

Kapitel 7**Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen****7.3 Anwendungen der Differentialrechnung;
Grenzwerte für Quotienten von Funktionen****Satz 7.12** (Regel von de l'Hospital für „ $\frac{0}{0}$ “)**7/3/0***Voraussetzung:*

- (1) Sei $a < b$ und seien f, g in (a, b) differenzierbar und in a (rechtsseitig) stetig.
- (2) Sei $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Behauptung:

Existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Korollar 1.**7/3/2***Voraussetzung:*

- (1) Sei $a > 0$ und f, g seien in (a, ∞) differenzierbar.
- (2) Sei $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, \infty)$.

Behauptung:

Existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweisidee. Es werden Hilfsfunktionen φ und ψ definiert:**7/3/3**

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x}), & \text{für } 0 < x < \frac{1}{a}, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} g(\frac{1}{x}), & \text{für } 0 < x < \frac{1}{a}, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Man überlegt sich leicht, daß φ und ψ in $(0, \frac{1}{a})$ differenzierbar und in 0 (rechtsseitig) stetig sind. Dann läßt sich die Regel von de l'Hospital auf φ, ψ an der Stelle 0 anwenden. Daraus erhält man die Behauptung. \square