

## Kapitel 1

### Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Wir geben jetzt Regeln für die Verneinung zusammengesetzter Aussagen an. Durch schrittweise Anwendung dieser Regeln lassen sich beliebige mathematische Aussagen verneinen. 1/0/21

$$\begin{aligned}
 \neg(\neg A) &\equiv A, & (\neg(\neg A) \leftrightarrow A \text{ ist also immer wahr.}) \\
 \neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B, \\
 \neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B, \\
 \neg(A \rightarrow B) &\equiv A \wedge \neg B, \\
 \neg(A \leftrightarrow B) &\equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B), \\
 \neg \forall x A(x) &\equiv \exists x \neg A(x), \\
 \neg \exists x A(x) &\equiv \forall x \neg A(x).
 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich sofort die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
 A \rightarrow B &\equiv \neg A \vee B, \\
 A \leftrightarrow B &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).
 \end{aligned}$$

Es werden jetzt einige wahre Aussagen betrachtet, die aufgrund ihrer logischen Struktur häufig als *Beweisprinzipien* auftreten. (In der Regel benutzt man diese Prinzipien schon rein intuitiv richtig.) 1/0/22

$$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B \quad (\textit{Modus ponens} \text{ oder } \textit{Abtrennungsregel})$$

Aus der Gültigkeit der Aussagen  $A$  und  $A \rightarrow B$ , schließt man auf die Gültigkeit der Aussage  $B$ .

Analog interpretiert man auch die folgenden Prinzipien:

$$\begin{aligned}
 (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) &\rightarrow (A \rightarrow C) \quad (\textit{Kettenschluß}) \\
 A \rightarrow B &\leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A \quad (\textit{Kontraposition})
 \end{aligned}$$

Die Kontraposition besagt, daß die Aussagen  $A \rightarrow B$  und  $\neg B \rightarrow \neg A$  stets den gleichen Wahrheitswert besitzen. Dies darf allerdings nicht verwechselt werden mit der Umkehrung  $B \rightarrow A$  der Implikation  $A \rightarrow B$ . Die Aussagen  $A \rightarrow B$  und  $B \rightarrow A$  sind im allgemeinen nicht äquivalent.

$$(\neg A \rightarrow F) \rightarrow A \quad (\textit{indirekter Beweis}; F \text{ steht für eine beliebige falsche Aussage})$$

Praktisch geht man beim indirekten Beweis folgendermaßen vor:

Man nimmt an, daß die Aussage  $A$  falsch ist, also die Negation  $\neg A$  gilt. Dann leitet man aus dieser Annahme etwas Falsches her, d.h., man erzeugt einen *Widerspruch*. (Dies wird häufig einfach durch das Symbol  $\text{⌵!}$  ausgedrückt). Daraus schließt man, daß die Aussage

$\neg A$  nicht richtig sein kann; also gilt die Aussage  $A$ . (Hierbei wird ganz wesentlich das Prinzip der Zweiwertigkeit benutzt.)

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

#### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Definition.** (*Beschränktheit bei Folgen*)

3/1/11

Sei  $(a_n)$  eine Folge von reellen Zahlen.

- (1)  $(a_n)$  ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $c \in \mathbb{R}$ , so daß  $a_n \leq c$  (bzw.  $c \leq a_n$ ) für jedes  $n$ .

- (2)  $(a_n)$  ist *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$   $(a_n)$  ist nach oben und nach unten beschränkt.

**Satz 3.3** *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

3/1/14

**Definition.** (*monoton wachsend bzw. monoton fallend*)

3/1/31

Sei  $(a_n)$  eine Folge von reellen Zahlen.

- (1)  $(a_n)$  ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*)

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $n$  gilt:  $a_n \leq a_{n+1}$  (bzw.  $a_{n+1} \leq a_n$ ).

- (2)  $(a_n)$  ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*)

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $n$  gilt:  $a_n < a_{n+1}$  (bzw.  $a_{n+1} < a_n$ ).

**Satz 3.8** *Eine monotone Folge ist konvergent gdw sie beschränkt ist.*

3/1/33

## Kapitel 4

### Unendliche Reihen; Potenzreihen

#### 4.1 Konvergenz von Reihen

**Satz 4.8** (*Majorantenkriterium*)

4/1/32

Es seien  $\sum a_i$ ,  $\sum b_i$  Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei  $\sum b_i$  eine Majorante von  $\sum a_i$ . Dann gilt:

- (1) Ist  $\sum b_i$  konvergent, so ist auch  $\sum a_i$  konvergent.

- (2) Ist  $\sum a_i$  divergent, so ist auch  $\sum b_i$  divergent.

**Beweis.** (1). Nach Voraussetzung gilt  $0 \leq a_i \leq b_i$  für alle  $i$ . Folglich ist

4/1/33

$$0 \leq S_n = a_0 + \cdots + a_n \leq S'_n = b_0 + \cdots + b_n.$$

Da  $(S_n)$  monoton wächst, genügt zu zeigen, daß  $(S_n)$  beschränkt ist.

Nach Voraussetzung ist  $(S'_n)$  konvergent, also auch beschränkt. Folglich ist auch  $(S_n)$  beschränkt.

(2) Kontraposition von (1).  $\square$