

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

#### 3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Abschließend betrachten wir noch Funktionenfolgen. Dazu sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $M$  definierte Funktion. Weiterhin sei auch  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in  $M$  definiert. 3/2/10

**Definition.** (*Konvergenz von Funktionenfolgen*)

(1) Die Funktionenfolge  $(f_n)$  konvergiert an der Stelle  $a \in M$  gegen  $b$

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = b.$$

(2)  $(f_n)$  konvergiert in  $M$  gegen die Funktion  $f$

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } a \in M \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a),$$

(d.h., für jedes fixierte  $a \in M$  konvergiert die Zahlenfolge  $(f_n(a))$  gegen die Zahl  $f(a)$ ; diese Art Konvergenz nennen wir auch *punktweise Konvergenz*).

$$\text{Bez.: } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

(3)  $(f_n)$  konvergiert in  $M$

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert eine Funktion } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ so daß } (f_n) \text{ in } M \text{ gegen } f \text{ konvergiert.}$

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

#### 5.2 Stetigkeit

**Definition.** (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ .

(1)  $f$  ist stetig in  $M$

$\stackrel{\text{Df}}{=} f$  ist in jedem Punkt  $a \in M$  stetig.

(2)  $f$  ist stetig

$\stackrel{\text{Df}}{=} f$  ist im gesamten Definitionsbereich  $D(f)$  stetig.

**Definition.** (*Grenzwert bei Funktionen*)

5/2/6

Es sei  $a$  ein Häufungspunkt von  $D(f)$  ( $a$  muß nicht selbst zu  $D(f)$  gehören).

$f$  besitzt an der Stelle  $a$  den Grenzwert  $c$

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0, \text{ so daß für jedes } x \in D(f) \text{ mit } x \neq a \text{ gilt:}$

Wenn  $|x - a| < \delta$ , so  $|f(x) - c| < \varepsilon$ .

$$\text{Bez.: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$$

### Übungsaufgaben

13. Untersuchen Sie die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$  auf Stetigkeit.

5/5/13