

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (Konvergenz von Reihen)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$ konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

Definition. (Divergenz von Reihen)

4/1/2

$\sum a_i$ ist divergent $\stackrel{\text{Df}}{=} \sum a_i$ ist nicht konvergent.

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Definition. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe.

4/2/1

$\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ entsteht aus $\sum a_n$ durch das Setzen von Klammern

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es gibt eine streng monoton wachsende Folge } (n_i)_{i=0,1,2,\dots}$
von natürlichen Zahlen, so daß gilt:

$$b_0 = a_0 + \dots + a_{n_0},$$

$$b_1 = a_{n_0+1} + \dots + a_{n_1},$$

\vdots

$$b_{i+1} = a_{n_i+1} + \dots + a_{n_{i+1}},$$

\vdots

Bemerkung. In einer beliebigen Reihe dürfen Klammern nicht immer gesetzt oder weggelassen werden, ohne das Konvergenzverhalten zu verändern.

4/2/5

Beispiel. $\sum_{i=0}^{\infty} 0 = 0 + 0 + 0 + \dots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$ ist konvergent.

4/2/6

Weglassen der Klammern in der letzten Reihe liefert $1-1+1-1 \pm \dots$, also eine divergente Reihe.

Geht man von der divergenten Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i = 1-1+1-1 \pm \dots$ aus, dann dürfen hier nicht beliebig Klammern gesetzt werden, denn z.B. $(1-1) + (1-1) + \dots$ macht aus der ursprünglich divergenten Reihe eine konvergente.