

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$

**Definition.** (*metrischer Raum*)

6/1/10

Es sei  $\mathbb{M}$  eine nicht-leere Menge und  $\varrho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  (d.h., für  $a, b \in \mathbb{M}$  ist  $\varrho(a, b) \in \mathbb{R}$ ), so daß für alle  $a, b, c \in \mathbb{M}$  gilt:

- (1)  $\varrho(a, b) \geq 0$ , und  $\varrho(a, b) = 0 \iff a = b$ .
- (2)  $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$ . (Symmetrie)
- (3)  $\varrho(a, b) \leq \varrho(a, c) + \varrho(c, b)$ . (Dreiecksungleichung)

Dann ist  $\varrho$  eine *Metrik* oder *Abstandsfunktion* in  $\mathbb{M}$ , und das Paar  $(\mathbb{M}, \varrho)$  heißt *metrischer Raum*.

**Definition.** (*Konvergenz in metrischen Räumen*)

6/1/35

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{M}$  und  $a \in \mathbb{M}$ .

$(x_n)$  *konvergiert gegen*  $a$  (in  $\mathbb{M}$ )

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  gilt:  $\varrho(x_n, a) < \varepsilon$   
(d.h., für fast alle  $n$  ist der Abstand zwischen  $x_n$  und  $a$  kleiner als  $\varepsilon$ , oder in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  liegen fast alle Folgenglieder).

**Bez.:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  oder kurz  $x_n \rightarrow a$ .

Damit ist der Begriff der Konvergenz in metrischen Räumen definiert. Betrachtet man also einen speziellen metrischen Raum, etwa  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{R}^n$  dann muß man dort die Konvergenz nicht neu definieren.

6/1/36

Es sei jetzt  $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$  und  $(\bar{x}_i)$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n$ , also  $\bar{x}_i = (x_{1i}, \dots, x_{ni})$  ( $n$  fixiert und  $i = 0, 1, 2, \dots$ ), und es sei  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ .