

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.2 Dreifachintegrale

Definition. (*Integral über Quadern*)

10/2/7

Es sei D ein dreidimensionaler Quader und $f(x, y, z) := f(\bar{x})$ in D definiert und beschränkt.

$$f \text{ ist in } D \text{ integrierbar} \stackrel{\text{Def}}{=} \int_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \overline{\int_D f(\bar{x}) d\bar{x}}.$$

Der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *Riemann-Integral* oder *Dreifachintegral* oder kurz *Integral* von f in D .

$$\text{Bez.} \quad \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz := \int_D f(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Satz 10.7 (*dreifach iterierte Integrale über Quadern*)

10/2/8

Sei $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ und $f(x, y, z)$ in D integrierbar.

Ist $f(x, y, z)$ für jedes fixierte $x \in [a_1, b_1]$ (als Funktion von x, y) in $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3] := D'$ integrierbar und $F(x) := \iint_{D'} f(x, y, z) dy dz$ (als Funktion von x) in $[a_1, b_1]$ integrierbar,

$$\text{dann ist} \quad \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{D'} f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$

Korollar. Ist $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ und $f(x, y, z)$ in D stetig, dann ist (f in D integrierbar und)

10/2/10

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$