

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung*)

8/1/1

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

f ist in \bar{c} differenzierbar (oder total differenzierbar)

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert, und es existiert eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $o(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0}, \text{ so daß für jedes } \bar{x} \in U(\bar{c}) \text{ gilt: } f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x}).$$

Die Matrix A heißt dann 1. Ableitung von f an der Stelle \bar{c} .

Bez.: $A := f'(\bar{c})$.

Definition. (*partielle Ableitung*)

8/1/4

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert.

f ist in \bar{c} partiell nach x_i differenzierbar ($i = 1, \dots, n$)

$\overline{\text{Df}}$ Die Funktion $\varphi(x_i) := f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$ ist (als Funktion der einen Veränderlichen x_i) an der Stelle c_i differenzierbar.

Nach der früheren Differenzierbarkeitsdefinition bedeutet dies, daß die folgenden Limites existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(c_i + h) - \varphi(c_i)}{h}, \text{ für } h := x_i - c_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - f(\bar{c})}{x_i - c_i}. \end{aligned}$$

Der Limes selbst (falls er existiert) heißt *partielle Ableitung* von f nach x_i an der Stelle \bar{c} (oder kurz: in \bar{c}).

Bez.: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = f_{x_i}(\bar{c})$.

Satz 8.4 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/19

Ist f in \bar{c} differenzierbar (d.h., es gibt eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, also eine $(m \times n)$ -Matrix $A = (a_{ji})_{\substack{j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, n}}$, so daß $f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x})$ für alle \bar{x} in einer Umgebung $U(\bar{c})$),

dann existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, und es ist $a_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$.

(Die Abbildung A ist also eindeutig bestimmt durch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$.)