

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.9 Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Satz 9.24 (Integrierbarkeit der Grenzfunktion)

9/9/1

Sei $a < b$, $I = [a, b]$ und (f_n) eine Folge von Funktionen, die in dem Intervall I definiert sind. Dann gilt:

- (1) Konvergiert (f_n) in I gleichmäßig gegen die Funktion f und sind alle f_n in I integrierbar, dann ist f in I integrierbar, und es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

(Vertauschbarkeit des Limes mit dem Integral)

- (2) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in I gleichmäßig gegen die Funktion f und sind alle f_n in I integrierbar, dann ist f in I integrierbar, und es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

(Vertauschbarkeit des Integrals mit der unendlichen Summe)

Beweis. (1). Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und für jedes $x \in I$ gilt: 9/9/2

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} := \varepsilon'.$$

Da f_n in I integrierbar ist, ist f_n und damit auch f in I beschränkt. Mit Hilfe des Riemannschen Integrierbarkeitskriteriums zeigen wir, daß f in I integrierbar ist.

Sei $n \geq n_0$ fixiert. Nach der obigen Ungleichung ist

$$f_n(x) - \varepsilon' < f(x) < f_n(x) + \varepsilon' \text{ für alle } x \in I.$$

Folglich gilt für jedes Teilintervall $I' \subseteq I$:

$$\sup_{x \in I'} f(x) \leq \sup_{x \in I'} f_n(x) + \varepsilon' \quad \text{und} \quad \inf_{x \in I'} f(x) \geq \inf_{x \in I'} f_n(x) - \varepsilon'.$$

Da f_n in I integrierbar ist, existiert eine Zerlegung $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{k+1})$ von I , so daß

$$\overline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Schließlich erhält man für $I_i := [a_i, a_{i+1}]$:

$$\overline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f_n}(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^k (a_{i+1} - a_i) \cdot \left(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=0}^k (a_{i+1} - a_i) \cdot \left(\sup_{x \in I_i} f_n(x) + \varepsilon' - \inf_{x \in I_i} f_n(x) + \varepsilon' \right) \\
&= 2\varepsilon' \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^k (a_{i+1} - a_i)}_{=b-a} + \underbrace{\left(\overline{S}_{f_n}(\mathfrak{J}) - \underline{S}_{f_n}(\mathfrak{J}) \right)}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\
&< 2\varepsilon'(b-a) + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Folglich ist f in I integrierbar.

Wegen $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon'$ gilt weiterhin

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\
&\leq \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{< \varepsilon'} dx \\
&< \varepsilon' \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

(2). Setzt man $F_n(x) := \sum_{i=0}^n f_i(x)$, dann konvergiert (F_n) in I gleichmäßig gegen f , und alle F_n sind in I integrierbar. Folglich gilt nach (1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b F_n(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \right) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b F_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n f_i(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \underbrace{\int_a^b f_i(x) dx}_{:= g_i(x)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n g_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b f_i(x) dx,
\end{aligned}$$

und damit gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad \square$$

Korollar.

9/9/3

- (1) *Eine in einem Intervall $I = [a, b]$ gleichmäßig konvergente Funktionenreihe kann gliedweise integriert werden.*
- (2) *Potenzreihen können in jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Konvergenzgebietes gliedweise integriert werden.*

Beweis. Der Beweis ist nach den Sätzen 5.20 und 9.24(2) trivial. \square

9/9/4