

## Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Satz 3.10** (*Eigenschaften konvergenter Folgen*)

3/1/43

Es seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente Folgen und  $c, d$  seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1)  $(c \cdot a_n)$  ist konvergent und  $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$ .
- (2)  $(a_n + b_n)$  ist konvergent und  $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ .
- (3)  $(a_n \cdot b_n)$  ist konvergent und  $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$ .
- (4) Sind alle  $b_n \neq 0$  und ist  $\lim b_n \neq 0$ , dann ist  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  konvergent und  

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}.$$
- (4') Sind alle  $b_n \neq 0$  und ist  $\lim b_n \neq 0$ , dann ist  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  konvergent  
und  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$
- (5)  $(|a_n|)$  ist konvergent und  $\lim |a_n| = |\lim a_n|.$
- (6) Ist  $a_n \leq b_n$  für jedes  $n$ , dann ist  $\lim a_n \leq \lim b_n$ .  
Ist insbesondere  $a_n \leq d$  bzw.  $d \leq b_n$  für jedes  $n$ , dann ist  $\lim a_n \leq d$   
bzw.  $d \leq \lim b_n$ .

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Wie für reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen vereinbaren wir, daß eine Funktion  $f$  in einer Menge  $M \subseteq \mathbb{M}_1$  stetig ist, wenn sie in jedem Punkt der Menge stetig ist.

6/2/3

Ist z.B.  $\mathbb{M}_1 = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{M}_2 = \mathbb{R}$  (mit dem euklidischen Abstand als Metrik) und ist  $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ , dann erhält man:

$f$  ist in  $\bar{a}$  stetig  $\iff \bar{a} \in D(f)$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $\bar{x} \in D(f)$  gilt: Wenn  $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$ , so  $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon$ .

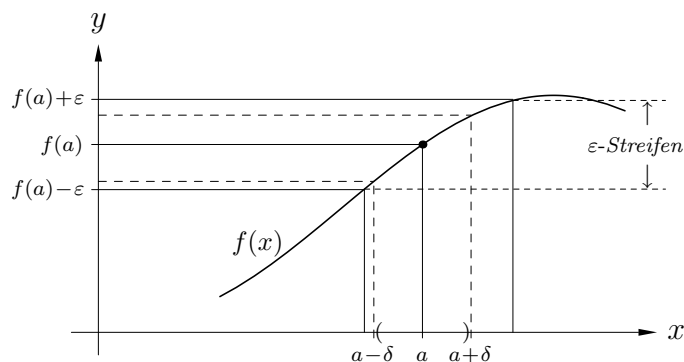


Abb. 6.8 a Für ein vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß  $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$ ; d.h., die Funktionswerte von  $f$ , eingeschränkt auf  $U_\delta(a)$ , liegen alle in dem  $\varepsilon$ -Streifen um  $f(a)$ .

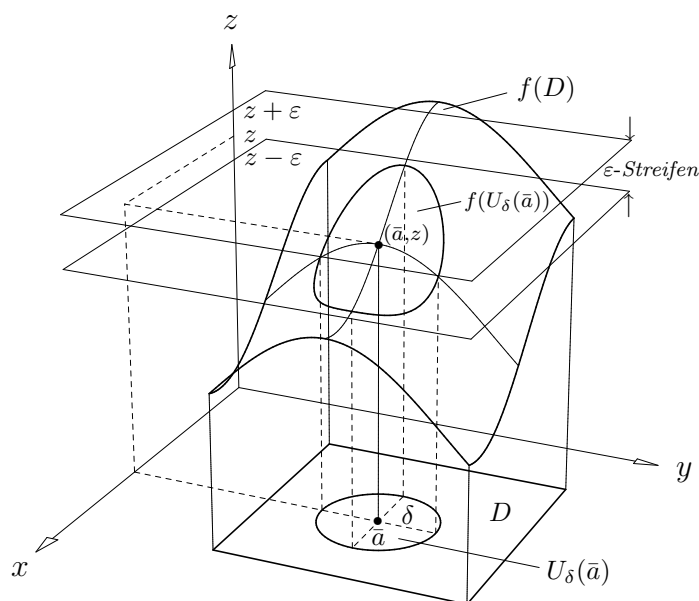


Abb. 6.8 b Ähnlich wie in der Abb. 6.6 betrachten wir eine Funktion  $f$ , die in dem Rechteckbereich  $D$  definiert ist. Weiterhin sei  $\bar{a} \in D$ ,  $f(\bar{a}) = z$  und  $\varepsilon > 0$ . Analog wie in der Abb. 6.8 a liegen die Funktionswerte von  $f$ , eingeschränkt auf  $U_\delta(\bar{a})$ , zwischen den beiden Ebenen, die parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene sind und durch die Punkte  $(0, 0, z - \varepsilon)$  bzw.  $(0, 0, z + \varepsilon)$  verlaufen.

### Satz 6.10 (Folgenstetigkeit)

6/2/13

Sei  $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$  und  $a \in D(f)$ .

$f$  ist in  $a$  stetig gdw für jede Folge  $(x_i)$  in  $\mathbb{M}_1$  mit  $x_i \in D(f)$  gilt:

Wenn  $x_i \rightarrow a_i$ , so  $f(x_i) \rightarrow f(a)$ .

## 6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Satz 6.13** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\bar{a} \in \mathbb{R}$ .

6/3/11

Ist  $f$  in  $\bar{a}$  stetig und  $f(\bar{a}) > 0$  (bzw.  $f(\bar{a}) < 0$ ), dann gibt es eine Umgebung  $U(\bar{a})$ , so daß  $f(\bar{x}) > 0$  (bzw.  $f(\bar{x}) < 0$ ) für alle  $\bar{x} \in U(\bar{a}) \cap D(f)$ .

**Beweis.** Sei  $f(\bar{a}) > 0$  (den Fall  $f(\bar{a}) < 0$  beweist man analog).

6/3/12

Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es für jede Umgebung  $U(\bar{a})$  ein  $\bar{x} \in U(\bar{a}) \cap D(f)$ , so daß  $f(\bar{x}) \leq 0$ .

Für die Umgebungen  $U(\bar{a}) := U_{\varepsilon_n}(\bar{a})$  mit  $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , existieren dann Elemente  $\bar{x}_n \in U_{\varepsilon_n}(\bar{a}) \cap D(f)$ , so daß  $f(\bar{x}_n) \leq 0$ .

Es entsteht also eine Folge  $(\bar{x}_n)$  mit  $\bar{x}_n \rightarrow \bar{a}$ . Nach Voraussetzung ist  $f$  in  $\bar{a}$  stetig, folglich existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_n) = f(\bar{a})$ . Wegen  $f(\bar{x}_n) \leq 0$  erhält man aus Satz 3.10 (6)

sofort  $f(\bar{a}) = \lim f(\bar{x}_n) \leq 0$ . ~~W~~! (Siehe hierzu auch die Abbildungen 6.8 a und 6.8 b)  $\square$