

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung*)

8/1/1

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

f ist in \bar{c} differenzierbar (oder total differenzierbar)

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert, und es existiert eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $o(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0}, \text{ so daß für jedes } \bar{x} \in U(\bar{c}) \text{ gilt: } f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x}).$$

Die Matrix A heißt dann 1. Ableitung von f an der Stelle \bar{c} .

Bez.: $A := f'(\bar{c})$.

Satz 8.8 (*Kettenregel*)

8/1/32

Es sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ (also $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$).

Ist g in \bar{c} und f in $g(\bar{c})$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ in \bar{c} differenzierbar, und es ist $(f \circ g)'(\bar{c}) = f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c})$.

(Das Produkt der „inneren“ und der „äußeren“ Ableitung ist ein Produkt von Matrizen.)