

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

**Satz 7.12** (Regel von de l'Hospital für „ $\frac{0}{0}$ “)

7/3/0

Voraussetzung:

- (1) Sei  $a < b$  und seien  $f, g$  in  $(a, b)$  differenzierbar und in  $a$  (rechtsseitig) stetig.
- (2) Sei  $f(a) = g(a) = 0$  und  $g'(x) \neq 0$  für jedes  $x \in (a, b)$ .

Behauptung:

Existiert  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$ , dann existiert  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , und es ist  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**Bemerkung.**

7/3/6

(1) Der Beweis läßt sich nicht unmittelbar auf den Fall „ $\frac{0}{0}$ “ zurückführen, denn differenziert man in  $\left(\frac{1}{g}\right)/\left(\frac{1}{f}\right)$  Zähler und Nenner, dann kommen in der jeweiligen Ableitung  $f^2$  bzw.  $g^2$  vor, und über das Grenzverhalten des entsprechenden Quotienten dieser Funktionen weiß man nicht Bescheid.

(2) Satz 7.12 und die Korollare 1 und 2 können analog auf die folgenden Fälle übertragen werden:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \pm\infty.$$

(3) Häufig läßt sich der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  leichter bestimmen als  $\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{g(x)}$ .  
Daher sind die oben angegebenen Regeln oft sehr hilfreich bei der Berechnung solcher Limites.

(4) Einen Ausdruck der Form „ $0 \cdot \infty$ “ kann man in eine der Formen „ $\frac{0}{0}$ “ oder „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ überführen.

Denn wenn  $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \dots} g(x) = \infty$ , so ist

$$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

falls diese Limites existieren.

(5) Ausdrücke der Form „ $0^0$ “, „ $\infty^0$ “ und „ $1^\infty$ “ lassen sich auf die vorhergehenden Fälle zurückführen, indem man die Definition der Potenzfunktion mit Hilfe des natürlichen Logarithmus ausnutzt:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Wenn  $f(x) \searrow 0$ , so  $\ln f(x) \rightarrow -\infty$ ,

wenn  $f(x) \rightarrow \infty$ , so  $\ln f(x) \rightarrow \infty$ ,

wenn  $f(x) \rightarrow 1$ , so  $\ln f(x) \rightarrow 0$ .

Man versucht zunächst, den Grenzwert des Exponenten in  $e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$  zu bestimmen. Mit diesem Wert erhält man dann wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion den Grenzwert von  $f(x)^{g(x)}$ .

## Beispiele.

3. Es sei  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = x$  und  $x > 0$ .

7/3/7/3

Man berechne  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)^{g(x)}$ .

Nach Definition gilt  $f(x)^{g(x)} = (\sin x)^x = e^{x \cdot \ln(\sin x)}$ .

Wir versuchen zunächst, den Grenzwert des Exponenten zu bestimmen. Es ist

$$x \cdot \ln(\sin x) = \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = -\frac{\ln(\sin x)}{-\frac{1}{x}}.$$

Für  $x \searrow 0$  streben in dem letzten Bruch Zähler und Nenner gegen  $-\infty$ . Damit sind die Voraussetzungen für eine der de l'Hospitalschen Regeln erfüllt.

Zähler- und Nennerfunktion differenziert ergeben

$$\frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{\frac{1}{x^2}} = \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{x \cos x}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Also

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(\sin x) = 0$$

und damit

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \cdot \ln(\sin x)} = 1.$$