

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient*)

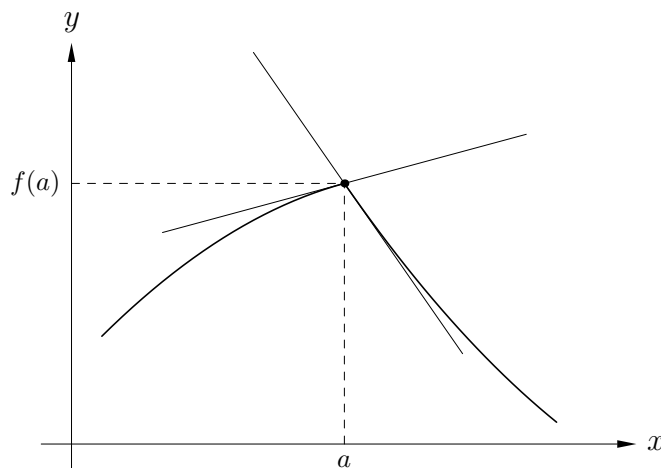
7/1/3

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *differenzierbar*

$\overline{\text{Def}}$ f ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in a .

$$\text{Bez. } f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$$



7/1/6

Abb. 7.2 Die dargestellte Funktion besitzt an der Stelle a eine linksseitige und eine rechtsseitige Ableitung. Da diese beiden Ableitungen jedoch voneinander verschieden sind, ist die Funktion in a nicht differenzierbar.

Bemerkung. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Wenn an der durch f gegebenen Kurve eine *Tangente* im Punkt $(a, f(a))$ existiert (dies wird der Fall sein, wenn f in a differenzierbar ist), dann ist der Anstieg der Tangente an der Stelle a durch $f'(a)$ gegeben.

Wir wollen jetzt die Gleichung der Tangente bestimmen. Zunächst gehen wir von der Geradengleichung $y := t(x) = c \cdot x + d$ aus und berechnen c und d .

Der Anstieg der Tangente ist durch $c = f'(a)$ gegeben. Die Tangente soll durch den Punkt $(a, f(a))$ verlaufen. Folglich ist

$$t(a) = f'(a) \cdot a + d = f(a) \implies$$

$$d = f(a) - f'(a) \cdot a \implies$$

$$t(x) = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a = f(a) + f'(a)(x - a).$$