

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Wir wenden uns nun dem Flächenproblem zu. Gegeben sei also ein abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ mit $a < b$ und eine in I definierte und beschränkte Funktion f . Im folgenden sei stets – falls nichts anderes vereinbart wird – I dieses Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. (vgl. auch Abb. 9.1) 9/2/0

Wenn f in I nicht negativ ist und der Flächeninhalt A der ebenen Punktmenge $M := \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ überhaupt existiert, dann muß folgende Ungleichung gelten (siehe Abb. 9.4)

$$(b - a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq A \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in I} f(x).$$

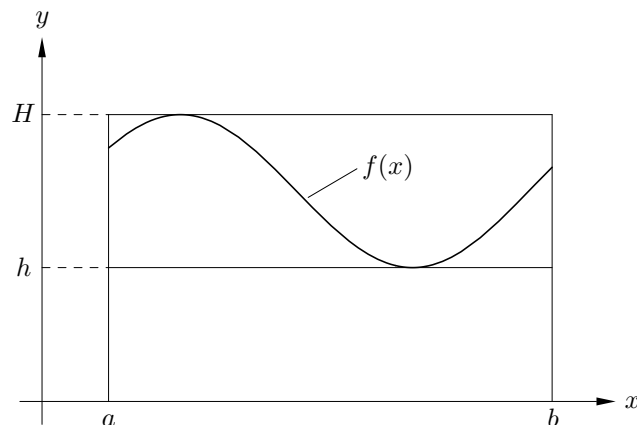


Abb. 9.4 Die Abbildung zeigt, daß der vermeintliche Flächeninhalt A zwischen dem Flächeninhalt des kleineren und des größeren Rechtecks liegen muß. h und H bezeichnen das Infimum bzw. das Supremum von f in $[a, b]$.

Mit dieser Grundidee versuchen wir jetzt, den vermeintlichen „Flächeninhalt“ näherungsweise zu berechnen (hierbei setzen wir die Definition des Flächeninhalts eines Rechtecks als gegeben voraus.)

Zur Behandlung des Problems benötigen wir einige neue Begriffsbildungen: *Zerlegung eines Intervalls, Untersumme, Obersumme, Verfeinerung einer Zerlegung.*

Definition. (*Zerlegung*)

9/2/1

\mathfrak{z} ist eine *Zerlegung* (oder *Partition*) von I

$\stackrel{\text{Df}}{=} \mathfrak{z}$ ist eine endliche Folge (a_0, \dots, a_{n+1}) von reellen Zahlen a_0, \dots, a_{n+1} , so daß $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$.

Die Elemente a_0, \dots, a_{n+1} heißen dann *Unterteilungspunkte* von \mathfrak{z} ,

9/2/2

$I_i := [a_i, a_{i+1}]$ bezeichne das i -te Teilintervall bezüglich \mathfrak{z} , und

$d(\mathfrak{z}) := \max\{a_{i+1} - a_i : i = 0, \dots, n\}$ heißt *Maximaldistanz* (oder *Norm*, *Feinheitsmaß*, ...) von \mathfrak{z} .

Definition. (*Untersumme, Obersumme*)

9/2/3

Sei f in I definiert und beschränkt.

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

9/2/4

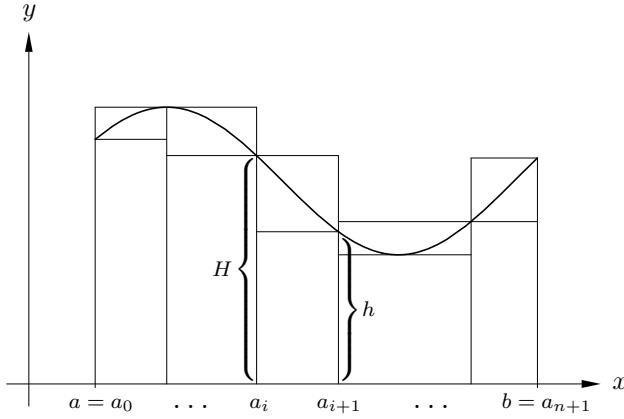


Abb. 9.5 Mit Hilfe des i -ten Intervalls $I_i := [a_i, a_{i+1}]$ werden zwei Rechtecke definiert, deren Breite jeweils $a_{i+1} - a_i$ beträgt und deren Höhe durch $h := \inf_{x \in I_i} f(x)$ bzw. $H := \sup_{x \in I_i} f(x)$ festgelegt ist. Die Summe der jeweils kleineren Rechtecke ergibt die Untersumme und die der größeren die Obersumme bei der angegebenen Zerlegung.

Definition. (*Verfeinerung*)

9/2/5

Es seien \mathfrak{z} und \mathfrak{z}' Zerlegungen von I .

\mathfrak{z}' ist eine *Verfeinerung* von \mathfrak{z}

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Alle Unterteilungspunkte von } \mathfrak{z} \text{ sind auch Unterteilungspunkte von } \mathfrak{z}'.$

Satz 9.5 Es sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt und $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ seien beliebige Zerlegungen von I . Dann gilt:

9/2/6

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$

(2) $(b - a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \quad \text{und} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in I} f(x).$

(3) Ist \mathfrak{z}' eine Verfeinerung von \mathfrak{z} , dann gilt $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$

(4) Es ist stets $\underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2).$

Beweis. Es sei $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1}).$

9/2/7

(1). Wegen $a_{i+1} - a_i > 0$ und $\inf_{x \in I_i} f(x) \leq \sup_{x \in I_i} f(x)$ gilt

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \leq \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x) = \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

(2). Für $i = 0, \dots, n$ ist offenbar $I_i \subseteq I$ und damit auch

$$\inf_{x \in I} f(x) \leq \inf_{x \in I_i} f(x) \quad \text{und} \quad \sup_{x \in I} f(x) \geq \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} (b-a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) &= \left(\sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \right) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq \left(\sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \right) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \\ &= \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) = \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x) \\ &\leq \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I} f(x) = (b-a) \cdot \sup_{x \in I} f(x). \end{aligned}$$

(3). Sei $(a_0^i, \dots, a_{n_i+1}^i)$ die entsprechende Zerlegung von I_i , die durch die Verfeinerung \mathfrak{z}' von \mathfrak{z} erzeugt wird, und es sei $I_{ij} = [a_j^i, a_{j+1}^i]$.

Analog wie im Beweis von (2) erhält man:

$$(a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \leq \sum_{j=0}^{n_i} (a_{j+1}^i - a_j^i) \cdot \inf_{x \in I_{ij}} f(x) \quad (\star)$$

und

$$(a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x) \geq \sum_{j=0}^{n_i} (a_{j+1}^i - a_j^i) \cdot \sup_{x \in I_{ij}} f(x). \quad (\star\star)$$

Addiert man die Ungleichungen (\star) bzw. $(\star\star)$ bezüglich i , dann erhält man die gewünschte Behauptung.

(4). Es sei \mathfrak{z}' eine gemeinsame Verfeinerung von \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 , d.h., alle Unterteilungspunkte von \mathfrak{z}_1 und von \mathfrak{z}_2 sind auch Unterteilungspunkt von \mathfrak{z}' . Dann gilt

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}). \quad \square$$

Bemerkung. Nach (2) ist die Menge der Untersummen und die Menge der Obersummen stets beschränkt. Dies gibt Anlaß zu folgender Definition: 9/2/8

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*) 9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes* (*Riemann-*) *Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

Definition. (*Flächeninhalt*)

9/2/10

Sei f in $[a, b]$ definiert, beschränkt und nicht negativ.

Die (ebene) Punktmenge $M := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$ besitzt einen *Flächeninhalt* (der Größe A)

$\overline{\text{Def}}$ f ist in $[a, b]$ integrierbar (und $\int_a^b f(x) dx = A$).

Bemerkung. Aus Satz 9.5 (4) folgt sofort, daß $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$.

9/2/11

Beispiel. Wir diskutieren jetzt ein Beispiel dafür, daß das Unterintegral kleiner ist als das Oberintegral.

9/2/12

Dazu sei $I = [0, 1]$ und $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 1, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$

Dann gilt für jede Zerlegung \mathfrak{z} von I und jedes Teilintervall $I_i = [a_i, a_{i+1}] \subseteq I$:

$$\inf_{x \in I_i} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \sup_{x \in I_i} f(x) = 2.$$

Folglich ist

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \underbrace{\inf_{x \in I_i} f(x)}_{=1} = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_0 = 1$$

und

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \underbrace{\sup_{x \in I_i} f(x)}_{=2} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) = 2.$$

Für eine beliebige Zerlegung \mathfrak{z} von I ist also stets $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) = 1 < 2 = \overline{S}_f(\mathfrak{z})$.
Folglich ist auch

$$\int_{\frac{0}{0}}^1 f(x) dx = 1 < 2 = \int_0^1 f(x) dx.$$

Damit ist die Funktion f in I nicht integrierbar, und die entsprechende Punktmenge M besitzt keinen Flächeninhalt. (siehe auch Abb. 9.6)



Abb. 9.6 Die Abbildung zeigt (symbolisch) die in der obigen Bemerkung definierte Funktion f mit $I = [0, 1]$ und $x \in I$. Der dort betrachteten ebenen Punktmenge $M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$ ist kein Flächeninhalt zugeordnet.

Satz 9.6 Ist f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt, dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jede Zerlegung \mathfrak{z} von I mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$ gilt: 9/2/13

$$(1) \quad 0 \leq \int_{\frac{a}{a}}^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon \quad \text{und}$$

$$(2) \quad 0 \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon.$$

Beweis. (1). Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Unterintegrals existiert eine Zerlegung $\mathfrak{z}' = (a_0, \dots, a_{n+1})$ von I , so daß 9/2/14

$$0 \leq \int_{\frac{a}{a}}^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da f in I beschränkt ist, gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $|f(x)| < c$ für alle $x \in I$.

Es sei

$$\delta := \min \left\{ d(\mathfrak{z}'), \frac{\varepsilon}{6c(n+1)} \right\}$$

und \mathfrak{z} eine beliebige Zerlegung von I mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$. Wir zeigen:

$$0 \leq \int_{\frac{a}{a}}^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon.$$

Es sei \mathfrak{z}'' eine gemeinsame Verfeinerung von \mathfrak{z} und \mathfrak{z}' . Dann ist $0 \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}'')$, also gilt

$$0 \leq \int_{\frac{a}{\delta}}^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}'') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es genügt zu zeigen, daß

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}'') - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen $d(\mathfrak{z}) < \delta < d(\mathfrak{z}')$ enthält jedes Intervall von \mathfrak{z} höchstens einen Zerlegungspunkt von \mathfrak{z}' als inneren Punkt. Die durch \mathfrak{z} entstehenden Intervalle werden in zwei Klassen zerlegt:

$M_1 :=$ Intervalle von \mathfrak{z} , die kein a_i von \mathfrak{z}' als inneren Punkt enthalten,

$M_2 :=$ Intervalle von \mathfrak{z} , die ein a_i von \mathfrak{z}' als inneren Punkt enthalten.

Mit der Zerlegung \mathfrak{z}'' erhält man die folgenden beiden Intervallmengen:

$M'_1 :=$ Intervalle von \mathfrak{z}'' , die schon zu M_1 gehören,

$M'_2 :=$ Intervalle von \mathfrak{z}'' , die nicht zu M_1 gehören.

In der Differenz $\underline{S}_f(\mathfrak{z}'') - \underline{S}_f(\mathfrak{z})$ liefern die Intervalle aus M_1 (diese gehören auch zu M'_1) keinen Beitrag (die entsprechenden Summanden heben sich gegenseitig auf). Es bleiben noch die Summanden zu berücksichtigen, die durch die Intervalle aus M_2 bzw. M'_2 entstehen.

M_2 enthält höchstens $(n+1)$ Intervalle und M'_2 höchstens $2(n+1)$.

Wegen $\left| (c-d) \cdot \inf_{x \in [c,d]} f(x) \right| < \delta \cdot c$, falls $|c-d| < \delta$, erhält man

$$|\underline{S}_f(\mathfrak{z}'') - \underline{S}_f(\mathfrak{z})| \leq 3(n+1)c \cdot \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(2) zeigt man analog. \square

Definition. (ausgezeichnete Zerlegungsfolge)

9/2/15

Es sei $(\mathfrak{z}_\nu)_{\nu=0,1,2,\dots}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls I .

(\mathfrak{z}_ν) heißt *ausgezeichnete Zerlegungsfolge* von I

$\overline{\text{Df}} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} d(\mathfrak{z}_\nu) = 0.$

Satz 9.7 Sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt und (\mathfrak{z}_ν) eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von I . Dann gilt:

9/2/16

$$(1) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_{\frac{a}{\delta}}^b f(x) dx.$$

$$(2) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_a^b f(x) dx.$$

(3) Ist f in I integrierbar, dann sind die Limites in (1) und (2) gleich $\int_a^b f(x) dx$.

Beweis. (1). Es ist zu zeigen: Wenn $\varepsilon > 0$, dann existiert ein ν_0 , so daß für jedes $\nu \geq \nu_0$ gilt: 9/2/17

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) \right| < \varepsilon.$$

Nach Satz 9.6 existiert für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $\left| \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) \right| < \varepsilon$, falls $d(\mathfrak{z}_\nu) < \delta$. Nach Voraussetzung ist $(d(\mathfrak{z}_\nu))$ eine Nullfolge, folglich existiert ein ν_0 , so daß $d(\mathfrak{z}_\nu) < \delta$ für alle $\nu \geq \nu_0$. Damit leistet ν_0 für die Behauptung (1) das Verlangte.

(2) beweist man analog.

(3) ist eine triviale Folgerung aus (1) und (2). □