

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Das unbestimmte Integral von einer Funktion – die eine Stammfunktion besitzt – ist also eine ganze Klasse von Funktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante unterscheiden. Will man mit diesen Klassen „rechnen“, dann kann man dies repräsentantenweise tun und jeweils entsprechende Konstanten addieren. 9/1/7

Zusammenstellung von Grundintegralen

$$\begin{aligned}
 \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} & \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \\
 \int \sin x dx &= -\cos x + c & \quad \int e^x dx &= e^x + c \\
 \int \cos x dx &= \sin x + c & \quad \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c \\
 \int \frac{dx}{\cos x} &= \tan x + c & \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + c \\
 \int \frac{dx}{\sin x} &= -\cot x + c & \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + c \\
 \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + c & \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c, \quad |x| > 1 \\
 \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + c, & |x| < 1 & \quad \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|.
 \end{aligned}$$

Diese Grundintegrale werden alle durch Differentiation bewiesen.

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.20 (partielle Integration)

9/5/17

Sind f und g in $[a, b]$ stetig differenzierbar, dann ist

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Satz 9.21 (Substitutionsregel)

9/5/19

Ist f in $[a, b]$ stetig, g in $[\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar und $g([\alpha, \beta]) = [a, b]$, $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$, dann gilt

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{a=g(\alpha)}^{b=g(\beta)} f(t) dt.$$

Ist außerdem g injektiv, also $\alpha = g^{-1}(\alpha)$ und $\beta = g^{-1}(b)$, dann ist

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x) dx.$$

9.7 Uneigentliche Integrale

Definition. (*uneigentliches Integral über unendlichen Intervallen*)

9/7/1

Es sei a eine reelle Zahl, f sei für alle $x \geq a$ definiert und in $[a, x]$ integrierbar,

und es sei $F(x) := \int_a^x f(t) dt$.

f ist in $[a, \infty) = \{x : a \leq x\}$ *uneigentlich integrierbar*

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.

Der Limes heißt dann *uneigentliches Integral* von f in $[a, \infty)$.

Bez.: $\int_a^\infty f(t) dt$

Ist f in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann heißt $\int_a^\infty f(t) dt$ *konvergent*, anderenfalls *divergent*.

Ist $|f|$ in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann heißt $\int_a^\infty f(t) dt$ *absolut konvergent*.

Analog definiert man das uneigentliche Integral von f in $(-\infty, a]$. Hierbei sei f für jedes $x \leq a$ definiert und in $[x, a]$ integrierbar.

Man betrachtet dann $F(x) := \int_x^a f(t) dt$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

Definition. f ist in $(-\infty, \infty)$ *uneigentlich integrierbar*

9/7/2

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so daß f in $(-\infty, a]$ und in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar ist.

$\int_{-\infty}^\infty f(t) dt \stackrel{\overline{\text{Df}}}{=} \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^\infty f(t) dt$ heißt *uneigentliches Integral* von f in $(-\infty, \infty)$.

Definition. (*uneigentliche Integrale über unbeschränkten Funktionen*)

9/7/5

Es sei $a < b$ und es gelte eine der Bedingungen:

- (1) f ist in $[a, b)$ definiert und für jedes $x \in [a, b)$ in $[a, x]$ integrierbar.
- (2) f ist in $(a, b]$ definiert und für jedes $x \in (a, b]$ in $[x, b]$ integrierbar.
- (3) $a < c < b$, und f ist für jedes $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $a \leq x_1 < c < x_2 \leq b$ in $[a, x_1]$ und in $[x_2, b]$ integrierbar.

f ist in $[a, b]$ *uneigentlich integrierbar*

- \equiv Def (1) $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f(t) dt$ existiert bzw.
- (2) $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \int_x^b f(t) dt$ existiert bzw.
- (3) $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \int_a^x f(t) dt$ und $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \int_x^b f(t) dt$ existieren.

Diese Limites heißen – falls sie existieren – *uneigentliche Integrale* von f in $[a, b]$, und $\int_a^b f(t) dt$ heißt dann *konvergent*, anderenfalls *divergent*.

Übungsaufgaben

18. Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz:

9/10/18

- | | |
|---|--|
| (a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},$ | (e) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1},$ |
| (b) $\int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}},$ | (f) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x + 1},$ |
| (c) $\int_0^\pi \tan x dx,$ | (g) $\int_0^\infty \sin 3x dx,$ |
| (d) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2},$ | (h) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx.$ |