

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

**Satz 6.9** Sei  $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ ,  $a$  ein Häufungspunkt von  $D(f)$  und  $a \in D(f)$ .  
Dann gilt:  $f$  ist in  $a$  stetig gdw  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existiert und  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . 6/2/10

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.1 Differenzierbarkeit

**Bemerkung.** Aus der partiellen Differenzierbarkeit nach allen Variablen folgt im allgemeinen noch nicht die Stetigkeit, wie das folgende Beispiel zeigt. 8/1/11

**Beispiel.**

8/1/12

Es sei  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq \bar{0}, \\ 0, & \text{falls } (x, y) = \bar{0}. \end{cases}$

Dann ist  $f$  an der Stelle  $(0, 0)$  nach  $x$  und  $y$  differenzierbar, denn es ist

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) = 0$$

und

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \frac{0 - 0}{y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) = 0.$$

Aber  $f$  ist in  $\bar{0}$  nicht stetig, denn anderenfalls wäre  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$ .

Speziell für  $x = y$ ,  $x \neq 0$  und  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  gilt dann

$$f(x, y) = f(x, x) = \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = 1 \not\rightarrow 0. \quad \text{N!}$$

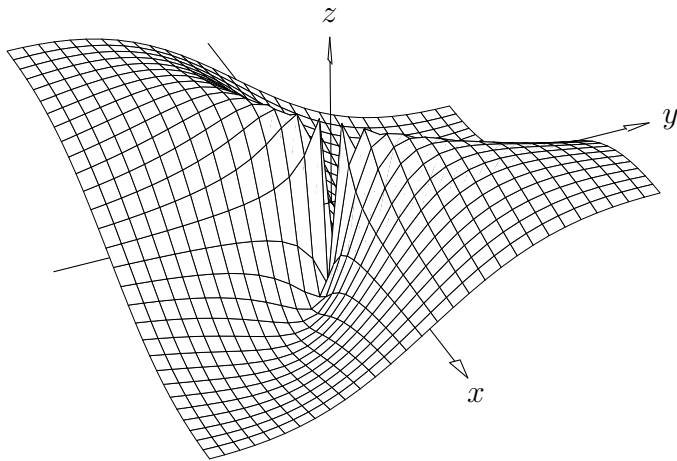


Abb. 8.3 Die Abbildung zeigt die Funktion  $f$  aus dem letzten Beispiel. In jeder Umgebung des Nullpunktes nimmt  $f$  die Werte  $\pm 1$  an, folglich kann die Funktion dort nicht stetig sein. In  $(0,0)$  selbst ist der Anstieg von  $f$  in Richtung der  $x$ -Achse und der  $y$ -Achse jeweils null.