

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.2 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

2/2/3

- (0) $0 < 1$.
- (1) *nicht* $(a < a)$. (Irreflexivität)
- (2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$. (Transitivität)
- (3) Für jedes a, b gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$. (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Trichotomie)
- (4) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$,
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.
- (6) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, so $a + c \leq b + d$.
Ist zusätzlich $a < b$ oder $c < d$, so ist $a + c < b + d$.
- (7) Es gilt: $a < b \iff -b < -a$.
- (8) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$,
Wenn $0 < a$ und $b < 0$, so $a \cdot b < 0$,
Wenn $a < 0$ und $b < 0$, so $0 < a \cdot b$.
- (9) Wenn $0 < a$, so $0 < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0$, so $\frac{1}{a} < 0$.
- (10) Wenn $0 < a < b$, so $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0 < b$, so $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$,
Wenn $a < b < 0$, so $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.
- (11) Wenn $0 < a$, dann gibt es natürliche Zahlen m und n , so daß $0 < a < m$ und $0 < \frac{1}{n} < a$.
- (12) Wenn $a < b$, so $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Satz 2.3 Ist $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$ und $m \geq 2$, dann gibt es genau ein $b > 0$, so daß $b^m = a$.

2/2/7

Bez.: $b = \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$; (m -te Wurzel aus a)

Beweis. Um zu zeigen, daß es genau ein solches b gibt, hat man einerseits die Existenz und andererseits die Eindeutigkeit nachzuweisen. Wir beginnen mit dem einfacheren Eindeutigkeitsbeweis. 2/2/8/1

1. Eindeutigkeit.

Angenommen, es existieren verschiedene $b_1, b_2 > 0$ mit $b_1^m = a = b_2^m$.

Sei o.B.d.A. $b_1 < b_2$. Dann zeigt man leicht (mit Hilfe von Satz 2.2(5)) induktiv über m , daß $b_1^m < b_2^m$. $\nabla!$

2. Existenz.

Es genügt, den Satz für $a > 1$ zu beweisen.

Ist nämlich $a = 1$, dann leistet $b = 1$ das Verlangte, und

ist $0 < a < 1$, so ist $\frac{1}{a} > 1$. Für $\frac{1}{a}$ existiert nach dem obigen Fall schon ein $c > 0$ mit $c^m = \frac{1}{a}$. Folglich ist $a = \frac{1}{c^m} = \left(\frac{1}{c}\right)^m$.

$b = \frac{1}{c}$ leistet somit das Verlangte.

Es sei nun $a > 1$.

(Zum Beweis wird eine geeignete Intervallschachtelung betrachtet.)

Wir definieren eine Folge $([a_n, b_n])$ von Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \text{und} \quad a_n^m \leq a \leq b_n^m \quad \text{für alle } n.$$

Die Definition erfolgt induktiv über n .

Eine Lösung $b > 0$ für $b^m = a$ und $a > 1$ muß – falls eine solche existiert – in dem Intervall $[1, a]$ liegen.

Denn angenommen, $0 < b < 1$. Dann ist auch $b^m < 1 < a$, also $b^m \neq a$.

Wäre andererseits $a < b$, so wäre auch $1 < a < b < b^m$ und somit wiederum $b^m \neq a$.

Wir brauchen also nur in dem Intervall $[1, a]$ nach einer Lösung zu suchen.

Daher beginnen wir mit $a_0 = 1$, $b_0 = a$.

Dann gilt $a_0^m = 1^m = 1 \leq a \leq a^m = b_0^m$.

Es sei $c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ (der Mittelpunkt des Intervalls $[a_0, b_0]$).

Für c_1 sind zwei Fälle möglich:

(a) $c_1^m \leq a$ oder

(b) $c_1^m > a$.

Entsprechend dieser Fallunterscheidung definieren wir das Intervall $[a_1, b_1]$.

Es sei

$$a_1 = c_1 \quad \text{und} \quad b_1 = b_0, \quad \text{falls} \quad c_1^m \leq a \quad \text{und}$$

$$a_1 = a_0 \quad \text{und} \quad b_1 = c_1, \quad \text{falls} \quad c_1^m > a.$$

Dann gilt offenbar

$$a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \quad \text{und} \quad a_1^m \leq a \leq b_1^m.$$

Die gleichen Überlegungen werden im $(n+1)$ -ten Schritt angewendet. Die Ausführung des ersten Schrittes – wir haben mit dem 0-tem Schritt begonnen – ist natürlich bei dieser induktiven Definition nicht notwendig, da er als Spezialfall des $(n+1)$ -ten Schrittes auftritt. Er wurde hier nur des besseren Verständnisses wegen angegeben.

Für n seien a_n und b_n (nach Induktionsvoraussetzung) schon definiert und zwar mit den geforderten Eigenschaften:

$$a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \quad \text{und} \quad a_n^m \leq a \leq b_n^m.$$

Wir betrachten jetzt $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ (den Mittelpunkt des Intervalls $[a_n, b_n]$).

Für c_{n+1} sind zwei Fälle möglich:

(a) $c_{n+1}^m \leq a$ oder

(b) $c_{n+1}^m > a.$

Entsprechend dieser beiden Fälle definiert man das $(n+1)$ -te Intervall wie folgt:

$$a_{n+1} = c_{n+1} \quad \text{und} \quad b_{n+1} = b_n, \quad \text{falls} \quad c_{n+1}^m \leq a \quad \text{und}$$

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{und} \quad b_{n+1} = c_{n+1}, \quad \text{falls} \quad c_{n+1}^m > a.$$

Damit ist eine Intervallschachtelung mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es ein c , so daß $a_n \leq c \leq b_n$ für jedes n .

Behauptung: $c^m = a$.

Der Beweis hierzu erfolgt indirekt.

Annahme: $c^m \neq a$.

Dann ist $c^m > a$ oder $c^m < a$. Wir betrachten den Fall $c^m > a$, den verbleibenden Fall beweist man völlig analog.

Wegen $c^m > a$ ist $d := c^m - a > 0$.

Es gilt

$$a_n^m \leq a \leq b_n^m \quad \text{und} \quad a_n^m \leq c^m \leq b_n^m.$$

Folglich ist

$$\underbrace{b_n^m}_{\geq c^m} - a_n^m \geq c^m + \underbrace{(-a_n^m)}_{\geq -a} \geq c^m - a = d.$$

Also

$$b_n^m - a_n^m \geq d > 0 \text{ für jedes } n.$$

Es sei jetzt $b_n - a_n = \delta_n$. Dann ist $a_n = b_n - \delta_n = b_n \left(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\right)$ und schließlich

$$b_n^m - a_n^m = b_n^m - b_n^m \left(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\right)^m := (\star).$$

Um diesen letzten Ausdruck weiter umformen zu können, benötigen wir noch einen wichtigen Hilfssatz.

Lemma. (*Bernoullische Ungleichung*)

2/2/8/2

Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$ und ist m eine natürliche Zahl, dann gilt $(1 + a)^m \geq 1 + ma$.

Wir setzen jetzt den begonnenen Beweis des Satzes 2.3 fort.

2/2/8/6

Wegen $a_n > 0$ (denn $1 \leq a_n \leq b_n \leq a$) gilt

$$\delta_n = b_n - a_n < b_n \text{ und somit } 0 < \frac{\delta_n}{b_n} < 1, \text{ also } -1 < -\frac{\delta_n}{b_n}.$$

Mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung erhält man dann

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\right)^m &\geq 1 - m \cdot \frac{\delta_n}{b_n} \implies \\ b_n^m \cdot \left(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\right)^m &\geq b_n^m \cdot \left(1 - m \cdot \frac{\delta_n}{b_n}\right) = b_n^m - m \cdot b_n^{m-1} \cdot \delta_n. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$-b_n^m \cdot \left(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\right)^m \leq -b_n^m + m \cdot b_n^{m-1} \cdot \delta_n.$$

Wegen $\delta_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ (dies ist induktiv über n nachzuweisen) erhält man schließlich aus (\star) und der letzten Ungleichung

$$b_n^m - a_n^m \leq b_n^m - b_n^m + m \cdot \underbrace{b_n^{m-1}}_{\leq b_0^{m-1}} \cdot \delta_n \leq \underbrace{m \cdot b_0^{m-1} \cdot (b_0 - a_0)}_{:= d' > 0} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Damit haben wir $b_n^m - a_n^m \leq d' \cdot \frac{1}{2^n}$.

Wegen $n \leq 2^n$ (dies ist induktiv nachzuweisen) erhält man für $n \geq 1$: $0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ und mit Hilfe des archimedischen Axioms schließlich $d' \cdot \frac{1}{2^n} \leq d' \cdot \frac{1}{n} < d$ für hinreichend große n .

Aus der Annahme $c^m \neq a$ hatten wir aber schon geschlossen, daß $b_n^m - a_n^m \geq d$ für alle n gilt. Dies führt zu einem Widerspruch. Folglich kann die Annahme nicht richtig gewesen sein. Also $c^m = a$. \square