

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

**Definition.** (*Folge*)

3/0/1

$F$  ist eine *Folge* (von reellen Zahlen)

$\overline{\text{Df}}$   $F$  ist eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{R}$ ,

d.h., jeder natürlichen Zahl  $n$  wird eine reelle Zahl  $a_n$  zugeordnet, so daß  $F(n) = a_n$ .

**Bez.:**  $F = (a_n)_{n=0,1,2,\dots}$  oder einfach  $F = (a_n)$ .

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

#### 5.2 Stetigkeit

**Definition.** (*Stetigkeit*)

5/2/1

$f$  ist an der Stelle  $a$  (oder kurz in  $a$ ) *stetig*

$\overline{\text{Df}}$   $a \in D(f)$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $x \in D(f)$  gilt: Wenn  $|x - a| < \delta$ , so  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

(d.h., für jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $f(a)$  gibt es eine  $\delta$ -Umgebung von  $a$ , so daß  $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$ ).

**Satz 5.3** (*Folgenstetigkeit*)

5/2/14

Es sei  $a \in D(f)$ . Dann gilt:

$f$  ist in  $a$  stetig gdw für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in D(f)$  gilt:

Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , so  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

**Satz 5.5** (*Stetigkeit der Verkettung*)

5/2/19

Seien  $f, g$  Funktionen mit  $W(g) \subseteq D(f)$ .

Ist  $g$  in  $a$  stetig und  $f$  in  $g(a)$  stetig, dann ist  $f \circ g$  in  $a$  stetig.

**Beweis.** Nach Definition der Stetigkeit ist  $g$  in  $a$  und  $f$  in  $g(a)$  definiert, folglich ist  $a \in D(f \circ g)$ .

5/2/20

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D(f \circ g)$  mit  $x_n \rightarrow a$ . Dann ist  $g$  in  $x_n$  definiert, und wegen  $W(g) \subseteq D(f)$  ist  $f$  in  $g(x_n)$  definiert.

Aus der Stetigkeit von  $g$  in  $a$  folgt:  $g(x_n) \rightarrow g(a)$ .

Nach Voraussetzung ist  $f$  in  $g(a)$  stetig. Dann gilt für jede Folge  $(y_n)$  in  $D(f)$ :

Wenn  $y_n \rightarrow g(a)$ , so  $f(y_n) \rightarrow f(g(a))$ .

Speziell für  $y_n = g(x_n)$  gilt dann

$$(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) = f(y_n) \longrightarrow f(g(a)) = (f \circ g)(a).$$

Nach Satz 5.3 ist also  $f \circ g$  in  $a$  stetig.  $\square$