

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.3 Integrierbarkeitskriterien

**Satz 9.8** (Riemannsches Integrierbarkeitskriterium)

9/3/1

Sei  $f$  in  $I = [a, b]$  definiert und beschränkt. Dann gilt:  $f$  ist in  $I$  integrierbar gdw für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $\mathfrak{z}$  von  $I$  existiert, so daß  $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$ .

**Definition.** (Zwischensumme)

9/3/4

Es sei  $f$  in  $I$  definiert,  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  eine Zerlegung von  $I$ , und für jedes  $i = 1, \dots, n$  sei  $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ .

Dann nennt man  $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$  ein *Zwischenstellensystem* bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$ , und  $S_f(\mathfrak{z}, \tau) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot f(\xi_i)$  heißt *Zwischensumme* von  $f$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$  und dem Zwischenstellensystem  $\tau$ .

**Bemerkung.** Ist  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt, dann gilt für  $\xi \in [a_i, a_{i+1}] := I_i$  stets  $\inf_{x \in I_i} f(x) \leq f(\xi) \leq \sup_{x \in I_i} f(x)$  und somit auch

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq S_f(\mathfrak{z}, \tau) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

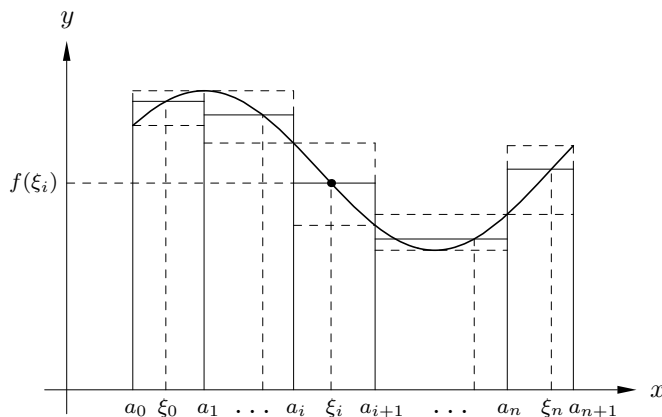


Abb. 9.8 Die Summe der Flächeninhalte der hervorgehobenen Rechtecke bildet die Zwischensumme von  $f$  bei der angegebenen Zerlegung  $\mathfrak{z}$  und dem Zwischenstellensystem  $\tau := (\xi_0, \dots, \xi_n)$ . Die Abbildung zeigt auch, daß die Zwischensumme zwischen der Unter- und der Ober-summe liegt.

**Satz 9.9** Es sei  $f$  in  $I = [a, b]$  definiert und beschränkt. Dann gilt:

9/3/6

$f$  ist in  $I$  integrierbar gdw für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge  $(\mathfrak{z}_\nu)$  und jede Folge  $(\tau_\nu)$  von zugehörigen Zwischenstellensystemen  $\tau_\nu$  gilt:

Es existiert  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$  (und der Limes ist gleich dem Integral  $\int_a^b f(x) dx$ .)

## 9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

**Satz 9.13** Seien  $f$  und  $g$  in  $I$  integrierbar. Dann gilt:

9/4/8

(1) Ist  $h(x) = c$  für alle  $x \in I$ , so ist  $\int_a^b h(x) dx = c(b-a)$ .

(2) Sind  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , so ist  $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g$  in  $I$  integrierbar, und es ist

$$\int_a^b (c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx.$$

(3)  $f \cdot g$  ist in  $I$  integrierbar.

(4) Ist  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$  und ist  $\frac{1}{g}$  beschränkt in  $I$ , dann ist  $\frac{f}{g}$  in  $I$  integrierbar.

(Zusammen mit (3) erhält man sofort die Integrierbarkeit von  $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g}$  in  $I$ ).

(5)  $|f|$  ist in  $I$  integrierbar, und es ist  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

**Beweis.** (1) und (2) beweist man sehr leicht mit Hilfe von Satz 9.9 unter Benutzung von Zwischensummen und entsprechenden Grenzwertbetrachtungen.

9/4/9

(3). (Beweis mit Hilfe des Riemann-Kriteriums)

Wir betrachten den Fall:  $f(x), g(x) \geq 0$  in  $I$ .

Hierauf lassen sich die restlichen Fälle zurückführen. Denn nach Voraussetzung sind  $f$  und  $g$  in  $I$  beschränkt, folglich gibt es eine Konstante  $d$ , so daß

$$f_1(x) := f(x) + d \geq 0 \quad \text{und} \quad g_1(x) := g(x) + d \geq 0 \quad \text{in } I.$$

Wenn die Behauptung für nicht-negative Funktionen schon gilt, dann ist  $f_1 \cdot g_1$  in  $I$  integrierbar, und es ist

$$f_1 \cdot g_1 = (f + d) \cdot (g + d) = f \cdot g + d \cdot (f + g) + d^2,$$

und damit ist

$$f \cdot g = f_1 \cdot g_1 - d \cdot (f + g) + d^2.$$

Nach (1) und (2) ist  $f \cdot g$  dann in  $I$  für beliebige  $f, g$  integrierbar.

Wir beweisen jetzt die Behauptung für nicht-negative Funktionen. Es sei  $\varepsilon > 0$ .

Gesucht ist eine Zerlegung  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ , so daß  $\overline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) < \varepsilon$ .

Für eine beliebige Zerlegung  $\mathfrak{z}$  mit  $I_i = [a_i, a_{i+1}]$  gilt:

$$\overline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \underbrace{\left( \sup_{x \in I_i} (f(x) \cdot g(x)) - \inf_{x \in I_i} (f(x) \cdot g(x)) \right)}_{:= (\star)}.$$

Wegen  $f(x), g(x) \geq 0$  ist

$$\sup_{x \in I_i} (f(x) \cdot g(x)) \leq \underbrace{\sup_{x \in I_i} f(x)}_{:= H_{fi}} \cdot \underbrace{\sup_{x \in I_i} g(x)}_{:= H_{gi}}$$

und

$$\inf_{x \in I_i} (f(x) \cdot g(x)) \geq \underbrace{\inf_{x \in I_i} f(x)}_{:= h_{fi}} \cdot \underbrace{\inf_{x \in I_i} g(x)}_{:= h_{gi}}.$$

Da  $f, g$  in  $I$  beschränkt sind, existiert ein  $c > 0$ , so daß  $H_{fi}, h_{gi} \leq c$ .  
Folglich ist

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I_i} (f(x) \cdot g(x)) - \inf_{x \in I_i} (f(x) \cdot g(x)) &\leq H_{fi} \cdot H_{gi} - h_{fi} \cdot h_{gi} \\ &= H_{fi} \cdot H_{gi} - H_{fi} \cdot h_{gi} + H_{fi} \cdot h_{gi} - h_{fi} \cdot h_{gi} \\ &= \underbrace{H_{fi}}_{\leq c} \cdot (H_{gi} - h_{gi}) + \underbrace{h_{gi}}_{\leq c} \cdot (H_{fi} - h_{fi}) \\ &\leq c \cdot (H_{gi} - h_{gi}) + c \cdot (H_{fi} - h_{fi}). \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} \overline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot (\star) \\ &\leq \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \left( c \cdot (H_{gi} - h_{gi}) + c \cdot (H_{fi} - h_{fi}) \right) \\ &= \underbrace{c \cdot \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) (H_{gi} - h_{gi})}_{= \overline{S}_g(\mathfrak{z}) - \underline{S}_g(\mathfrak{z})} + \underbrace{c \cdot \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) (H_{fi} - h_{fi})}_{= \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z})}. \end{aligned}$$

Nach dem Riemannschen Integrierbarkeitskriterium existieren für  $f$  und  $g$  Zerlegungen  $\mathfrak{z}_1$  bzw.  $\mathfrak{z}_2$  von  $I$ , so daß  $\overline{S}_g(\mathfrak{z}_1) - \underline{S}_g(\mathfrak{z}_1) < \frac{\varepsilon}{2c}$  und  $\overline{S}_f(\mathfrak{z}_2) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_2) < \frac{\varepsilon}{2c}$ .

Wählt man jetzt  $\mathfrak{z}$  als gemeinsame Verfeinerung von  $\mathfrak{z}_1$  und  $\mathfrak{z}_2$ , dann ist nach den obigen Betrachtungen

$$\overline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) < c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} + c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon.$$

(4) und (5) beweist man ebenfalls mit dem Riemannkriterium durch geeignete Abschätzungen. Der Beweis soll hier weggelassen werden.  $\square$