

## Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Definition.** (*Nullfolge*)

3/1/7

Eine Folge  $(a_n)$  heißt *Nullfolge*

$\stackrel{\text{Df}}{=} (a_n)$  konvergiert gegen 0.

**Definition.** (*monoton wachsend bzw. monoton fallend*)

3/1/31

Sei  $(a_n)$  eine Folge von reellen Zahlen.

(1)  $(a_n)$  ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*)

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } n \text{ gilt: } a_n \leq a_{n+1} \text{ (bzw. } a_{n+1} \leq a_n \text{).}$

(2)  $(a_n)$  ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*)

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } n \text{ gilt: } a_n < a_{n+1} \text{ (bzw. } a_{n+1} < a_n \text{).}$

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.1 Konvergenz von Reihen

**Beweis.** Es sei o.B.d.A.  $a_0 > 0$  (anderenfalls betrachten wir  $a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i$  und  $a_1 > 0$ ).

4/1/27

Weiterhin sei  $|a_i| = \alpha_i$  ( $> 0$ ). Dann ist  $\lim \alpha_i = 0$  und  $\sum a_i = \sum (-1)^i \cdot \alpha_i$ .

Folglich gilt:

$$\begin{aligned} |S_{n+k} - S_n| &= \left| (-1)^{n+1} \alpha_{n+1} + \dots + (-1)^{n+k} \cdot \alpha_{n+k} \right| \\ &= \left| (-1)^{n+1} (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} - \alpha_{n+4} \pm \dots + (-1)^{k-1} \alpha_{n+k}) \right| \\ &= \underbrace{\left| (-1)^{n+1} \right|}_{=1} \cdot \left| \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} - \alpha_{n+4} \pm \dots + (-1)^{k-1} \alpha_{n+k} \right| \\ &= \left| \underbrace{\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}} + \underbrace{\alpha_{n+3} - \alpha_{n+4}} \pm \dots + (-1)^{k-1} \alpha_{n+k} \right| := (\star) \end{aligned}$$

In Abhängigkeit von  $k$  ist die Anzahl der Summanden  $\alpha_i$  in  $(\star)$  gerade bzw. ungerade. Nach Voraussetzung ist die Folge  $(\alpha_i)$  monoton fallend, also  $\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} \geq 0, \dots$ . Ist  $k$  gerade, dann kann man die Summanden in  $(\star)$  paarweise zusammenfassen, und es ist

$$(\star\star) := (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + (\alpha_{n+3} - \alpha_{n+4}) + \dots + (\alpha_{n+k-1} - \alpha_{n+k}) \geq 0.$$

Ist  $k$  ungerade, dann bleibt bei der paarweisen Zusammenfassung  $\alpha_{n+k}$  übrig, aber  $\alpha_{n+k}$  ist offensichtlich nicht negativ. Folglich ist auch in diesem Fall  $(\star\star) \geq 0$ .

Andererseits ist

$$(\star\star) = \alpha_{n+1} - \underbrace{(\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3})}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(\quad)}_{\geq 0} \leq \alpha_{n+1}.$$

Insgesamt gilt also

$$0 \leq (\star\star) \leq \alpha_{n+1} \quad \text{und damit} \quad |S_{n+k} - S_n| = |(\star\star)| \leq \alpha_{n+1}.$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wegen  $\alpha_n \rightarrow 0$  gibt es ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$ :  
 $|S_{n+k} - S_n| \leq \alpha_{n+1} < \varepsilon. \implies (S_n) = \sum a_i$  ist konvergent.  $\square$

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.3 Elementare Funktionen

**Definition.**  $(\cos, \sin)$

5/3/45

$$\cos x \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

**Bemerkung.** Die Eigenschaften (3) – (6) im Satz 5.16 heißen auch *Additionstheoreme* von  $\sin$  und  $\cos$ . 5/3/49

Im folgenden wird die Zahl  $\pi$  definiert. Es genügt offensichtlich  $\frac{\pi}{2}$  festzulegen, und dies wird sich als kleinste positive Nullstelle von  $\cos$  erweisen. Dazu müssen wir zeigen, daß  $\cos$  überhaupt eine kleinste positive Nullstelle besitzt. Hierzu benötigen wir einige Lemmata.

**Lemma 1.**  $\cos 2 < 0$ .

**Beweis.** Es ist

5/3/50

$$\begin{aligned} \cos 2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4^n}{(2n)!} \\ &= \underbrace{1 - 2 + \frac{4^2}{4!}}_{=-\frac{1}{3} < 1} + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4^n}{(2n)!}}_{(\star)}. \end{aligned}$$

( $\star$ ) ist eine alternierende Reihe; das erste Glied (für  $n = 3$ ) ist negativ und  $\left(\frac{4^n}{(2n)!}\right)$  ist eine monoton fallende Nullfolge. Folglich ist die Reihe konvergent, und ihr Wert (vgl. Beweis des Leibniz-Kriteriums) ist negativ. Insgesamt gilt damit  $\cos 2 < 0$ .  $\square$