

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. (*monoton, streng monoton*)

5/1/11

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

(1) f ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 \leq x_2$, so $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

(2) f ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_1) < f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Untersumme, Obersumme*)

9/2/3

Sei f in I definiert und beschränkt.

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Df}} \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Df}} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

9.3 Integrierbarkeitskriterien

Satz 9.8 (*Riemannsches Integrierbarkeitskriterium*)

9/3/1

Sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt. Dann gilt: f ist in I integrierbar gdw für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung \mathfrak{z} von I existiert, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$.

9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 9.12 Ist f in I definiert und monoton, dann ist f in I integrierbar.

9/4/4

Beweis. (mit Hilfe des Riemann-Kriteriums) Sei $\varepsilon > 0$. Wir beweisen den Satz für monoton wachsendes f , für monoton fallende Funktionen erfolgt der Beweis analog.

Es sei $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ mit $a_i = a + \frac{b-a}{n+1} \cdot i$. Dann ist offenbar $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n+1}$. Die Teilintervalle $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ sind also alle gleich lang. Da f monoton wächst, ist

9/4/5

$$\inf_{x \in I_i} f(x) = f(a_i) \quad \text{und} \quad \sup_{x \in I_i} f(x) = f(a_{i+1}).$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_f(\mathfrak{J}) - \underline{S}_f(\mathfrak{J}) &= \sum_{i=0}^n \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{= \frac{b-a}{n+1}} \cdot \left(\underbrace{\sup_{x \in I_i} f(x)}_{= f(a_{i+1})} - \underbrace{\inf_{x \in I_i} f(x)}_{= f(a_i)} \right) \\ &= \frac{b-a}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\ &= \frac{b-a}{n+1} \cdot (f(a_{n+1}) - f(a_0)) \\ &= \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n+1} \\ &< \varepsilon, \quad \text{falls } n \text{ hinreichend gro\ss gew\u00e4hlt wird.} \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, da\ss f in I integrierbar ist. \square