

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Satz 2.11 (*Satz von Bolzano-Weierstraß*)

2/3/16

Jede unendliche und beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt (wenigstens) einen Häufungspunkt.

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Beschränktheit bei Folgen*)

3/1/11

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

- (1) (a_n) ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*
 $\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert ein } c \in \mathbb{R}, \text{ so daß } a_n \leq c \text{ (bzw. } c \leq a_n) \text{ für jedes } n.$
- (2) (a_n) ist *beschränkt*
 $\stackrel{\text{Df}}{=} (a_n)$ ist nach oben und nach unten beschränkt.

Definition. (*Häufungspunkt einer Folge*)

3/1/16

Es sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

a ist ein *Häufungspunkt* (oder *Verdichtungspunkt*) von (a_n)

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{In jeder } \varepsilon\text{-Umgebung von } a \text{ liegen unendlich viele Folgenglieder } a_n$
 (die untereinander auch gleich sein dürfen, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes n_0 gibt es ein $n \geq n_0$, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$).

Satz 3.4 *Jede beschränkte Folge besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.*

3/1/17

Beweis. Sei (a_n) beschränkt und $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

3/1/18

1. Fall: M ist endlich.

Dann müssen unendlich viele Folgenglieder untereinander gleich sein:

$a_{n_0} = a_{n_1} = a_{n_2} = \dots := a$. Folglich ist a ein Häufungspunkt von (a_n) .

2. Fall: M ist unendlich.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt M als nicht-leere und beschränkte Menge einen Häufungspunkt a . Dieses a ist dann auch Häufungspunkt der Folge (a_n) . \square