

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Limes superior, Limes inferior*)

3/1/27

Es sei (a_n) eine beschränkte Folge von reellen Zahlen und $H(a_n)$ die Menge aller Häufungspunkte (oder *Limites* von konvergenten Teilfolgen) von (a_n) .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n \left(:= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \stackrel{\text{Df}}{=} \sup H(a_n).$$

$\sup H(a_n)$ heißt *Limes superior* oder *oberer Limes* von (a_n) [:= größter Häufungspunkt in $H(a_n)$].

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \left(:= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \stackrel{\text{Df}}{=} \inf H(a_n), .$$

$\inf H(a_n)$ heißt *Limes inferior* oder *unterer Limes* von (a_n) [:= kleinster Häufungspunkt in $H(a_n)$].

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.4 Potenzreihen

Definition. (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *Potenzreihe* in $x-a$ mit den *Koeffizienten* a_n .

Definition. (*Konvergenzradius*)

4/4/5

Es sei ϱ eine nicht-negative reelle Zahl oder $\varrho = \infty$.

ϱ heißt *Konvergenzradius* von $\sum a_n(x-a)^n$

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ Für jedes x gilt: Wenn $|x-a| < \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent, und wenn $|x-a| > \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ divergent.

(Hierbei soll immer gelten: $\{x : |x-a| < \infty\} = \mathbb{R}$ bzw. $= \mathbb{C}$ und $\{x : |x-a| > \infty\} = \emptyset$.)

Satz 4.21 Es sei $\sum a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius ϱ , und es sei $l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gilt:

4/4/13

(1) Wenn $0 < l < \infty$, so $\varrho = \frac{1}{l}$.

(2) Wenn $l = 0$, so $\varrho = \infty$.

(3) Wenn $l = \infty$, so $\varrho = 0$.