

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (Zerlegung)

9/2/1

\mathfrak{z} ist eine Zerlegung (oder Partition) von I

$\overline{\text{Def}}$ \mathfrak{z} ist eine endliche Folge (a_0, \dots, a_{n+1}) von reellen Zahlen a_0, \dots, a_{n+1} , so daß
 $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$.

Die Elemente a_0, \dots, a_{n+1} heißen dann *Unterteilungspunkte* von \mathfrak{z} ,

9/2/2

$I_i := [a_i, a_{i+1}]$ bezeichne das i -te Teilintervall bezüglich \mathfrak{z} , und

$d(\mathfrak{z}) := \max\{a_{i+1} - a_i : i = 0, \dots, n\}$ heißt *Maximaldistanz* (oder *Norm*, *Feinheitmaß*, ...) von \mathfrak{z} .

Definition. (Untersumme, Obersumme)

9/2/3

Sei f in I definiert und beschränkt.

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Def}} \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Def}} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Definition. (Unterintegral, Oberintegral, Integral)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\text{Bez.:} \quad \int_{\frac{a}{b}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\frac{b}{a}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes* (*Riemann-*) *Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.:} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

Satz 9.6 Ist f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt, dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jede Zerlegung \mathfrak{z} von I mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$ gilt: 9/2/13

$$(1) \quad 0 \leq \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon \quad \text{und}$$

$$(2) \quad 0 \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon.$$

9.3 Integrierbarkeitskriterien

Satz 9.8 (Riemannsches Integrierbarkeitskriterium)

9/3/1

Sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt. Dann gilt: f ist in I integrierbar gdw für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung \mathfrak{z} von I existiert, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$.

Beweis. (\longrightarrow) Sei f in I integrierbar, also $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \overline{f}(x) dx$.

9/3/2

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 9.6 existiert ein $\delta > 0$, so daß für jedes \mathfrak{z} mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$ gilt:

$$\int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \int_a^b f(x) dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Addiert man die beiden Ungleichungen, dann erhält man:

$$\int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) + \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon.$$

Da nach Voraussetzung Unter- und Oberintegral übereinstimmen, ergibt sich $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$ sogar für jede Zerlegung \mathfrak{z} mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$.

(\longleftarrow) Annahme: f ist in I nicht integrierbar. Also

$$0 < \int_a^b \overline{f}(x) dx - \int_a^b f(x) dx := \varepsilon.$$

Nach Voraussetzung existiert für dieses $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung \mathfrak{z} von I , so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$. Folglich ist

$$\varepsilon = \int_a^b \overline{f}(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon. \quad \text{!} \quad \square$$