

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Beschränktheit bei Folgen*)

3/1/11

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

(1) (a_n) ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c$ (bzw. $c \leq a_n$) für jedes n .

(2) (a_n) ist *beschränkt*

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ (a_n) ist nach oben und nach unten beschränkt.

Definition. (*Häufungspunkt einer Folge*)

3/1/16

Es sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

a ist ein *Häufungspunkt* (oder *Verdichtungspunkt*) von (a_n)

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ In jeder ε -Umgebung von a liegen unendlich viele Folgenglieder a_n
(die untereinander auch gleich sein dürfen, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes n_0
gibt es ein $n \geq n_0$, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$).

Satz 3.4 *Jede beschränkte Folge besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.*

3/1/17

Satz 3.6 *Ist a ein Häufungspunkt der Folge (a_n) , dann existiert eine Teilfolge von (a_n) , die gegen a konvergiert.*

3/1/23

Korollar. *Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.*

3/1/25

Beweis. Sei (a_n) beschränkt. Dann besitzt (a_n) einen Häufungspunkt (nach Satz 3.4) und schließlich eine konvergente Teilfolge (nach Satz 3.6). \square

3/1/26