

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

**Satz 2.2** Für alle reellen Zahlen  $a, b, c$  gilt:

2/2/3

- (0)  $0 < 1$ .
- (1) *nicht*  $(a < a)$ . (Irreflexivität)
- (2) Wenn  $a < b$  und  $b < c$ , so  $a < c$ . (Transitivität)
- (3) Für jedes  $a, b$  gilt:  $a < b$  oder  $a = b$  oder  $b < a$ . (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen:  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$ . (Trichotomie)
- (4) Wenn  $a < b$ , so  $a + c < b + c$ . (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $a \cdot c < b \cdot c$ ,  
Wenn  $a < b$  und  $c < 0$ , so  $a \cdot c > b \cdot c$ .
- (6) Wenn  $a \leq b$  und  $c \leq d$ , so  $a + c \leq b + d$ .  
Ist zusätzlich  $a < b$  oder  $c < d$ , so ist  $a + c < b + d$ .
- (7) Es gilt:  $a < b \iff -b < -a$ .
- (8) Wenn  $0 < a$  und  $0 < b$ , so  $0 < a \cdot b$ ,  
Wenn  $0 < a$  und  $b < 0$ , so  $a \cdot b < 0$ ,  
Wenn  $a < 0$  und  $b < 0$ , so  $0 < a \cdot b$ .
- (9) Wenn  $0 < a$ , so  $0 < \frac{1}{a}$ ,  
Wenn  $a < 0$ , so  $\frac{1}{a} < 0$ .
- (10) Wenn  $0 < a < b$ , so  $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ,  
Wenn  $a < 0 < b$ , so  $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$ ,  
Wenn  $a < b < 0$ , so  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ .
- (11) Wenn  $0 < a$ , dann gibt es natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ , so daß  $0 < a < m$  und  $0 < \frac{1}{n} < a$ .
- (12) Wenn  $a < b$ , so  $a < \frac{a+b}{2} < b$ .

**Korollar.** Sind  $a, b \in \mathbb{R}$  und ist  $1 < a$ , dann existiert eine natürliche Zahl  $m$ , so daß  $b < a^m$ . 2/2/8/4

## Kapitel 3

## Folgen von reellen Zahlen

### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Definition.** (*Nullfolge*)

3/1/7

Eine Folge  $(a_n)$  heißt *Nullfolge*

$\stackrel{\text{Df}}{=} (a_n)$  konvergiert gegen 0.

**Beispiele.**

2. Es sei  $|a| < 1$  und  $(a_n) = (a^n)$ .

3/1/8/2

Um nachzuweisen, daß  $(a^n)$  eine Nullfolge ist, g.z.z.:

Wenn  $\varepsilon > 0$ , dann existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  :  $|a^n - 0| < \varepsilon$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Für  $a = 0$  ist die Behauptung trivial.

Es sei jetzt  $a \neq 0$ . Wegen  $|a| < 1$  ist  $\frac{1}{|a|} > 1$ .

Nach dem Korollar zur Bernoullischen Ungleichung existiert für  $\frac{1}{\varepsilon}$  eine natürliche Zahl

$n_0$ , so daß  $\left(\frac{1}{|a|}\right)^{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$ . Folglich ist  $\frac{1}{|a_0|^{n_0}} > \frac{1}{\varepsilon}$ , also  $|a|^{n_0} < \varepsilon$ . Für  $n \geq n_0$  gilt

damit  $|a^n - 0| = |a|^n \leq |a|^{n_0} < \varepsilon$ .