

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Beispiele.

1. (Anwendung des Leibniz-Kriteriums)

4/1/30/1

Behauptung: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}}_{:=a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ ist konvergent.

Offenbar ist $\sum a_n$ alternierend, $a_n \rightarrow 0$ und $|a_n| = \frac{1}{n+1}$ monoton fallend, folglich ist die betrachtete Reihe konvergent.

Sei $a = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \implies a_0 = 1 > a > 0$

(vgl. Beweis zu Satz 4.6; mit dem späteren Korollar zu Satz 7.11 läßt sich leicht zeigen, daß $a = \ln 2$).

2. (Die Glieder einer Reihe dürfen nicht beliebig „umsortiert“ werden.)

4/1/30/2

Wir betrachten die Reihe aus Beispiel 1 und nehmen an, daß man die Glieder einer Reihe beliebig umsortieren darf, ohne das Konvergenzverhalten zu verändern. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots \quad (\text{umsortiert}) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \pm \dots}_{=0} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots \quad (0 \text{ addiert}) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \dots \quad (\text{umsortiert}) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \dots \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \pm \dots = 0 \quad \text{!} \quad (\text{umsortiert und addiert}) \end{aligned}$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent. (**Harmonische Reihe**)

4/1/30/3

Diese Reihe dient gleichzeitig als Beispiel dafür, daß eine konvergente Reihe nicht absolut konvergent sein muß. (vgl. Beispiel 1.)

Es sei $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Wir betrachten jetzt die 2^n -te Partialsumme

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

und bilden

$$\begin{aligned}
S_{2^{n+1}} - S_{2^n} &= \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^n + 2^n} \\
&\quad (\text{jeder dieser } 2^n \text{ Summanden ist größer oder gleich } \frac{1}{2^{n+1}}) \\
&\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{für beliebiges } n.
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
S_{2^n} &= S_{2^0} - S_{2^0} + S_{2^1} - S_{2^1} + \cdots + S_{2^{n-1}} - S_{2^{n-1}} + S_{2^n} \\
&= \underbrace{S_{2^0}}_{=1} + \underbrace{S_{2^1} - S_{2^0}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{S_{2^2} - S_{2^1}}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{S_{2^n} - S_{2^{n-1}}}_{\geq \frac{1}{2}} \\
&\geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Die Teilfolge (S_{2^i}) von (S_n) ist also unbeschränkt, und somit ist $(S_n) = \sum \frac{1}{n}$ nicht konvergent.

Da (S_n) monoton wächst, ist $\sum \frac{1}{n}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

4. Ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ alternierend und $a_i \rightarrow 0$ aber $(|a_i|)$ nicht monoton fallend, dann muß $\sum a_i$ nicht konvergent sein. 4/1/30/4

Sei $a_i = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{falls } i \text{ ungerade und } i = 2n+1, \\ -\frac{1}{2^n}, & \text{falls } i \text{ gerade und } i = 2n. \end{cases}$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = -\frac{1}{2^0} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \mp \cdots$$

Wir betrachten $S_{2^{m+1}} = a_0 + \cdots + a_{2^{m+1}}$.

Summiert man in dieser endlichen Summe die a_i mit ungeradem Index i , so erhält man

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^m} \geq 1 + m \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{vgl. Beispiel 3.})$$

Die Summe der a_i mit geradem Index ergibt

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^{2^m}} &= -\left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^m} \right) = \\
&= -\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{m+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = -2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{m+1}} \right) \geq -2 \quad (\text{vgl. geometrische Reihe})
\end{aligned}$$

(denn für $i = 2^{m+1} = 2n$ ist $n = 2^m$, also $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2^m}}$).

Damit erhalten wir insgesamt

$$S_{2^{m+1}} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^m}}_{\geq 1 + \frac{m}{2}} - \underbrace{\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^m}\right)}_{\leq 2}$$

$$\geq 1 + \frac{m}{2} - 2 \geq \frac{m}{2} - 1 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty.$$

Folglich ist (S_{2^n}) eine unbeschränkte Teilfolge von (S_n) und somit $\sum a_i$ nicht konvergent.

5. Beispiel dafür, wie der junge Leibniz 1672 in Paris – er sollte dort seine „Rechenkünste“ unter Beweis stellen – mit falschen Hilfsmitteln den richtigen Wert einer Reihe berechnet hat (vgl. Wußing, H. und Wolfgang Arnold. Biographien bedeutender Mathematiker, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, 1975, S. 212).

4/1/30/5

Gegeben ist die Reihe $A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{1 + \cdots + n} + \cdots$.

Man berechne den Wert der Reihe.

Ansatz von Leibniz:

Sei $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ (harmonische Reihe; nicht konvergent!) und

$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots$. Dann ist (nach Leibniz):

$$\begin{aligned} B - 1 + \frac{1}{2}A &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots\right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{=1} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right)}_{=\frac{1}{3}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right)}_{=\frac{1}{4}} + \cdots \\ &= B. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$B - 1 + \frac{1}{2}A = B \quad \text{und damit} \quad A = 2.$$

Erstaunlicherweise stimmt der Wert. Die Methoden sind aber fehlerhaft, da mit divergenten Reihen so umgegangen wurde, als wären sie konvergent.

Es soll jetzt noch eine exakte Lösung gegeben werden.

Es ist (nach Gauß 1777 – 1855)

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \implies \frac{1}{1 + \cdots + n} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right). \end{aligned}$$

Es ist $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; also

$$\begin{aligned}
S_n &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_0 - \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_0 - \cdots - \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_0 - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2.
\end{aligned}$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \cdots + i} = 2.$$