

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.1 Konvergenz von Reihen

**Definition.** (Konvergenz von Reihen)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  konvergiert (gegen  $a$ )  $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$  konvergiert (gegen  $a$ ).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

$a$  heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

**Satz 4.6** (Leibniz-Kriterium)

4/1/26

Ist  $\sum a_i$  alternierend und  $\lim a_i = 0$  und  $(|a_i|)_{i=0,1,2,\dots}$  monoton fallend, dann ist  $\sum a_i$  konvergent.

**Satz 4.9** (Wurzelkriterium)

4/1/35

Es sei  $(a_i)$  eine beliebige Folge. Dann gilt:

- (1) Existiert ein  $q$  mit  $0 < q < 1$ , so daß für jedes  $i$  gilt:  $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$ , dann ist  $\sum a_i$  absolut konvergent.
- (2) Ist  $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$  für alle  $i$ , dann ist  $\sum a_i$  divergent.

**Satz 4.10** (Quotientenkriterium)

4/1/38

Es sei  $a_i \neq 0$  für jedes  $i$ . Dann gilt:

- (1) Existiert ein  $q$  mit  $0 < q < 1$ , so daß für jedes  $i$  gilt:  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$ , dann ist  $\sum a_i$  absolut konvergent.
- (2) Ist  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$  für jedes  $i$ , dann ist  $\sum a_i$  divergent.

### Übungsaufgaben

25. Untersuchen Sie die folgenden Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  auf Konvergenz:

4/6/25

(a)  $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}},$

(b)  $a_n = (-1)^n \frac{1}{a n + b}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$

(c)  $a_n = \left( a + \frac{1}{n} \right)^n, \quad a \in \mathbb{R}.$

Formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium.