

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Satz 9.5 *Es sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt und $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ seien beliebige Zerlegungen von I . Dann gilt:* 9/2/6

- (1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z})$.
- (2) $(b - a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z})$ und $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in I} f(x)$.
- (3) Ist \mathfrak{z}' eine Verfeinerung von \mathfrak{z} , dann gilt $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z})$.
- (4) Es ist stets $\underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2)$.

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Satz 10.1 *Es sei f in D definiert und beschränkt und $\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\mathfrak{z}}', \bar{\mathfrak{z}}_1, \bar{\mathfrak{z}}_2$ seien beliebige Zerlegungen von D . Dann gilt:* 10/1/3

- (1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.
- (2) $D \cdot \inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ und $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq D \cdot \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x})$.
- (3) Ist $\bar{\mathfrak{z}}'$ eine Verfeinerung von $\bar{\mathfrak{z}}$, dann gilt $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.
- (4) Es ist stets $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_1) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_2)$.

Beweis. Den Beweis führt man völlig analog wie zu Satz 9.5. □

10/1/4
