

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.16 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

6/3/27

Ist f in M gleichmäßig stetig, dann ist f in M stetig.

Bemerkung. An einem Beispiel zeigen wir, daß die Umkehrung von Satz 6.16 im allgemeinen falsch ist.

6/3/29

Dazu sei $M = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ und $f(x) = \frac{1}{x}$, also $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.

Offenbar ist f als rationale Funktion stetig in $(0, 1)$. f ist aber nicht gleichmäßig stetig in diesem Intervall. (vgl. Abb. 6.14)

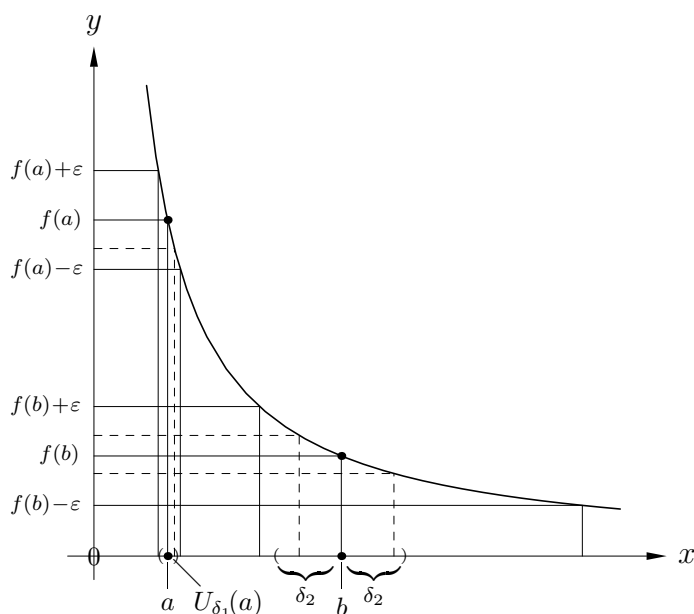


Abb. 6.14 Für das gleiche $\varepsilon > 0$ kann hier kein universelles $\delta > 0$ gewählt werden. Je näher man sich mit a dem Wert 0 nähert, desto kleiner muß die entsprechende δ -Umgebung genommen werden, damit die δ -Umgebung von a in die ε -Umgebung von $f(a)$ abgebildet wird. δ hängt sowohl von a als auch von ε ab.

Angenommen, f ist in $(0, 1)$ gleichmäßig stetig.

Speziell für $\varepsilon = 1$ gäbe es dann ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x, y \in (0, 1)$ gilt:

Wenn $|x - y| < \delta$, so $|f(x) - f(y)| < \varepsilon = 1$.

Wählt man $x = \frac{1}{n}$ und $y = \frac{1}{2n}$, dann ist

$$|x - y| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} < \delta$$

für hinreichend große n und

$$|f(x) - f(y)| = \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right) \right| = |n - 2n| = n \geq \varepsilon = 1. \quad \text{!}$$