

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

#### 5.3 Elementare Funktionen

**Bemerkung.** Aus der Definition und den Eigenschaften von  $\sin$  und  $\cos$  erhält man sofort die wichtigsten Eigenschaften von  $\tan$  und  $\cot$ . Insbesondere gilt:

$$D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\}, \quad W(\tan) = \mathbb{R};$$

$$D(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{x : \sin x = 0\}, \quad W(\cot) = \mathbb{R}.$$

$\tan$  und  $\cot$  sind als Quotienten von stetigen Funktionen wieder stetig;

$\tan$  und  $\cot$  sind wie  $\sin$  und  $\cos$  periodisch, allerdings mit der Periode  $\pi$ .

Ähnlich wie  $\sin$  und  $\cos$  lassen sich auch  $\tan$  und  $\cot$  am Einheitskreis geometrisch interpretieren (vgl. Abb 5.21 und 5.24).

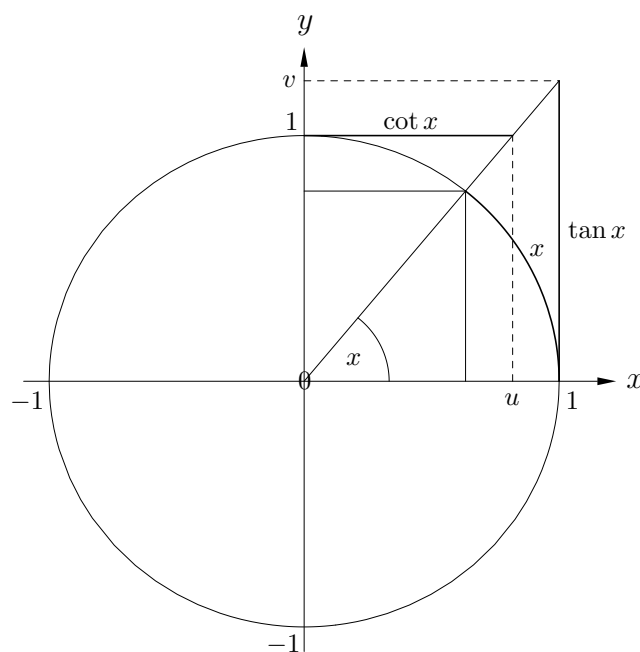


Abb. 5.24 In der Abbildung ist zu erkennen, wie am Einheitskreis die Funktionen  $\tan$  und  $\cot$  in Abhängigkeit von dem Winkel  $x$  (alle hervorgehoben durch dickere Strichstärke;  $x$  gemessen in Bogenmaß) veranschaulicht werden können.  $\cot$  bzw.  $\tan$  sind dann definiert durch:  $\cot x := u$ ,  $\tan x := v$ .

Die trigonometrischen Funktionen  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ ,  $\cot$  sind als periodische Funktionen **nicht** in ihren gesamten Definitionsbereichen injektiv. In den (maximalen) Teilintervallen, in denen sie jedoch injektiv sind (dort sind sie auch stetig und daher streng monoton), besitzen sie Umkehrfunktionen (die sog. *Arcus-Funktionen*; Arcus oder Arkus := Bogenmaß eines Winkels), die der Reihe nach mit  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\arctan$ ,  $\operatorname{arccot}$  bezeichnet werden.

Zur Veranschaulichung der Arcus-Funktionen betrachte man zunächst die Abb. 5.21. Dort ist der Winkel  $x$  in Bogenmaß gegeben (das ist bekanntlich die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis zwischen den Punkten  $(1,0)$  und  $(u,v)$  im entgegengesetzten Uhrzeigersinn). Für fixiertes  $x$  ist  $\sin x$  symbolisiert durch die Strecke der Länge  $v$  zwischen den Punkten  $(u,0)$  und  $(u,v)$ . Also

$$\sin x = v \implies \arcsin(\sin x) = \arcsin v = x \quad (:= \text{die zu } \sin x \text{ gehörende Bogenlänge}).$$

Das Analoge gilt für Cosinus, Tangens und Cotangens.

Abschließend werden noch die trigonometrischen Funktionen mit ihren Umkehrfunktionen (in geeigneten Intervallen) dargestellt (vgl. Abb. 5.25 – 5.28). Sinus wird in  $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$  und in  $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$  betrachtet, Cosinus in  $[0, \pi]$  und in  $[\pi, 2\pi]$ . Tangens und Cotangens werden in  $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$  bzw. in  $[0, \pi]$  dargestellt.

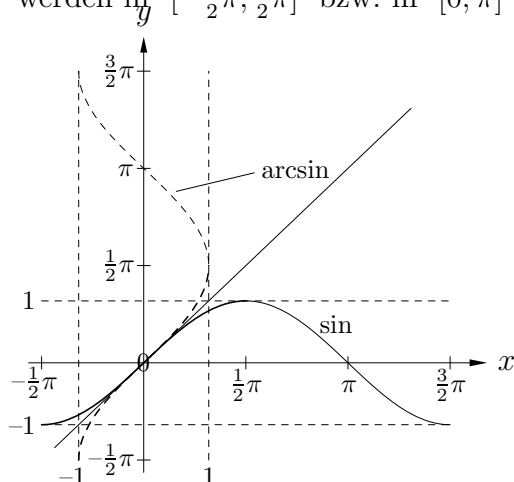


Abb. 5.25 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Sinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Sinus injektiv ist.

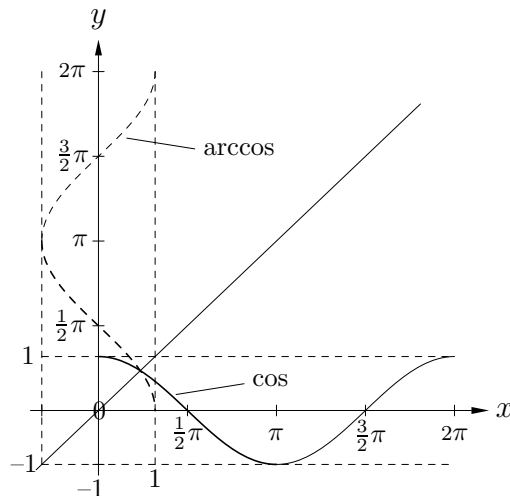


Abb. 5.26 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Cosinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Cosinus injektiv ist.

Analog wie in den vorhergehenden Abbildungen verfahren wir jetzt noch mit Tangens und Cotangens.

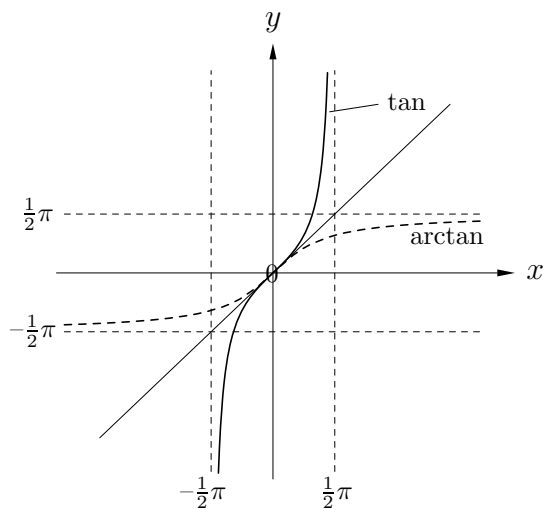


Abb. 5.27 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Tangens in dem Intervall  $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ .

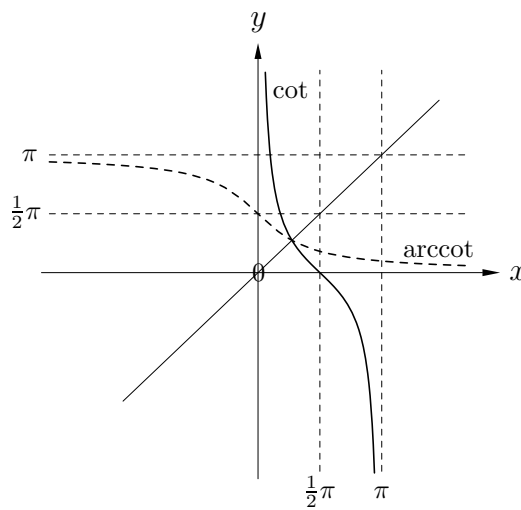


Abb. 5.28 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Cotangens in dem Intervall  $(0, \pi)$ .

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

**Beispiel.** Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei

8/3/7

$$f(x, y) = \arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad D(f) = \{(x, y) : x \neq 0, y \neq 0\}.$$

Folglich ist  $f$  in den Gebieten

$$M_1 := \{(x, y) : x > 0, y > 0\},$$

$$M_2 := \{(x, y) : x > 0, y < 0\},$$

$$M_3 := \{(x, y) : x < 0, y > 0\},$$

$$M_4 := \{(x, y) : x < 0, y < 0\}$$

definiert und offenbar differenzierbar. In jedem der Gebiete gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= \frac{y^2}{(y^2 + x^2) \cdot y} - \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2) \cdot x^2} = 0. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Folglich ist  $f'(\bar{x}) = 0$ , und damit ist  $f$  in jedem der  $M_i$  konstant. Die Werte von  $f$  kann man leicht durch geeignete spezielle Argumente ermitteln.

In  $M_1$  ist  $f(x, y) = f(1, 1) = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$ ,

in  $M_2$  ist  $f(x, y) = f(1, -1) = 2 \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$ ,

in  $M_3$  ist  $f(x, y) = f(-1, 1) = 2 \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$ ,

in  $M_4$  ist  $f(x, y) = f(-1, -1) = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$ .