsilon > 0$ und $x \geq 1$. Dann gilt

Abb. 5.14

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x^2 + 1} - 0 \right| = \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x} := (\star).$$

Für alle $x > \frac{1}{\varepsilon}$ ist $|f(x) - 0| \leq (\star) = \frac{1}{x} < \varepsilon$.