

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Durchschnitt und Vereinigung von Mengen

1/0/4

$$M \cap N \stackrel{\text{Df}}{=} \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}. \quad (\text{Durchschnitt; vgl. Abb. 1.1})$$

$$M \cup N \stackrel{\text{Df}}{=} \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}. \quad (\text{Vereinigung; vgl. Abb. 1.2})$$

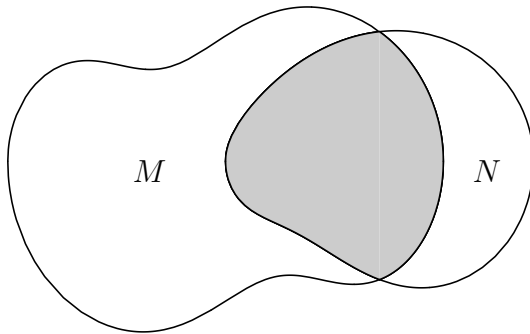


Abb. 1.1 Die schattierte Fläche symbolisiert den Durchschnitt der Mengen.

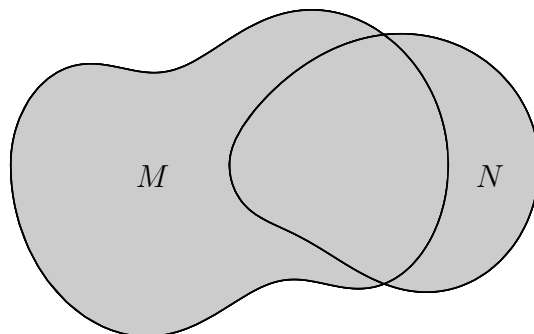


Abb. 1.2 Die schattierte Fläche symbolisiert die Vereinigung der Mengen.

Definition. (*Durchschnitt und Vereinigung von Mengensystemen*)

1/0/10

(1) $\cap M$ heißt *Durchschnitt von M*

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \cap M = \{x : \text{für jedes } X \in M \text{ ist } x \in X\}.$$

$$\text{Bez.: } \cap M = \bigcap_{X \in M} X$$

(2) $\cup M$ heißt *Vereinigung von M*

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \cup M = \{x : \text{es existiert ein } X \in M, \text{ so daß } x \in X\}.$$

$$\text{Bez.: } \cup M = \bigcup_{X \in M} X$$

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*metrischer Raum*)

6/1/10

Es sei \mathbb{M} eine nicht-leere Menge und $\varrho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (d.h., für $a, b \in \mathbb{M}$ ist $\varrho(a, b) \in \mathbb{R}$), so daß für alle $a, b, c \in \mathbb{M}$ gilt:

- (1) $\varrho(a, b) \geq 0$, und $\varrho(a, b) = 0 \iff a = b$.
- (2) $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$. (Symmetrie)

(3) $\varrho(a, b) \leq \varrho(a, c) + \varrho(c, b)$. (Dreiecksungleichung)

Dann ist ϱ eine *Metrik* oder *Abstandsfunktion* in \mathbb{M} , und das Paar (\mathbb{M}, ϱ) heißt *metrischer Raum*.

Definition. (*offene Menge*)

6/1/14

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$.

M heißt *offen* (in \mathbb{M})

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } a \in M \text{ gibt es ein } \varepsilon > 0, \text{ so daß } U_\varepsilon(a) \subseteq M.$

(Mit jedem $a \in M$ gehört noch eine ganze ε -Umgebung zu M , vgl. auch Abb. 6.2.)

Definition. (*abgeschlossene Menge*)

6/1/26

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{M}$ ist *abgeschlossen*

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Jeder Häufungspunkt von } M \text{ gehört zu } M.$

Satz 6.6 *In metrischen Räumen gilt:*

6/1/29

- (1) *Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.*
- (2) *Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.*
- (3) *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*
- (4) *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*