

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.2 Dreifachintegrale

Dreifachintegrale sind völlig analog zu Doppelintegralen definiert.

10/2/0

Dazu seien $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$ Intervalle in \mathbb{R} ,

D sei der Quader $D := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_3, b_3]$, und

$f(x, y, z) : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei in D definiert und beschränkt.

Eine *Zerlegung* $\bar{\mathfrak{z}}$ von D entsteht durch Zerlegungen $\bar{\mathfrak{z}}_\nu := (a_\nu^\nu, \dots, a_{n_\nu+1}^\nu)$ von $[a_\nu, b_\nu]$, $\nu = 1, \dots, 3$. Dadurch entstehen kleinere Quader

$$D_{ijk} := [a_i^1, a_{i+1}^1] \times [a_j^2, a_{j+1}^2] \times [a_k^3, a_{k+1}^3] .$$

Wegen der Beschränktheit von f in D existieren insbesondere $h_{ijk} := \inf_{\bar{x} \in D_{ijk}} f(\bar{x})$ und $H_{ijk} := \sup_{\bar{x} \in D_{ijk}} f(\bar{x})$. Damit lassen sich wie früher *Unter-* und *Obersummen* definieren, wobei D_{ijk} wieder für den Quader selbst und auch für dessen Rauminhalt steht.

Definition. (*Untersumme, Obersumme*)

10/2/1

(1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ heißt *Untersumme* von f bei der Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Def}}{\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})} := \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} D_{ijk} \cdot h_{ij} .$$

(2) $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ heißt *Obersumme* von f bei der Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Def}}{\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})} := \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} D_{ijk} \cdot H_{ij} .$$

Satz 10.6 Es sei f in D definiert und beschränkt und $\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\mathfrak{z}}', \bar{\mathfrak{z}}_1, \bar{\mathfrak{z}}_2$ seien beliebige Zerlegungen von D . Dann gilt:

10/2/3

(1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.

(2) $D \cdot \inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ und $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq D \cdot \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x})$.

(3) Ist $\bar{\mathfrak{z}}'$ eine Verfeinerung von $\bar{\mathfrak{z}}$, dann gilt $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.

(4) Es ist stets $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_1) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_2)$.