

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Satz 7.5 (Kettenregel)

7/1/23

Ist g in a und f in $g(a)$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ in a differenzierbar, und es ist $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$ („äußere Ableitung mal innere Ableitung“).

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Definition. (unbestimmtes Integral)

9/1/6

Die Menge aller Stammfunktionen von f in einem Intervall I heißt *unbestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int f(x) dx.$$

Das unbestimmte Integral von einer Funktion – die eine Stammfunktion besitzt – ist also eine ganze Klasse von Funktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante unterscheiden. Will man mit diesen Klassen „rechnen“, dann kann man dies repräsentantenweise tun und jeweils entsprechende Konstanten addieren.

9/1/7

Zusammenstellung von Grundintegralen

$$\begin{array}{ll} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ \int \sin x dx = -\cos x + c & \\ \int \cos x dx = \sin x + c & \\ \int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + c & \\ \int \frac{dx}{\sin x} = -\cot x + c & \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c & \\ \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + c, & |x| < 1 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c & \\ \int e^x dx = e^x + c & \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c & \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c & \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c & \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + c, & |x| > 1 \\ \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|. & \end{array}$$

Diese Grundintegrale werden alle durch Differentiation bewiesen.

Satz 9.4 (*Substitutionsregel*)

9/1/18

Sei g in dem Intervall I und f in dem Intervall J definiert, und es sei $g(I) \subseteq J$. Besitzt f in J eine Stammfunktion und ist g in I differenzierbar, dann besitzt $f(g(x)) \cdot g'(x)$ in I eine Stammfunktion, und es gilt

$$\int_{x_0}^x f(g(x))g'(x) dx = \int_{t_0}^t f(t) dt, \quad \text{wobei } x_0 \in I, \ t = g(x) \text{ und } t_0 = g(x_0).$$

Beispiele.

2. Berechnung des unbestimmten Integrals $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx$ mit $g(x) \neq 0$.

9/1/21/2

Setzt man $f(t) = \frac{1}{t}$ und $t = g(x)$, dann ist $\frac{g'(x)}{g(x)} = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

$\ln|t|$ ist eine Stammfunktion von $f(t) = \frac{1}{t}$. Folglich ist

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + c.$$