

# Kapitel 7

## Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

### 7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

**Satz 7.14** Sei  $a < b$  und  $f$  in  $I = (a, b)$  differenzierbar. Dann gilt:  
 $f$  ist in  $I$  konvex (bzw. streng konvex) von unten gdw  $f'$  in  $I$  monoton (bzw. streng monoton) wächst.

7/3/14

(Der Satz gilt analog für „von oben“ und „monoton fallend“.)

**Korollar.** Sei  $a < b$  und  $f$  in  $I = (a, b)$  zweimal differenzierbar.

7/3/16

- (1)  $f$  ist in  $I$  konvex von unten gdw  $f''(x) \geq 0$  für jedes  $x \in I$ .
- (2)  $f$  ist in  $I$  streng konvex von unten gdw  $f''(x) \geq 0$  für jedes  $x \in I$ , und es gibt kein Teilintervall  $(a', b') \subseteq I$  mit  $a' < b'$ , so daß  $f''(x) = 0$  für alle  $x \in (a', b')$ .
- (3) Die Behauptungen gelten analog für konvex bzw. streng konvex von oben.

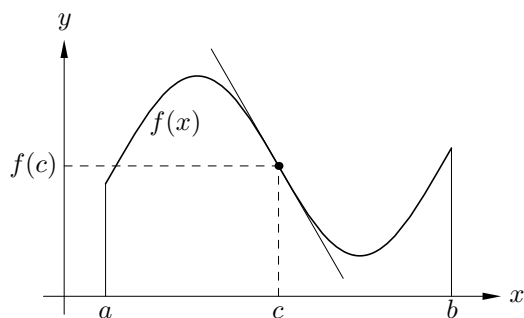
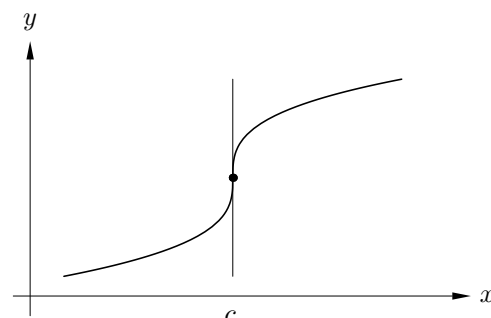


Abb. 7.13 a  $f(x)$  besitzt in  $c$  einen Wendepunkt, denn in  $[a, c]$  und in  $[c, b]$  ist  $f$  streng konvex von oben bzw. streng konvex von unten.



7/3/31

Abb. 7.13 b  $f(x)$  ist in  $c$  nicht differenzierbar, besitzt aber in  $c$  einen Wendepunkt, denn die Konvexitätsbedingungen sind erfüllt.

Ein Wendepunkt markiert also die Umkehr des Konvexitätsverhaltens der betrachteten Funktion.

**Satz 7.18** Sei  $a < b$ ,  $f$  in  $I = (a, b)$  2-mal differenzierbar und  $c \in I$ .  
 $f$  besitzt in  $c$  einen Wendepunkt gdw  $f'$  in  $c$  ein lokales Extremum besitzt.

7/3/32

**Beweis.** Übungsaufgabe!

7/3/33

(Man führt den Beweis mit Hilfe von Satz 7.14; da die Funktion  $f$  auch an der Stelle  $c$  differenzierbar ist, scheidet der Fall, daß eine „senkrechte Tangente“ existiert, aus.)  $\square$