

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

Definition. (*Folge*)

3/0/1

F ist eine *Folge* (von reellen Zahlen)

$\overline{\text{Df}}$ F ist eine Abbildung von \mathbb{N} in \mathbb{R} ,

d.h., jeder natürlichen Zahl n wird eine reelle Zahl a_n zugeordnet, so daß $F(n) = a_n$.

Bez.: $F = (a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ oder einfach $F = (a_n)$.

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition.

3/1/2

(1) (a_n) *konvergiert* (oder ist *konvergent*) in \mathbb{R}

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so daß (a_n) gegen a konvergiert.

(2) (a_n) *divergiert* (oder ist *divergent*) in \mathbb{R}

$\overline{\text{Df}}$ (a_n) ist nicht konvergent in \mathbb{R} .

Definition. (*Beschränktheit bei Folgen*)

3/1/11

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

(1) (a_n) ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c$ (bzw. $c \leq a_n$) für jedes n .

(2) (a_n) ist *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$ (a_n) ist nach oben und nach unten beschränkt.

Definition. (*Häufungspunkt einer Folge*)

3/1/16

Es sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

a ist ein *Häufungspunkt* (oder *Verdichtungspunkt*) von (a_n)

$\overline{\text{Df}}$ In jeder ε -Umgebung von a liegen unendlich viele Folgeglieder a_n

(die untereinander auch gleich sein dürfen, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes n_0 gibt es ein $n \geq n_0$, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$).

Definition. (*monoton wachsend bzw. monoton fallend*)

3/1/31

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

(1) (a_n) ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$).

(2) (a_n) ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$).

Für „monoton wachsend“ bzw. „monoton fallend“ schreiben wir gelegentlich auch ein-

3/1/32

fach „*monoton*“.

Übungsaufgaben

1. Geben Sie je eine Folge (a_n) mit den folgenden Eigenschaften an:

3/3/1

- (a) (a_n) konvergiert gegen $\frac{1}{2}$,
- (b) 3 ist Häufungspunkt von (a_n) aber nicht Grenzwert,
- (c) (a_n) hat genau drei Häufungspunkte,
- (d) 5 ist Grenzwert, und (a_n) ist nicht monoton,
- (e) (a_n) ist nicht beschränkt, und 0 ist Häufungspunkt.