

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. Der n -dimensionale Vektorraum \mathbb{R}^n zusammen mit dem euklidischen Abstand heißt *n -dimensionaler euklidischer Raum*. 6/1/3

Definition. (*Beschränktheit*) 6/1/18

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$.

M ist *beschränkt* (in \mathbb{M})

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{M}$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß $M \subseteq U_\varepsilon(a)$
(d.h., M ist in einer Kugel – mit endlichem Radius ε – enthalten; also für jedes $x \in M$ gilt:
 $\varrho(x, a) < \varepsilon$; vgl. Abb. 6.3)

Definition. (*abgeschlossene Menge*) 6/1/26

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{M}$ ist *abgeschlossen*

$\overline{\text{Df}}$ Jeder Häufungspunkt von M gehört zu M .

6.5 Einige wichtige Ergänzungen

Definition. (*kompakt*) 6/5/3

Es sei (\mathbb{M}, ϱ) ein metrischer Raum und $M \subseteq \mathbb{M}$.

(1) M ist *kompakt*

$\overline{\text{Df}}$ Jede offene Überdeckung von M enthält eine endliche Teilüberdeckung von M (d.h., ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M , dann existiert ein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0 := \{U_1, \dots, U_m\} \subseteq \mathcal{U}$, so daß schon \mathcal{U}_0 die Menge M überdeckt).

(2) (\mathbb{M}, ϱ) ist *kompakt*

$\overline{\text{Df}}$ $M = \mathbb{M}$ ist kompakt.

Satz 6.23 Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ist M *kompakt* (im Sinne der Definition in metrischen Räumen), dann ist M *beschränkt und abgeschlossen* (in \mathbb{R}).

6/5/7
