

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Definition. (*Stammfunktion*)

9/1/1

Es seien f, F in einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ definiert.

F ist eine *Stammfunktion* von f in M

$\overline{\text{Def}}$ F ist in M differenzierbar, und es gilt $F'(x) = f(x)$ für jedes $x \in M$.

Das unbestimmte Integral von einer Funktion – die eine Stammfunktion besitzt – ist also eine ganze Klasse von Funktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante unterscheiden. Will man mit diesen Klassen „rechnen“, dann kann man dies repräsentantenweise tun und jeweils entsprechende Konstanten addieren.

9/1/7

Zusammenstellung von Grundintegralen

$$\begin{array}{ll}
 \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\
 \int \sin x dx = -\cos x + c & \\
 \int \cos x dx = \sin x + c & \\
 \int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + c & \\
 \int \frac{dx}{\sin x} = -\cot x + c & \\
 \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c & \\
 \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + c, & |x| < 1 \\
 \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c & \\
 \int e^x dx = e^x + c & \\
 \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c & \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c & \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c & \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c, & |x| > 1 \\
 \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|. &
 \end{array}$$

Diese Grundintegrale werden alle durch Differentiation bewiesen.

Beispiel. Es gilt $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$, wobei c eine beliebige Konstante ist.

9/1/8

Es genügt zu zeigen, daß $F(x) = \ln |x| + c$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $x \neq 0$ ist.

Für $x < 0$ ist $|x| = -x$, also $\ln |x| = \ln(-x)$ und schließlich

$$F'(x) = (\ln(-x) + c)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Für $x > 0$ ist $|x| = x$ und damit $F'(x) = (\ln |x| + c)' = \frac{1}{x}$.