

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. (*inverse Funktion*)

5/1/3

Es sei f injektiv.

g ist Umkehrfunktion oder *inverse Funktion* von f

$\stackrel{\text{Df}}{=} (a, b) \in g \quad \text{gdw} \quad (b, a) \in f, \quad (\text{d.h., } g(a) = b \iff f(b) = a.)$

Bez.: $g = f^{-1}$.

Definition. f ist eine *reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen*

5/1/7

$\stackrel{\text{Df}}{=} f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $b \in \mathbb{R}$, so daß $(a, b) \in f$.

Bez.: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

5.2 Stetigkeit

Satz 5.8 Ist f in $[a, b]$ injektiv und stetig, dann ist f^{-1} in $[\alpha, \beta]$ stetig, wobei $\alpha = \min\{f(a), f(b)\}$ und $\beta = \max\{f(a), f(b)\}$.

5/2/27

5.3 Elementare Funktionen

Bemerkung. Ist $f(x) = x^n$, $x \geq 0$, dann ist offenbar $\sqrt[n]{x}$ die Umkehrfunktion von f . Nach Satz 5.8 ist f^{-1} in $[0, \infty)$ stetig. Für ungerade n ist f in \mathbb{R} injektiv und somit die Umkehrfunktion $\sqrt[n]{x}$ in ganz \mathbb{R} definiert und stetig. (vgl. auch Abb. 5.17). Für gerade n ist f in $(-\infty, 0]$ definiert und injektiv, folglich besitzt f in $(-\infty, 0]$ ebenfalls eine Umkehrfunktion $-\sqrt[n]{x}$ (vgl. Abb. 5.16).

5/3/14

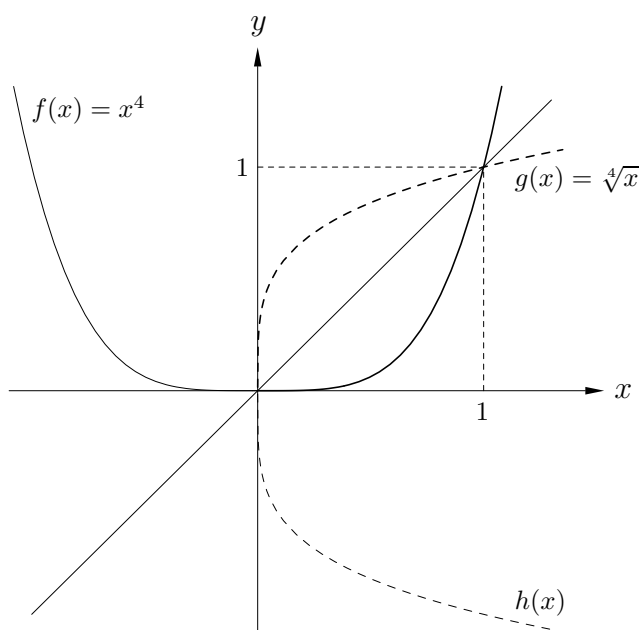


Abb. 5.16 Für gerade n verlaufen die Graphen der Funktionen $f(x) = x^n$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ und $h(x) = -\sqrt[n]{x}$ ähnlich wie die von f , g und h in dieser Abbildung und in Abb. 5.6. (Dort wird der Spezialfall $n = 2$ und hier der Fall $n = 4$ dargestellt.) g ist die Umkehrfunktion von f für $x \geq 0$ und h die von f für $x \leq 0$.

Die nächste Abbildung zeigt den analogen Fall für ungerade n . Hierfür existiert die inverse Funktion im gesamten Definitionsbereich von f .

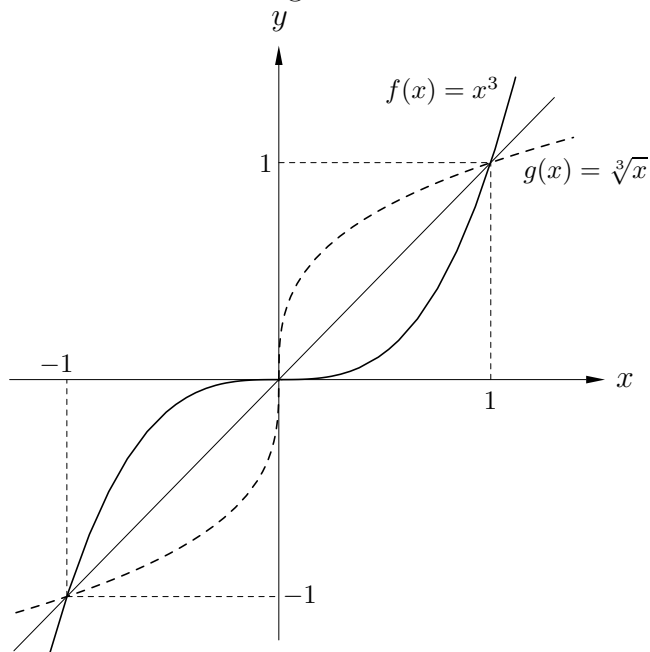


Abb. 5.17 Für ungerade n verlaufen die Graphen der Funktionen $f(x) = x^n$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ ähnlich wie die von f und g in dieser Abbildung. (Hier wird der Spezialfall $n = 3$ dargestellt.) Da f im gesamten Definitionsbereich $(-\infty, \infty)$ injektiv ist, besitzt f dort auch eine Umkehrfunktion, nämlich g (Graph von g dick gestrichelt).

(3) Elementare transzendente Funktionen

Neben den algebraischen Funktionen gibt es noch weitere, nämlich die sog. transzendenten Funktionen.