

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

#### 5.3 Elementare Funktionen

##### (1) Rationale Funktionen 5/3/0

**Definition.**  $f$  ist eine *rationale Funktion* 5/3/1

$\overline{\text{Df}}$   $f$  lässt sich in endlich vielen Schritten mit Hilfe der rationalen Operationen aus der Identitätsfunktion und den konstanten Funktionen erzeugen.

$$\text{Darstellung: } f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0} \quad 5/3/2$$

**Definition.**  $f$  ist eine *ganze rationale Funktion* oder ein *Polynom über  $\mathbb{R}$*  5/3/3

$\overline{\text{Df}}$   $f$  ist eine rationale Funktion, die ohne Division erzeugt werden kann.

$$\text{Darstellung: } f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \quad 5/3/4$$

**Satz 5.9** Die rationalen Funktionen sind stetig. 5/3/5

**Beweis.** Der Beweis folgt sofort aus der Stetigkeit der identischen Funktion, der konstanten Funktionen und der rationalen Operationen.  $\square$  5/3/6

##### (2) Entwickelte algebraische Funktionen 5/3/7

**Definition.**  $f$  ist eine *entwickelte algebraische Funktion* 5/3/8

$\overline{\text{Df}}$   $f$  lässt sich in endlich vielen Schritten mit Hilfe der rationalen Operationen und der Wurzelfunktionen  $\sqrt[n]{\cdots}$  aus der Identitätsfunktion und den konstanten Funktionen erzeugen.

**Bemerkung.** Bisher ist  $\sqrt[n]{x}$  nur für  $n \geq 2$  und  $x \geq 0$  definiert. Für ungerade  $n$  lässt sich  $\sqrt[n]{x}$  auch in dem Bereich  $x < 0$  definieren. Hierfür legen wir fest: 5/3/9

$$\sqrt[n]{x} := -\sqrt[n]{-x}.$$

Für  $n = 1$  gelte generell:  $\sqrt[n]{x} = x$ .

**Beispiele** (für entwickelte algebraische Funktionen) 5/3/10

$$f(x) := \sqrt[n]{x};$$

$$g(x) = \sqrt[n]{ax^2 + bx + \sqrt{x^3 - c} + x - d}$$

**Bemerkung.** Neben den entwickelten algebraischen Funktionen gibt es noch weitere algebraische Funktionen. 5/3/11

Man nennt eine Funktion  $f$  *algebraisch*, wenn  $f$  Lösung einer algebraischen Gleichung ist, d.h.,  $f$  ist eine Funktion, und es gibt Polynome  $p_0(x), \dots, p_n(x)$ , so daß für jedes  $x \in D(f)$  mit  $y = f(x)$  gilt:

$$p_n(x)y^n + \dots + p_1(x)y + p_0(x) = 0.$$

(vgl. Literaturangabe [2], Band I, Nr. 190, Begriff einer algebraischen Funktion)

**Satz 5.10** *Die entwickelten algebraischen Funktionen sind stetig.* 5/3/12

**Beweis.** Der Beweis folgt sofort aus der Stetigkeit der Identitätsfunktion, der konstanten Funktionen, der Wurzelfunktionen (siehe nächste Bemerkung) und der Stetigkeit der rationalen Operationen.  $\square$  5/3/13

**Bemerkung.** Ist  $f(x) = x^n$ ,  $x \geq 0$ , dann ist offenbar  $\sqrt[n]{x}$  die Umkehrfunktion von  $f$ . Nach Satz 5.8 ist  $f^{-1}$  in  $[0, \infty)$  stetig. Für ungerade  $n$  ist  $f$  in  $\mathbb{R}$  injektiv und somit die Umkehrfunktion  $\sqrt[n]{x}$  in ganz  $\mathbb{R}$  definiert und stetig. (vgl. auch Abb. 5.17). Für gerade  $n$  ist  $f$  in  $(-\infty, 0]$  definiert und injektiv, folglich besitzt  $f$  in  $(-\infty, 0]$  ebenfalls eine Umkehrfunktion  $-\sqrt[n]{x}$  (vgl. Abb. 5.16). 5/3/14

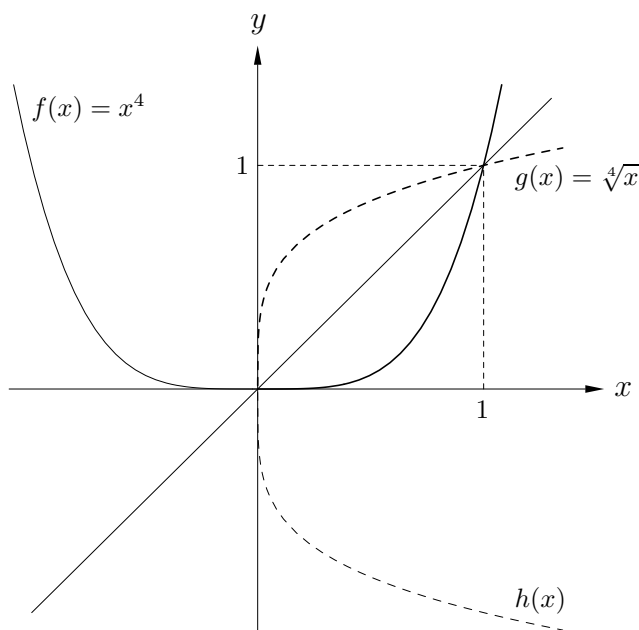


Abb. 5.16 Für gerade  $n$  verlaufen die Graphen der Funktionen  $f(x) = x^n$ ,  $g(x) = \sqrt[n]{x}$  und  $h(x) = -\sqrt[n]{x}$  ähnlich wie die von  $f$ ,  $g$  und  $h$  in dieser Abbildung und in Abb. 5.6. (Dort wird der Spezialfall  $n = 2$  und hier der Fall  $n = 4$  dargestellt.)  $g$  ist die Umkehrfunktion von  $f$  für  $x \geq 0$  und  $h$  die von  $f$  für  $x \leq 0$ .

Die nächste Abbildung zeigt den analogen Fall für ungerade  $n$ . Hierfür existiert die inverse Funktion im gesamten Definitionsbereich von  $f$ .

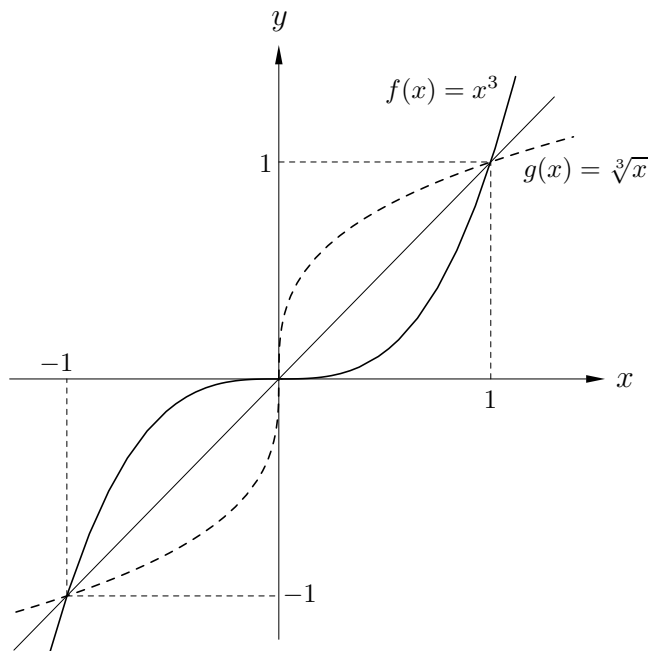


Abb. 5.17 Für ungerade  $n$  verlaufen die Graphen der Funktionen  $f(x) = x^n$ ,  $g(x) = \sqrt[n]{x}$  ähnlich wie die von  $f$  und  $g$  in dieser Abbildung. (Hier wird der Spezialfall  $n = 3$  dargestellt.) Da  $f$  im gesamten Definitionsbereich  $(-\infty, \infty)$  injektiv ist, besitzt  $f$  dort auch eine Umkehrfunktion, nämlich  $g$  (Graph von  $g$  dick gestrichelt).

### (3) Elementare transzendente Funktionen

Neben den algebraischen Funktionen gibt es noch weitere, nämlich die sog. transzendenten Funktionen.

**Definition.**  $f$  ist *transzendent*  $\stackrel{\text{Df}}{=} f$  ist nicht algebraisch.

5/3/15

Die Klasse der transzendenten Funktionen ist sehr unübersichtlich. Daher betrachten wir hier nur die wichtigsten und relativ leicht darstellbaren (die sog. elementaren) transzendenten Funktionen. Wir beginnen mit der Exponentialfunktion und ihren Eigenschaften.

5/3/16

### Exponentialfunktion

5/3/17

In dem Abschnitt über Reihen haben wir schon gesehen, daß die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert (sogar absolut; zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, daß für  $x = 0$  und  $n = 0$   $x^n = 1$  gesetzt wurde).

Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist also durch  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ein Wert  $y$  festgelegt, d.h., durch die Reihe ist eine Funktion  $f(x)$  definiert. (vgl. Abb. 5.18)

$$\text{Bez.: } f(x) := \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

5/3/18

$f(x) = \exp(x)$  heißt *Exponentialfunktion*.

**Satz 5.11** Die Exponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

5/3/19

- (1)  $D(\exp) = \mathbb{R}$ .
- (2) Für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$   
(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).
- (3)  $\exp(0) = 1$  und  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ ,  
für  $x < 0$  ist  $0 < \exp(x) < 1$ , und  
für  $x > 0$  ist  $1 < \exp(x)$ .
- (4)  $\exp$  ist streng monoton wachsend  
(folglich ist  $\exp$  injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion).
- (5)  $\exp(1) = e \quad \left( e = \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$ .
- (6) Für rationale  $x = \pm \frac{m}{n}$  ist  $\exp(x) = e^{\pm \frac{m}{n}}$   
(für irrationale  $x$  ist  $e^x$  bisher nicht definiert!).
- (7)  $\exp$  ist stetig.

**Beweis.** (1) ist trivial, da  $\sum \frac{x^n}{n!}$  für alle  $x$  konvergiert.

5/3/20

(2). Übungsaufgabe!

$$(3). \text{ Es ist } \exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 \implies$$

$$1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x) \implies$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)},$$

hieraus folgt insbesondere  $\exp(x) \neq 0$ . Für  $x > 0$  ist

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{>0} > 1.$$

Für  $x < 0$  ist  $-x > 0$ , also  $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} < 1$ , denn  $\exp(-x) > 1$ .

(4). Es sei  $x_1 < x_2$ ; z.z.:  $\exp(x_1) < \exp(x_2)$ .

Wegen  $x_1 < x_2$  gibt es ein  $h > 0$ , so daß  $x_1 + h = x_2$ . Folglich ist

$$\exp(x_2) = \exp(x_1 + h) = \exp(x_1) \cdot \underbrace{\exp(h)}_{>1} > \exp(x_1).$$

(5). Es ist

$$\exp(1) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \implies$$

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\exp(1)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Dann gilt

$$1 + \frac{1}{n} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^k}{k!} = \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\exp(1)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Weiterhin gilt für  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \left(\exp(1)\right)^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{1}{n}\right) < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k \quad (\text{denn } \frac{1}{k!} < 1 \text{ für } k \geq 2) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{n-1}{n}} = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{n} &< \left(\exp(1)\right)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n-1} \implies \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< \exp(1) < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \implies \\ e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\leq \exp(1) \leq \lim \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = e \implies \\ \exp(1) &= e. \end{aligned}$$

$$(6). \quad 1. \quad x = 0 \implies$$

$$\exp(0) = 1 = e^0 = \left(\exp(1)\right)^0.$$

$$2. \quad x = m > 0 \implies$$

$$\exp(m) = \exp(\underbrace{1 + \dots + 1}_{m\text{-mal}}) = \exp(1) \cdots \exp(1) = \left(\exp(1)\right)^m.$$

$$3. \quad x = \frac{1}{n} \implies$$

$$\exp(1) = \exp\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \implies$$

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\exp(1)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

$$4. \quad x = \frac{m}{n} > 0 \implies$$

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left(\left(\exp(1)\right)^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\exp(1)\right)^{\frac{m}{n}}.$$

$$5. \quad x = -\frac{m}{n} < 0 \implies$$

$$\exp\left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{\exp\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{1}{\left(\exp(1)\right)^{\frac{m}{n}}} = \left(\exp(1)\right)^{-\frac{m}{n}}.$$

(7). Wir zeigen zunächst, daß  $\exp(x)$  in  $a = 0$  stetig ist. Hierzu benutzen wir das Lemma zum Identitätssatz für Potenzreihen (vgl. Satz 4.24).

Wenn  $x_i \neq 0$  und  $x_i \rightarrow 0$ , so  $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{:= c_n} (x_i - 0)^n \xrightarrow{i \rightarrow \infty} c_0 = \frac{1}{0!} = 1$ .

Also  $\exp(x_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \exp(0) = 1$ .

Sei jetzt  $a \in \mathbb{R}$  beliebig,  $x_n \in \mathbb{R}$  und  $x_n \rightarrow a$ .

z.z.:  $\exp(x_n) \longrightarrow \exp(a)$ .

g.z.z.:  $\exp(x_n) - \exp(a) \longrightarrow 0$

$$\exp(x_n) - \exp(a) = \exp(a) \cdot \left( \underbrace{\exp(x_n - a)}_{\longrightarrow 0} - 1 \right) \longrightarrow 0 \implies$$

$$\exp(x_n) \longrightarrow \exp(a),$$

also ist  $\exp$  in  $a$  stetig.  $\square$

**Bemerkung.** Bisher ist  $e^x$  nur für rationale  $x$  definiert. Nach Satz 5.11 (6) gilt für rationale  $x$  stets  $e^x = \exp(x)$ . Wir erweitern jetzt den Definitionsbereich der Funktion  $e^x$  auf ganz  $\mathbb{R}$  wie folgt: 5/3/21

**Definition.** Für  $x \in \mathbb{R}$  sei  $e^x \stackrel{\text{Df}}{=} \exp(x)$ . 5/3/22

Im folgenden schreiben wir für  $\exp(x)$  kurz  $e^x$ . 5/3/23

**Satz 5.12** Für  $e^x$  gilt: 5/3/24

- (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .
- (2)  $e^x$  nimmt jeden Wert  $y > 0$  genau einmal an  
( $\implies W(e^x) = \{y : y > 0\} = (0, \infty)$ ).

**Beweis.** (1). Für  $x > 0$  ist  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + x$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x) = \infty$ . 5/3/25

Für  $x < 0$  ist  $-x > 0$  und somit  $e^x = \frac{1}{e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ , denn  $e^x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$ .

(2). Sei  $y > 0$  beliebig.

Aufgrund der Eigenschaft (1) gibt es Elemente  $a, b \in \mathbb{R}$ , so daß  $e^a < y < e^b$ . Da die Funktion  $e^x$  in  $\mathbb{R}$  stetig ist, nimmt sie nach dem Zwischenwertsatz den Wert  $y$  an. Andererseits kann  $y$  auch nur einmal angenommen werden, denn  $e^x$  ist nach Satz 5.11 (4) streng monoton wachsend.  $\square$

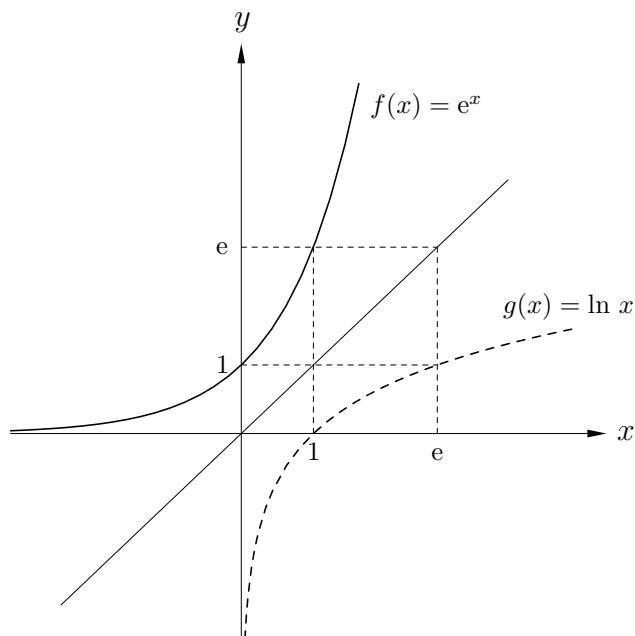


Abb. 5.18 Das Bild zeigt die Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$  und den natürlichen Logarithmus  $g(x) = \ln x$ . Hier ist zu erkennen, daß  $D(e^x) = W(\ln x)$  und  $D(\ln x) = W(e^x)$ .

Weiterhin wird deutlich, daß  $f(0) = e^0 = 1$ ,  $f(1) = e^1 = e$  und  $g(1) = \ln 1 = 0$ ,  $g(e) = \ln e = 1$ .

## Logarithmusfunktion

Aufgrund der strengen Monotonie von  $e^x$  besitzt diese Funktion eine Umkehrfunktion.

**Definition.** (*natürlicher Logarithmus*)

5/3/27

Die Umkehrfunktion von  $e^x$  heißt *natürlicher Logarithmus*.

**Bez.:**  $\ln(x)$  oder  $\ln x$

Es gilt:  $D(\ln) = W(\exp) = (0, \infty]$  und  $W(\ln) = D(\exp) = \mathbb{R}$ .

5/3/28

**Satz 5.13**  $\ln$  hat folgende Eigenschaften:

5/3/29

- (1)  $\ln e = 1$ ,  $\ln e^x = x$  und  $e^{\ln x} = x$ .
- (2)  $\ln$  ist stetig.
- (3)  $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$  (Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus).
- (4)  $\ln 1 = 0$ ,  $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ ;  
für  $0 < x < 1$  ist  $\ln x < 0$ , und für  $1 < x$  ist  $0 < \ln x$ .
- (5)  $\ln$  ist streng monoton wachsend.
- (6) Für rationale  $r$  und reelle  $x > 0$  gilt:  $\ln(x^r) = r \cdot \ln x$   
(für irrationale  $r$  ist  $x^r$  noch nicht definiert!).
- (7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ .

**Beweis.** Der Beweis ergibt sich leicht aus den Eigenschaften von  $e^x$ .

5/3/30

Als Beispiel zeigen wir (3).

Annahme:  $\ln(x \cdot y) \neq \ln x + \ln y$ .

Aus der Injektivität von  $e^x$  folgt dann

$$x \cdot y = e^{\ln(x \cdot y)} \neq e^{\ln x + \ln y} = \underbrace{e^{\ln x}}_{=x} \cdot \underbrace{e^{\ln y}}_{=y} = x \cdot y \quad \text{!} \quad \square$$

## Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$

5/3/31

**Definition.** (*Exponentialfunktion zur Basis  $a$* )

5/3/32

Sei  $a > 0$ .  $a^x \stackrel{\text{Df}}{=} e^{x \cdot \ln a}$  (*Exponentialfunktion zur Basis  $a$* ).

Es gilt:  $D(a^x) = D(e^x) = \mathbb{R}$  und  $W(a^x) = (0, \infty)$ , falls  $a \neq 1$ .

5/3/33

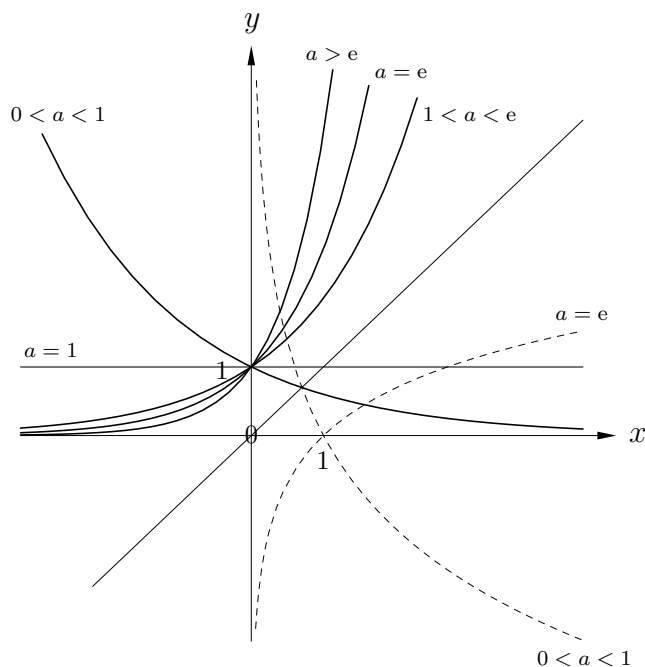


Abb. 5.19 Das Bild zeigt die Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$  bei verschiedenen Basen  $a > 0$  (durchgezogene Kurven). Für  $a \neq 1$  ist  $f(x) = a^x$  injektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion  $\log_a x$ . Die gestrichelten Kurven geben jeweils eine inverse Funktion von  $f(x) = a^x$  an, und zwar für  $a = e$  bzw. für  $0 < a < 1$ .

**Satz 5.14** Es seien  $a, b > 0$ . Dann gilt:

5/3/34

- (1)  $\ln a^x = x \cdot \ln a$ ,
- (2)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ,
- (3)  $(a^x)^y = a^{xy}$ ,
- (4)  $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ ,
- (5)  $a^x$  ist stetig.
- (6) Für  $0 < a < 1$  ist  $a^x$  streng monoton fallend, und für  $1 < a$  ist  $a^x$  streng monoton wachsend, für  $a = 1$  ist  $a^x$  konstant 1.
- (7) Für  $0 < a < 1$  ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$ , und für  $a < 1$  ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ .



**Beweis.** Den Beweis führt man leicht mit Hilfe der Eigenschaften von  $e^x$ .  $\square$  5/3/35

**Logarithmus zur Basis**  $a > 0, a \neq 1$  5/3/36

$a^x$  ist für  $a > 0$  und  $a \neq 1$  streng monoton, also auch injektiv. Folglich besitzt  $a^x$  eine Umkehrfunktion.

**Definition.** (*Logarithmus zur Basis a*) 5/3/37

Sei  $a > 0$  und  $a \neq 1$ . Die Umkehrfunktion von  $a^x$  heißt *Logarithmus zur Basis a*.

**Bez.:**  $\log_a x$  und  $\lg x$  bzw.  $\ln x$ , falls  $a = 10$  bzw.  $a = e$ . 5/3/38

**Folgerung.** Aus der Definition ergibt sich sofort: 5/3/39

$D(\log_a x) = W(a^x) = (0, \infty)$  und  $W(\log_a x) = D(a^x) = \mathbb{R}$ .

**Satz 5.15** Sei  $a > 0$  und  $a \neq 1$ . Dann gilt: 5/3/40

- (1)  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ .
- (2)  $\log_a x$  ist stetig.
- (3)  $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ .
- (4) Für  $0 < a < 1$  ist  $\log_a x$  streng monoton fallend,  
für  $1 < a$  ist  $\log_a x$  streng monoton wachsend.
- (5) Für  $b > 0$  ist  $\log_a b^x = x \cdot \log_a b$  und  $\log_b x = \frac{\ln a}{\ln b} \cdot \log_a x$ .

**Beweis.** (1). Sei  $y = \log_a x$ . Dann ist  $a^y = x$  und somit  $\underbrace{\ln a^y}_{y \cdot \ln a} = \ln x \implies y = \frac{\ln x}{\ln a}$ . 5/3/41

Hieraus folgen leicht die restlichen Behauptungen.  $\square$

**Potenzfunktion** 5/3/42

**Definition.** (*Potenzfunktion mit beliebigem Exponenten*) 5/3/43

Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $x > 0$ .

$x^a \stackrel{\text{Df}}{=} e^{a \cdot \ln x}$  heißt *Potenzfunktion* (mit dem Exponenten  $a$ ).

**Bemerkung.** Die Eigenschaften von  $x^a$  folgen entsprechend der Definition sofort aus den Eigenschaften von  $e^x$  und  $\ln x$ . Insbesondere ist  $x^a$  stetig und 5/3/44

$D(x^a) = D(\ln x) = (0, \infty)$  und  $W(x^a) = \begin{cases} (0, \infty), & \text{für } a \neq 0 \\ \{1\}, & \text{für } a = 0. \end{cases}$

Weiterhin ist  $x^a$  für  $a \neq 0$  streng monoton. Folglich besitzt  $x^a$  eine Umkehrfunktion, die ebenfalls eine Potenzfunktion ist, nämlich die Funktion  $x^{\frac{1}{a}}$  (vgl. Abb. 5.20).

Für gewisse Exponenten  $a$  läßt sich  $x^a$  auch in  $(-\infty, 0)$  definieren, z.B. für alle ganzzahligen  $a$  und auch für alle  $a = \frac{1}{n}$ , falls  $n$  ungerade ist. Dann ist nämlich  $x^a = x^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{-x}$ , und für  $-x > 0$  ist die  $n$ -te Wurzel schon definiert.

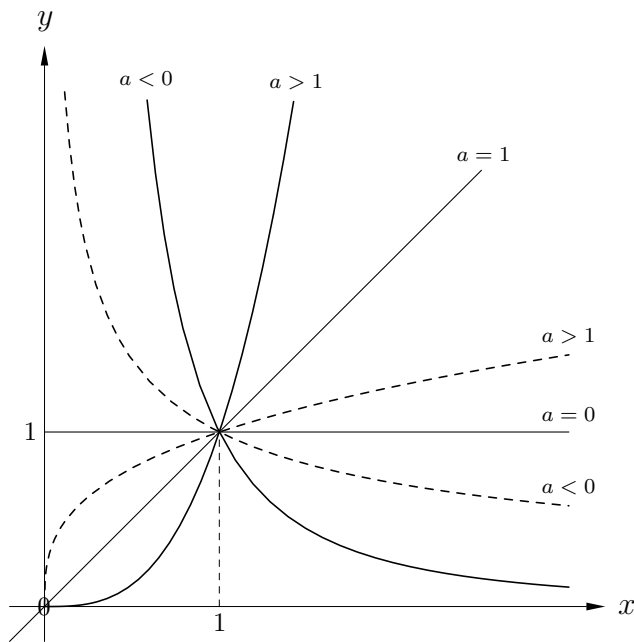


Abb. 5.20 Die Abbildung zeigt die Potenzfunktion  $f(x) = x^a$  mit verschiedenen Exponenten  $a \in \mathbb{R}$ . Für  $a \neq 0$  und  $x > 0$  ist  $f$  injektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion. Die gestrichelten Kurven zeigen die Umkehrfunktionen von  $f(x) = x^a$  für  $a > 1$  bzw.  $a < 0$ . Die inverse Funktion von  $x^a$  ist  $x^{\frac{1}{a}}$  und somit wieder eine Potenzfunktion. Für  $a = 1$  (also  $x^a = x = I(x)$ ) ist die Umkehrfunktion identisch mit der Ausgangsfunktion  $I(x)$ . Ist  $a = 0$ , dann ist  $x^a$  konstant.

## Trigonometrische Funktionen

In der Schule werden  $\sin$  und  $\cos$  in der Regel am Einheitskreis eingeführt (vgl. Abb. 5.21 und 5.22).

Der Anschauung entnimmt man:

- (1)  $\sin 0 = 0$ ,  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ,  $\cos 0 = 1$ ,  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ .
- (2)  $\sin$  und  $\cos$  sind periodisch mit der kleinsten Periode  $2\pi$ .
- (3)  $\sin$  ist ungerade, d.h.,  $\sin(-x) = -\sin x$ .
- (4)  $\cos$  ist gerade, d.h.,  $\cos(-x) = \cos x$ .
- (5)  $\sin$  ist an der Stelle 0 stetig. Hierbei benutzt man, daß  $|\sin x| \leq |x|$  ist, was wiederum der Anschauung entnommen wird.
- (6)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  (hier wird der Satz des Pythagoras vorausgesetzt).

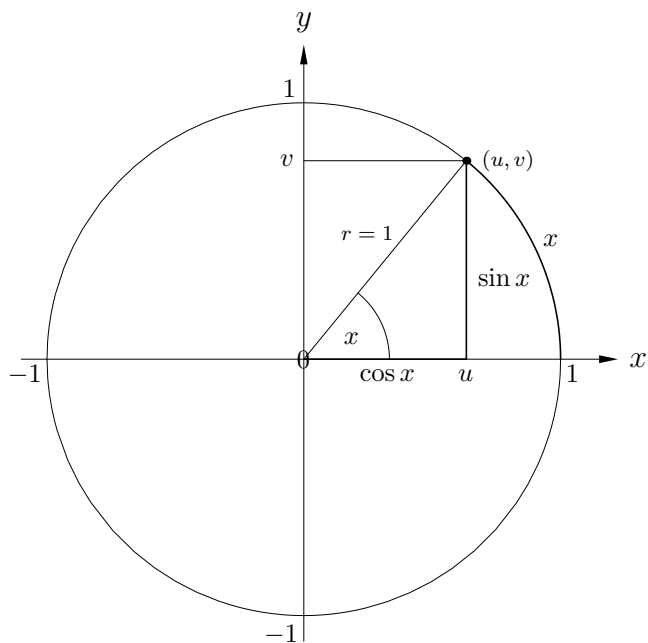


Abb. 5.21 Die Abbildung zeigt, wie am Einheitskreis (:= Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt  $(0,0)$ ) die Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  eingeführt werden können. Der Winkel  $x$  ist in Bogenmaß gemessen (:= Länge des durch dickere Strichstärke hervorgehobenen Kreisbogenstücks).  $\cos$  bzw.  $\sin$  sind dann definiert durch:  $\cos x := u$ ,  $\sin x := v$ .

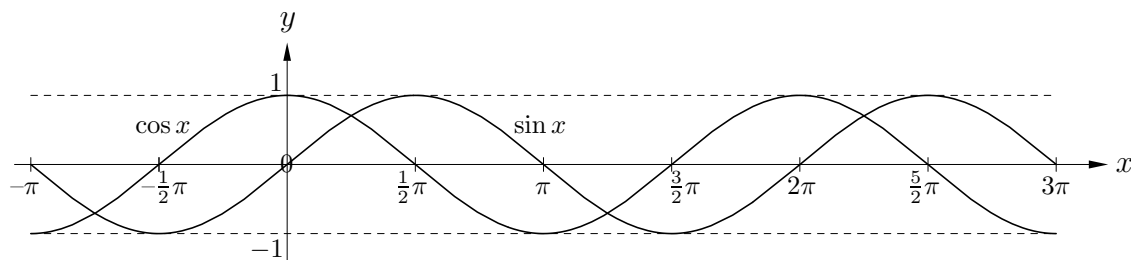


Abb. 5.22 zeigt  $\sin$  und  $\cos$  im Intervall  $[-\pi, 3\pi]$

Die Vorteile dieser Methode bestehen darin, daß der Schüler wesentliche Eigenschaften der ansonsten komplizierten Funktionen der Anschauung entnimmt. Die Nachteile sind allerdings darin zu sehen, daß die Anschauung als Beweismittel überhaupt zugelassen wird und daß z.B. die Zahl  $\pi$  und Eigenschaften des Kreises als bekannt vorausgesetzt werden.

Wir kommen jetzt zu einer anderen Definition der trigonometrischen Funktionen.

Hierzu betrachten wir die Exponentialfunktion  $e^z$ , die bekanntlich mit Hilfe der Potenzreihe  $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  definiert ist. Diese Potenzreihe ist (wie früher gezeigt wurde) für alle komplexen Zahlen  $z$  absolut und damit auch unbedingt konvergent. Folglich ist  $\exp(z)$  auch in der gesamten komplexen Ebene definiert. Wir betrachten jetzt den Spezialfall  $z = ix$  und berechnen von  $e^{ix}$  den Real- und Imaginärteil:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{\overline{\text{Df}} \cos x} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\overline{\text{Df}} \sin x}.
\end{aligned}$$

Also  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . Damit ergibt sich die folgende Definition.

**Definition.**  $(\cos, \sin)$

5/3/45

$$\cos x \stackrel{\overline{\text{Df}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x \stackrel{\overline{\text{Df}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Beide Reihen konvergieren für alle  $x \in \mathbb{R}$  absolut. Folglich sind  $\sin$  und  $\cos$  in  $\mathbb{R}$  definiert. 5/3/46

An dieser Stelle ist nicht einzusehen, daß die so eingeführten Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  dieselben sein sollen, die man anschaulich am Einheitskreis gewinnt. Erst mit Hilfe der Differentialrechnung werden wir später nachweisen können, daß es sich tatsächlich um die gleichen Funktionen handelt.

**Satz 5.16**  $\sin$  und  $\cos$  haben folgende Eigenschaften:

5/3/47

- (1)  $\sin$  und  $\cos$  sind in  $\mathbb{R}$  definiert,  $\sin 0 = 0$ ,  $\cos 0 = 1$ .
- (2)  $\sin$  ist ungerade und  $\cos$  ist gerade.
- (3)  $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$  ( $\implies \sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ).
- (4)  $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$  ( $\implies \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ).
- (5)  $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$ .
- (6)  $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}$ .
- (7)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  ( $\implies |\sin x|, |\cos x| \leq 1$ ).
- (8)  $\sin$  und  $\cos$  sind stetig.

**Beweis.** (1) ist nach Definition trivial.

5/3/48

(2) folgt unmittelbar aus der Definition von  $\sin$  und  $\cos$ .

(3) und (4) zeigt man mit Hilfe des Cauchyprodukts der entsprechenden Reihen (vgl. Übungsaufgaben).

(5) und (6) folgen aus (3) und (4), indem man auf der linken Seite von (5) bzw. (6) jeweils  $x, y$  in der Form  $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$  und  $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$  schreibt.

(7). Nach (1) ist  $\cos 0 = 1$ ; folglich erhält man mit Hilfe von (4):

$$1 = \cos 0 = \cos(x + (-x)) = \cos x \cdot \underbrace{\cos(-x)}_{=\cos x} - \sin x \cdot \underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin x} = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Damit gilt auch

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \sin^2 x \leq 1,$$

und schließlich

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1.$$

(8).  $\sin$  und  $\cos$  sind durch Potenzreihen definiert, diese sind in  $x = 0$  stetig (vgl. Beweis zu Satz 5.11 (7)). Also gilt:

Wenn  $x \rightarrow 0$ , so  $\sin x \rightarrow \sin 0 = 0$  und  $\cos x \rightarrow \cos 0 = 1$ .

Wir beweisen jetzt die Stetigkeit von  $\sin$  an einer beliebigen Stelle  $a \neq 0$ .

g.z.z.: Wenn  $x \rightarrow a$ , so  $\sin x \rightarrow \sin a$ , d.h.,  $\sin x - \sin a \rightarrow 0$ .

Es sei  $x \rightarrow a$ . Nach (5) gilt:

$$\sin x - \sin a = 2 \cdot \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}.$$

Wegen  $x \rightarrow a \iff \frac{x-a}{2} \rightarrow 0$  erhält man

$$|\sin x - \sin a| = 2 \cdot \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \cdot \underbrace{\left| \cos \frac{x+a}{2} \right|}_{\leq 1} \leq \underbrace{\left| \sin \frac{x-a}{2} \right|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

Für  $\cos$  ergibt sich mit Hilfe von (6) die analoge Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.** Die Eigenschaften (3) – (6) im Satz 5.16 heißen auch *Additionstheoreme* 5/3/49  
von  $\sin$  und  $\cos$ .

Im folgenden wird die Zahl  $\pi$  definiert. Es genügt offensichtlich  $\frac{\pi}{2}$  festzulegen, und dies wird sich als kleinste positive Nullstelle von  $\cos$  erweisen. Dazu müssen wir zeigen, daß  $\cos$  überhaupt eine kleinste positive Nullstelle besitzt. Hierzu benötigen wir einige Lemmata.

**Lemma 1.**  $\cos 2 < 0$ .

**Beweis.** Es ist

5/3/50

$$\begin{aligned} \cos 2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4^n}{(2n)!} \\ &= \underbrace{1 - 2 + \frac{4^2}{4!}}_{=-\frac{1}{3} < 1} + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4^n}{(2n)!}}_{(*)}. \end{aligned}$$

( $\star$ ) ist eine alternierende Reihe; das erste Glied (für  $n = 3$ ) ist negativ und  $\left(\frac{4^n}{(2n)!}\right)$  ist eine monoton fallende Nullfolge. Folglich ist die Reihe konvergent, und ihr Wert (vgl. Beweis des Leibniz-Kriteriums) ist negativ. Insgesamt gilt damit  $\cos 2 < 0$ .  $\square$

**Lemma 2.**  $\cos$  hat in  $[0, 2]$  eine Nullstelle. 5/3/51

**Beweis.** Es ist  $\cos 0 = 1 > 0 > \cos 2$ . 5/3/52  
 $\cos$  ist im gesamten Definitionsbereich stetig, also auch in  $[0, 2]$ . Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein  $c \in (0, 2)$ , so daß  $\cos c = 0$ .  $\square$

Wir zeigen jetzt, daß  $c$  die einzige Nullstelle von  $\cos$  in  $[0, 2]$  ist. Dann besitzt  $\cos$  eine kleinste positive Nullstelle, die mit  $\frac{\pi}{2}$  bezeichnet wird. Dazu benötigen wir aber das folgende 5/3/53

**Lemma 3.**  $\sin x > 0$  für alle  $x \in (0, 2)$ .

**Beweis.** Übungsaufgabe! (Hinweis: Beweis ähnlich wie für Lemma 1)  $\square$  5/3/54

**Korollar.**  $\cos$  hat in  $[0, 2]$  genau eine Nullstelle. 5/3/55

**Beweis.** Angenommen, es existieren  $x, y \in [0, 2]$ , mit  $x \neq y$  und  $\cos x = \cos y = 0$ . 5/3/56  
 Sei o.B.d.A.  $y < x$ . Dann gilt:

$$0 = \cos x - \cos y = -2 \cdot \underbrace{\sin \frac{x-y}{2}}_{\in (0,2)} \cdot \underbrace{\sin \frac{x+y}{2}}_{\in (0,2)} \neq 0,$$

denn nach Lemma 2 ist  $\sin$  in  $(0, 2)$  positiv.  $\not\equiv!$   $\square$

**Definition.**  $(\pi)$   $\frac{\pi}{2}$  wird als die kleinste positive Nullstelle von  $\cos$  definiert 5/3/57  
 (d.h.,  $\pi = 2c = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \implies 0 < \pi < 4$ ).

**Bemerkung.** Mit Hilfe der Additionstheoreme lassen sich weitere Eigenschaften für  $\sin$  und  $\cos$  herleiten. 5/3/58

(1) Es gilt  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  speziell für  $x = \frac{\pi}{2}$ . Wegen  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  ist  $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$ .

Weiterhin ist  $\sin x > 0$  für  $x \in (0, 2)$ . Folglich ist  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ .

(2)  $\cos \pi = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} = -1$  usw.

**Definition.** (*periodische Funktion*)

5/3/59

$f$  ist periodisch mit der Periode  $p$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $x$  gilt:

(1)  $x \in D(f) \iff x + p \in D(f)$  und

(2)  $f(x) = f(x + p)$ .

**Satz 5.17**  $\sin$  und  $\cos$  sind periodisch mit der Periode  $2\pi$ , und es ist  
 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$  und  $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ .

5/3/60

**Beweis.** Den Beweis führt man leicht mit Hilfe der Additionstheoreme.  $\square$

5/3/61

## Tangens, Cotangens

5/3/62

**Definition.** (*Tangens, Cotangens*)

5/3/63

$$\tan x \stackrel{\overline{\text{Df}}}{=} \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x \stackrel{\overline{\text{Df}}}{=} \frac{\cos x}{\sin x}.$$

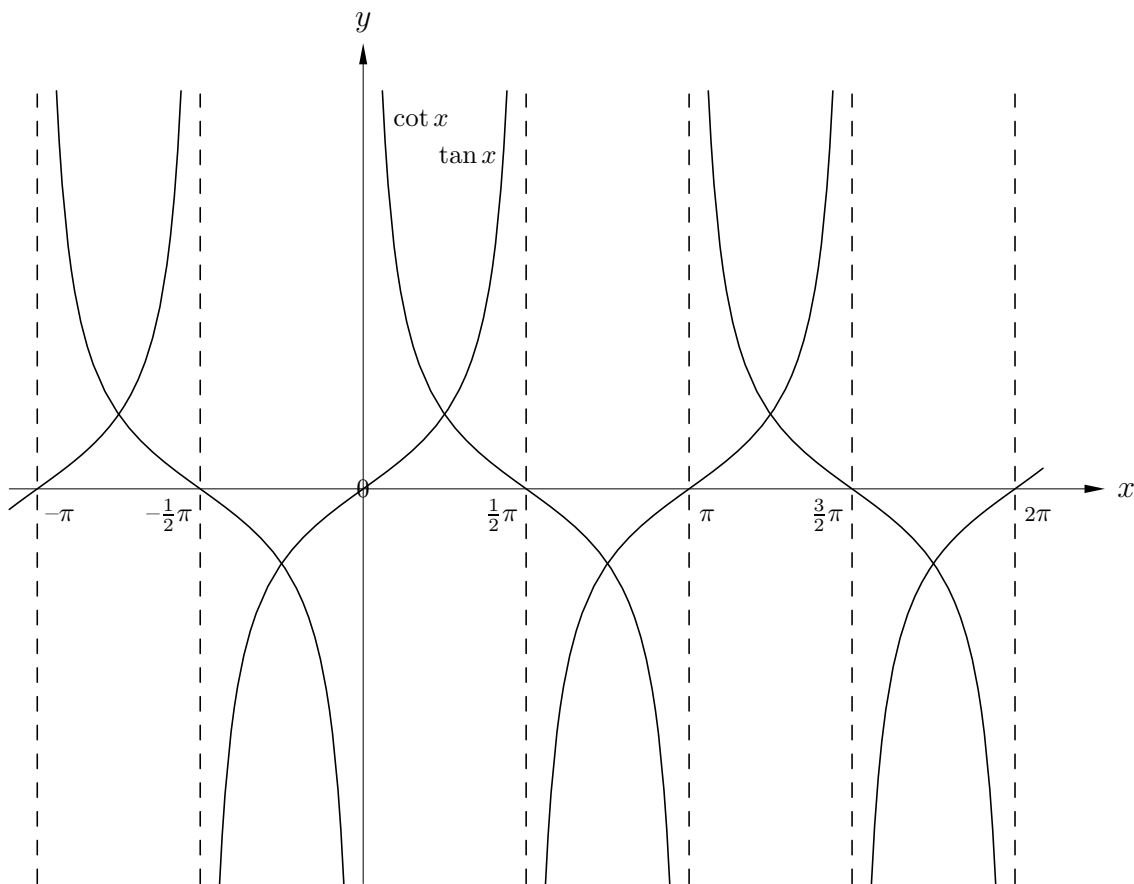


Abb. 5.23 zeigt  $\tan$  und  $\cot$  im Intervall  $[-\pi, 3\pi]$

**Bemerkung.** Aus der Definition und den Eigenschaften von  $\sin$  und  $\cos$  erhält man sofort die wichtigsten Eigenschaften von  $\tan$  und  $\cot$ . Insbesondere gilt:

$$D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\}, \quad W(\tan) = \mathbb{R};$$

$$D(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{x : \sin x = 0\}, \quad W(\cot) = \mathbb{R}.$$

$\tan$  und  $\cot$  sind als Quotienten von stetigen Funktionen wieder stetig;

$\tan$  und  $\cot$  sind wie  $\sin$  und  $\cos$  periodisch, allerdings mit der Periode  $\pi$ .

Ähnlich wie  $\sin$  und  $\cos$  lassen sich auch  $\tan$  und  $\cot$  am Einheitskreis geometrisch interpretieren (vgl. Abb 5.21 und 5.24).

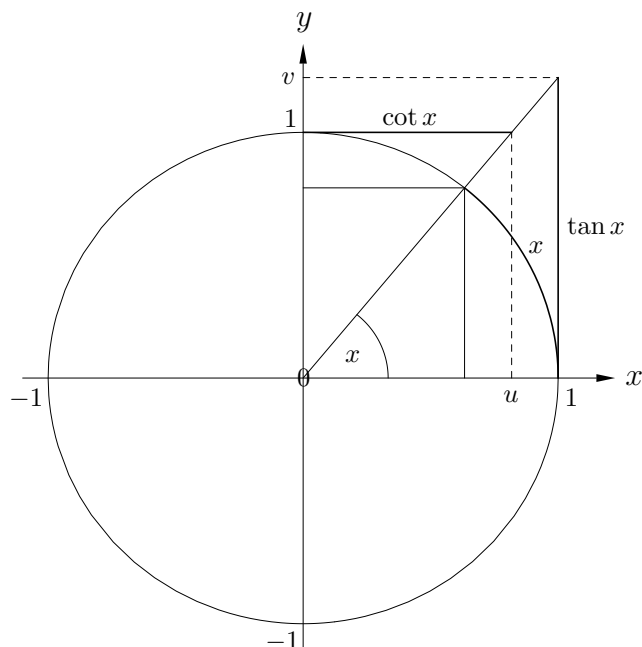


Abb. 5.24 In der Abbildung ist zu erkennen, wie am Einheitskreis die Funktionen  $\tan$  und  $\cot$  in Abhängigkeit von dem Winkel  $x$  (alle hervorgehoben durch dickere Strichstärke;  $x$  gemessen in Bogenmaß) veranschaulicht werden können.  $\cot$  bzw.  $\tan$  sind dann definiert durch:  $\cot x := u$ ,  $\tan x := v$ .

Die trigonometrischen Funktionen  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ ,  $\cot$  sind als periodische Funktionen **nicht** in ihren gesamten Definitionsbereichen injektiv. In den (maximalen) Teilintervallen, in denen sie jedoch injektiv sind (dort sind sie auch stetig und daher streng monoton), besitzen sie Umkehrfunktionen (die sog. *Arcus-Funktionen*; Arcus oder Arkus := Bogenmaß eines Winkels), die der Reihe nach mit  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\arctan$ ,  $\text{arccot}$  bezeichnet werden.

Zur Veranschaulichung der Arcus-Funktionen betrachte man zunächst die Abb. 5.21. Dort ist der Winkel  $x$  in Bogenmaß gegeben (das ist bekanntlich die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis zwischen den Punkten  $(1,0)$  und  $(u,v)$  im entgegengesetzten Uhrzeigersinn). Für fixiertes  $x$  ist  $\sin x$  symbolisiert durch die Strecke der Länge  $v$  zwischen den Punkten  $(u,0)$  und  $(u,v)$ . Also

$$\sin x = v \implies \arcsin(\sin x) = \arcsin v = x \quad (:= \text{die zu } \sin x \text{ gehörende Bogenlänge}).$$

Das Analoge gilt für Cosinus, Tangens und Cotangens.

Abschließend werden noch die trigonometrischen Funktionen mit ihren Umkehrfunktionen (in geeigneten Intervallen) dargestellt (vgl. Abb. 5.25 – 5.28). Sinus wird in  $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$  und in  $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$  betrachtet, Cosinus in  $[0, \pi]$  und in  $[\pi, 2\pi]$ . Tangens und Cotangens werden in  $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$  bzw. in  $[0, \pi]$  dargestellt.



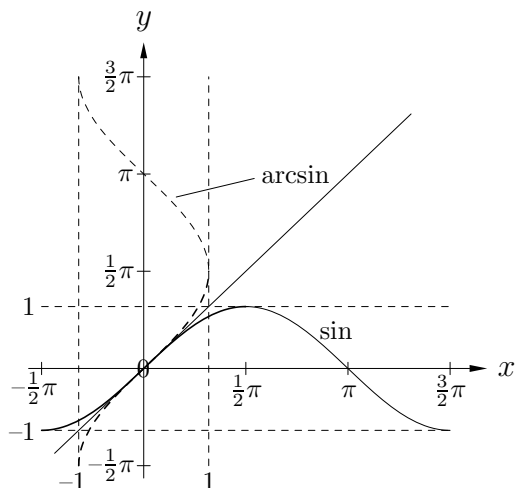


Abb. 5.25 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Sinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Sinus injektiv ist.

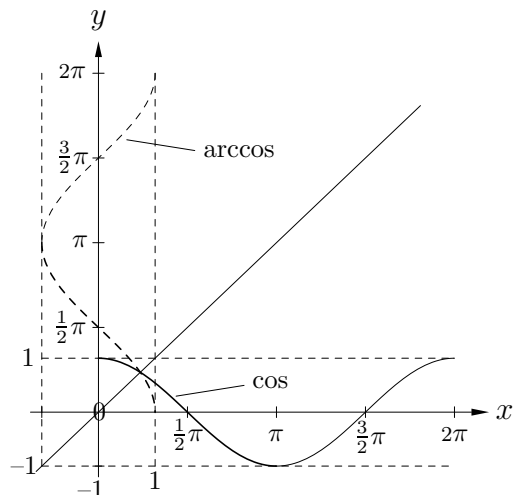


Abb. 5.26 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Cosinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Cosinus injektiv ist.

Analog wie in den vorhergehenden Abbildungen verfahren wir jetzt noch mit Tangens und Cotangens.

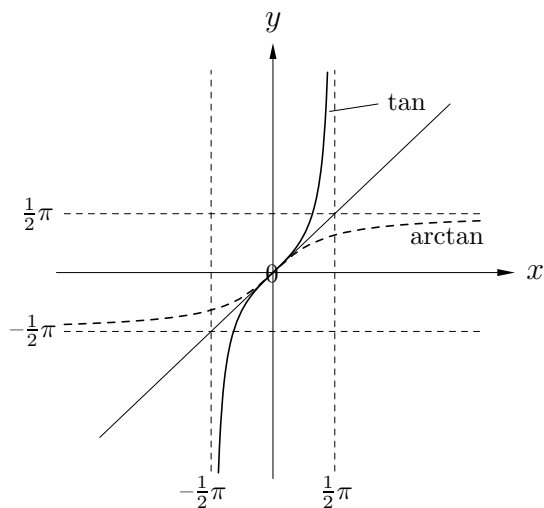


Abb. 5.27 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Tangens in dem Intervall  $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ .

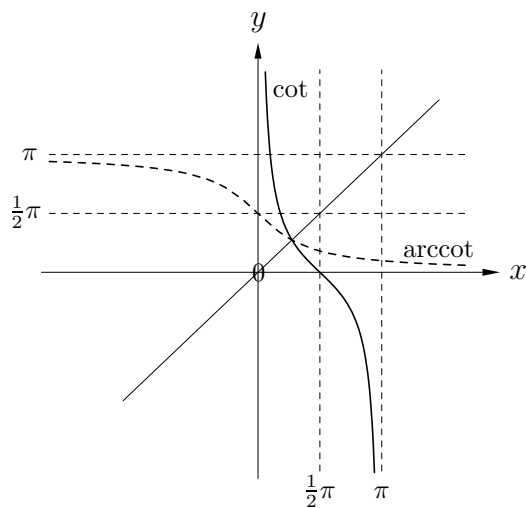


Abb. 5.28 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Cotangens in dem Intervall  $(0, \pi)$ .