

# Kapitel 9

## Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

Die Differentialrechnung ist u.a. durch das Tangentenproblem und das Geschwindigkeitsproblem motiviert. Dabei ist also eine Funktion  $f$  – etwa die Funktion des zurückgelegten Weges eines sich bewegenden Massepunktes – gegeben, und die Ableitung  $f'$  der Funktion  $f$  – also die Funktion der Geschwindigkeit des Punktes – ist gesucht.

9/0

In der Praxis entsteht oft die umgekehrte Fragestellung. Z.B. kann die Funktion der Geschwindigkeit gegeben sein, und man sucht die Funktion des Weges. Also gegeben ist eine Funktion  $f$ , gesucht ist eine differenzierbare Funktion  $F$  mit  $F' = f$ . Dies führt uns in gewisser Weise zur Umkehrung des Differenzierens, zum (unbestimmten) Integrieren. Mit dieser Fragestellung verwandt, obwohl auf dem ersten Blick nicht zu erkennen, ist das sog. *Flächenproblem*:

Gegeben sei eine in einem abgeschlossenen Intervall  $I = [a, b]$  mit  $a < b$  definierte und nicht negative Funktion  $f$ . Es erhebt sich die Frage, ob der ebenen Punktmenge

$$M = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

in „vernünftiger Weise“ ein Flächeninhalt zugeschrieben werden kann und wie dieser gegebenenfalls berechnet werden könnte? (siehe auch Abb. 9.1 und 9.2)

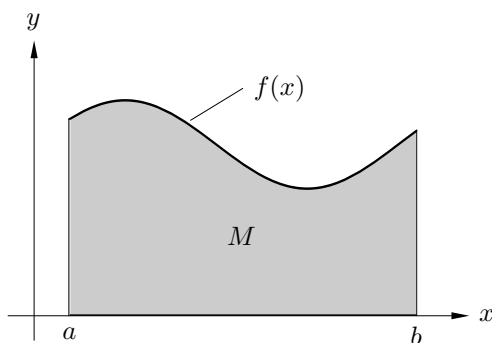


Abb. 9.1 Die schattierte Fläche symbolisiert den vermeintlichen Flächeninhalt der oben definierten Punktmenge  $M$ .

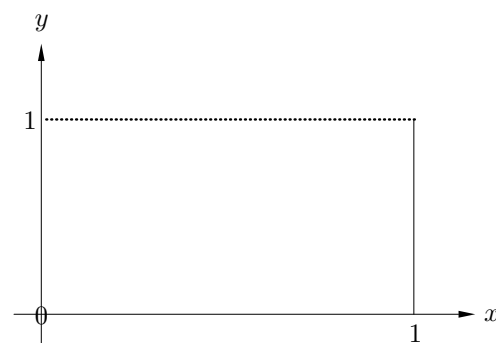


Abb. 9.2 Sei  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$  Läßt sich auch dieser Punktmenge  $M$  ein Flächeninhalt zuordnen?

Diese Fragestellungen werden in den nächsten beiden Abschnitten behandelt. Wir befassen uns zunächst mit der „Umkehrung des Differenzierens“.

## 9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

**Definition.** (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von  $f$  in  $I$ , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch}$$

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von  $f$  in  $I$  gleich, dann heißt  $f$  in  $I$  (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes* (*Riemann-*) *Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von  $f$  in  $I$ .

**Bez.:**  $\int_a^b f(x) dx$  oder auch  $\int_a^b f(x) dx$

## Kapitel 10

### Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 10.1 Doppelintegrale

Im folgenden seien stets (wenn nichts anderes vereinbart wird)  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b, c \leq d$ ,  $I = [a, b]$ ,  $J = [c, d]$  seien abgeschlossene Intervalle in  $\mathbb{R}$ , und  $D$  bezeichne das Rechteck in  $\mathbb{R}^2$ , das durch  $D := I \times J = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  gegeben ist. Weiterhin sei  $f(x, y)$  eine in  $D$  definierte und beschränkte Funktion. Abkürzend schreiben wir für  $(x, y)$  auch  $\bar{x}$ .

10/1/0

Die Definition des bestimmten Riemann-Integrals (Abschnitt 9.2) wurde bekanntlich durch das Flächenproblem motiviert. Die analoge Fragestellung wird Motiv für sog. Doppelintegrale sein. Hierzu setzen wir zunächst  $f(\bar{x}) \geq 0$  in  $D$  voraus (diese Bedingung wird nur für die Motivation benutzt; für die Definition von Mehrfachintegralen spielt sie keine Rolle).

Wir stellen uns nun die folgenden Fragen:

Kann der räumlichen Punktmenge

$$M := \{(x, y, z) : x \in I, y \in J, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

in „vernünftiger“ Weise ein Volumen zugeschrieben werden?

Wie könnte man dieses Volumen gegebenenfalls berechnen?

Bei der Behandlung dieser Fragen geht man völlig analog wie im eindimensionalen Fall vor. Man zerlegt zunächst das Rechteck  $D$  in Teilrechtecke. Dies geschieht wie folgt:

$\mathfrak{z}_1 = (a_0, \dots, a_{n+1})$  und  $\mathfrak{z}_2 = (c_0, \dots, c_{m+1})$  seien Zerlegungen der Intervalle  $I$  bzw.  $J$ , also  $a = a_0 < \dots < a_{n+1} = b$  und  $c = c_0 < \dots < c_{m+1} = d$  (vgl. Abb. 10.1).

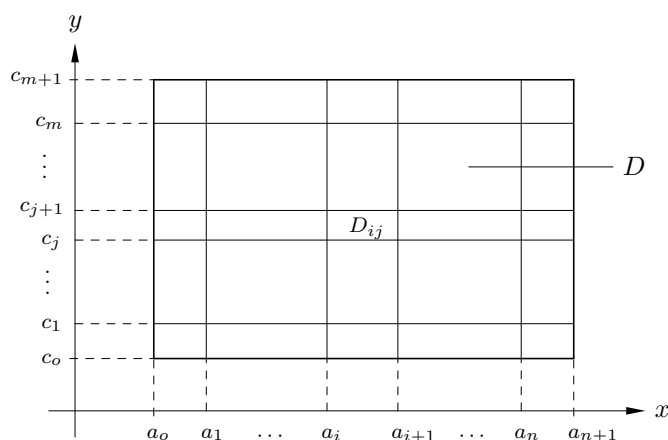


Abb. 10.1 Mit Hilfe der Zerlegungen  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  von  $[a, b]$  und  $(c_0, \dots, c_{m+1})$  von  $[c, d]$  wird das Rechteck  $D = [a, b] \times [c, d]$  in die Teilrechtecke  $D_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$  zerlegt.

Wie auch früher benutzen wir die Bezeichnungen  $I_i := [a_i, a_{i+1}]$  und  $J_j := [c_j, c_{j+1}]$ . Weiterhin sei  $D_{ij} := I_i \times J_j = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$ . Offenbar ist  $D = \bigcup_{i,j} D_{ij}$ .

$\bar{\mathfrak{z}} := \{D_{ij} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$  heißt dann *Zerlegung* (oder *Partition*) von  $D$ .

Eine *Verfeinerung* von  $\bar{\mathfrak{z}}$  ist durch Verfeinerungen von  $\mathfrak{z}_1$  und  $\mathfrak{z}_2$  gegeben.

Nach Voraussetzung ist  $f$  in  $D$  beschränkt, folglich ist  $f$  auch in jedem Teilrechteck  $D_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , beschränkt. Daher existieren

$$h_{ij} := \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) \quad \text{und} \quad H_{ij} := \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}).$$

**Bemerkung.** Im folgenden bezeichnen  $D$  und  $D_{ij}$  sowohl die Rechtecke  $I \times J$  bzw.  $I_i \times J_j$  als auch den Flächeninhalt der entsprechenden Rechtecke. Verwechslungen sind nicht zu befürchten, da sich die aktuelle Bedeutung jeweils aus dem Zusammenhang ergibt.

Über den Rechtecken  $D_{ij}$  errichten wir jetzt Quader mit der Grundfläche  $D_{ij}$  und der Höhe  $h_{ij}$  bzw.  $H_{ij}$  (vgl. Abb. 10.2). Dies gibt Anlaß zu folgender Definition.

**Definition.** (*Untersumme, Obersumme*)

10/1/1

(1)  $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$  heißt *Untersumme* von  $f$  bei der Zerlegung  $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Df}}{\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})} := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} \cdot h_{ij}.$$

(2)  $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$  heißt *Obersumme* von  $f$  bei der Zerlegung  $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Df}}{\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})} := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} \cdot H_{ij}.$$

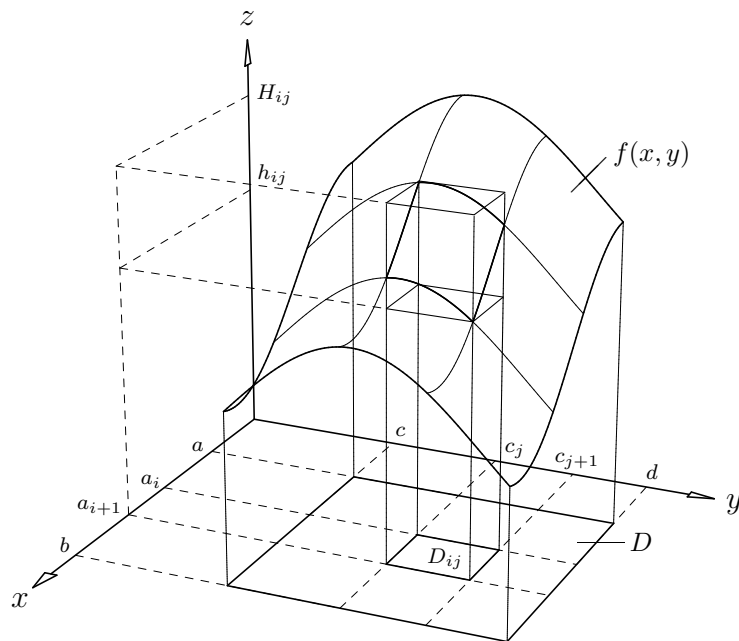


Abb. 10.2  $D$  sei wie in Abb. 10.1 zerlegt. Über den Teilrechtecken  $D_{ij}$  werden jeweils Quader mit den Höhen  $h_{ij} := \inf_{(x,y) \in D_{ij}} f(x,y)$  bzw.  $H_{ij} := \sup_{(x,y) \in D_{ij}} f(x,y)$  errichtet. Offenbar ist stets  $h_{ij} \leq H_{ij}$ . Bildet man die Summe der Volumen der Quader mit den jeweiligen Höhen  $h_{ij}$  bzw.  $H_{ij}$ , dann erhält man die Untersumme bzw. die Obersumme von  $f$  bei der entsprechenden Zerlegung.