

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (*Grenze*)

2/3/2

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

- (1) Sei M nach oben beschränkt. a ist *obere Grenze* von M
 $\overline{\text{Df}}$ a ist die kleinste obere Schranke von M .

Bez.: $a = \sup M$ (*Supremum von M*).

- (2) Sei M nach unten beschränkt. a ist *untere Grenze* von M
 $\overline{\text{Df}}$ a ist die größte untere Schranke von M .

Bez.: $a = \inf M$ (*Infimum von M*).

Kapitel 9 Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Untersumme, Obersumme*)

9/2/3

Sei f in I definiert und beschränkt.

- (1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Df}} \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

- (2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Df}} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\begin{aligned} \text{Bez.:} \quad & \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ & \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes*

(Riemann-) *Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

Bez.: $\int_a^b f(x) \, dx$ oder auch $\int_a^b f(x) \, dx$