

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Satz 8.4 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/19

Ist f in \bar{c} differenzierbar (d.h., es gibt eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, also eine $(m \times n)$ -Matrix $A = (a_{ji})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$, so daß $f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x})$ für alle \bar{x} in einer Umgebung $U(\bar{c})$),

dann existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, und es ist $a_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$.

(Die Abbildung A ist also eindeutig bestimmt durch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$.)

Bemerkung. Die Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, also die 1. Ableitung der Vektorfunktion f , heißt auch *Funktionalmatrix* oder *Jacobimatrix* von f in \bar{c} .

8/1/21

$$\text{Bez.: } f'(\bar{c}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{c}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{c}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{c}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{c}) \end{pmatrix} := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\bar{c}).$$