

## Kapitel 10

### Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 10.1 Doppelintegrale

Aus Satz 10.1 (2) folgt sofort, daß die Menge aller Untersummen nach oben und die Menge aller Obersummen nach unten beschränkt ist. Folglich existieren 10/1/5

$$\iint_{\overline{D}} f(x, y) \, dx dy \stackrel{\text{Def}}{=} \sup \{ \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) : \bar{\mathfrak{z}} \text{ Zerlegung von } D \} \quad (\text{Unterintegral von } f \text{ in } D),$$

$$\iint_{\overline{D}} f(x, y) \, dx dy \stackrel{\text{Def}}{=} \inf \{ \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) : \bar{\mathfrak{z}} \text{ Zerlegung von } D \} \quad (\text{Oberintegral von } f \text{ in } D).$$

Aus (4) erhält man unmittelbar, daß stets  $\iint_{\overline{D}} f(x, y) \, dx dy \leq \iint_D f(x, y) \, dx dy$  gilt.

Analog wie im eindimensionalen Fall definieren wir jetzt das *Doppelintegral*.

**Definition.** (*Integral über Rechteckbereichen*) 10/1/6

Sei  $f$  in  $D$  definiert und beschränkt.

$f$  ist in  $D$  integrierbar

$$\stackrel{\text{Def}}{=} \iint_{\overline{D}} f(x, y) \, dx dy = \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

Der gemeinsame Wert von Ober- und Unterintegral heißt dann *Riemann-Integral* oder *Doppelintegral* oder kurz *Integral* von  $f$  in  $D$ .

$$\text{Bez.: } \iint_D f(x, y) \, dx dy := \int_D f(\bar{x}) \, d\bar{x}.$$

**Beispiel** für eine Funktion, die in  $D = [a, b] \times [c, d]$  definiert und beschränkt aber nicht integrierbar ist. Es sei 10/1/9

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in D \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist  $\bar{\mathfrak{z}} = \{D_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$  eine Zerlegung von  $D$ , dann existieren offenbar in jedem  $D_{ij}$  Elemente  $(x_1, y), (x_2, y)$  mit  $x_1 \in D \cap \mathbb{Q}$  und  $x_2 \notin \mathbb{Q}$ .

Folglich ist stets

$$\inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) = 1.$$

Daraus erhält man sofort

$$\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} \cdot \underbrace{h_{ij}}_{=0} = 0$$

und

$$\overline{S}_f(\vec{z}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} \cdot \underbrace{H_{ij}}_{=1} = D \neq 0.$$

Folglich ist

$$\iint_{\overline{D}} f(x, y) \, dx dy = 0 < D = \iint_D \overline{f}(x, y) \, dx dy,$$

und damit ist  $f$  in  $D$  nicht integrierbar.