

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Satz 10.4 *Es sei B ein über $[a, b]$ x -einfacher bzw. über $[c, d]$ y -einfacher Bereich, $B \subseteq D := [a, b] \times [c, d]$, und $f(x, y)$ sei in B definiert und stetig. Dann ist f^* in D integrierbar, und es ist* 10/1/22

$$\iint_D f^*(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f^*(x, y) \, dy \right) dx \quad \text{bzw.}$$

$$\iint_D f^*(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f^*(x, y) \, dx \right) dy.$$

Satz 10.5 *(iterierte Integrale über einfachen Bereichen)*

10/1/26

(1) *Es sei $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ ein x -einfacher Bereich und $f(x, y)$ sei in B stetig. Dann ist $(f(x, y))$ in B integrierbar und*

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

(2) *Es sei $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$ ein y -einfacher Bereich und $f(x, y)$ sei in B_1 stetig. Dann ist $(f(x, y))$ in B_1 integrierbar und*

$$\iint_{B_1} f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Beweis. (1). Es sei $D := [a, b] \times [c, d]$, $B \subseteq D$ und

10/1/27

$$f^*(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{für } c \leq y < \varphi(x), \\ f(x, y), & \text{für } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \\ 0, & \text{für } \psi(x) < y \leq d. \end{cases}$$

Für jedes fixierte $x \in [a, b]$ gilt dann

$$\int_a^b f^*(x, y) \, dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^*(x, y) \, dy.$$

Daraus erhält man (mit Hilfe von Satz 10.4)

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy = \iint_D f^*(x, y) \, dx dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f^*(x, y) dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

(2) wird analog bewiesen. \square