

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

**I.  $\mathbb{R}$  ist ein Körper** (d.h., in  $\mathbb{R}$  gelten folgende 10 Eigenschaften:)

2/1/1

- (1)  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ,
- (2)  $x + y = y + x$ ,
- (3) Es existiert ein Element  $0$  in  $\mathbb{R}$ , so daß für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $x + 0 = x$ .

**Bemerkung.** Aus (2) und (3) folgt sofort, daß es genau ein solches Element  $0$  in  $\mathbb{R}$  gibt. Denn sind  $0_1, 0_2$  Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

- (4) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  existiert ein  $y \in \mathbb{R}$ , so daß  $x + y = 0$ .

**Bemerkung.** Aus (1) – (4) folgt, daß es für jedes  $x \in \mathbb{R}$  genau ein  $y \in \mathbb{R}$  gibt mit  $x + y = 0$ . Wir zeigen, daß  $y$  durch  $x$  tatsächlich eindeutig bestimmt ist.

Dazu sei  $x$  gegeben.

Angenommen, es gibt Elemente  $y, z$ , so daß  $x + y = 0$  und  $x + z = 0$ . Dann gilt:

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = (x + y) + z = 0 + z = z + 0 = z.$$

Dieses durch  $x$  eindeutig bestimmte  $y$  wird mit  $y := -x$  bezeichnet.

Die Eigenschaften (1) – (4) sind die Axiome für eine (*additive*) *abelsche Gruppe*.

- (5)  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ,
- (6)  $x \cdot y = y \cdot x$ ,
- (7) Es existiert ein Element  $1$  in  $\mathbb{R}$ , so daß für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $x \cdot 1 = x$ .

**Bemerkung.** Analog wie bei (3) gibt es genau ein solches Element  $1$ . Denn wären  $1_1, 1_2$  Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2.$$

- (8) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq 0$  existiert ein  $y \in \mathbb{R}$  mit  $x \cdot y = 1$ .

**Bemerkung.** Analog wie zu (4) zeigt man, daß  $y$  durch  $x$  eindeutig bestimmt ist; der Beweis bleibt als Übungsaufgabe.

Dieses durch  $x$  eindeutig bestimmte  $y$  wird mit  $y := x^{-1} = \frac{1}{x}$  bezeichnet.

- (9)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ .

**Bemerkung.** Aus den obigen Axiomen erhält man:  $x \cdot 0 = 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

Es ist  $x = x \cdot 1 = x \cdot (1 + 0) = \underbrace{x \cdot 1}_{=x} + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$ . Nach den Axiomen (2) und (3) gibt es genau ein Element  $0$ , so daß  $x = x + 0$ . Da auch  $x = x + x \cdot 0$  ist, muß dann  $x \cdot 0$  dieses Element  $0$  sein.

- (10)  $0 \neq 1$ .

## II. $\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper

2/1/2

(d.h., in  $\mathbb{R}$  gelten zusätzlich die folgenden 5 Eigenschaften:)

- (1) Wenn  $x \leq y$  und  $y \leq z$ , so  $x \leq z$ . (*Transitivität*)
- (2) Wenn  $x \leq y$  und  $y \leq x$ , so  $x = y$ . (*Antisymmetrie*)
- (3) Für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $x \leq y$  oder  $y \leq x$ . (*Linearität*)
- (4) Wenn  $x \leq y$ , so  $x + z \leq y + z$ . (*Monotonie der Addition*)
- (5) Wenn  $0 \leq x$  und  $0 \leq y$ , so  $0 \leq x \cdot y$ .

**Bemerkung.** Aus (3) folgt sofort die *Reflexivität*, d.h. für jedes  $x$  gilt:  $x \leq x$ .

Die Eigenschaften (1) – (3) sind die *Axiome der reflexiven Ordnung*.

(4) könnte auch abgeschwächt werden zu

(4') Wenn  $0 \leq x$  und  $0 \leq y$ , so  $0 \leq x + y$ .

Es läßt sich leicht nachweisen, daß  $x \leq y \iff 0 \leq y - x$ .

Wie üblich ist  $y \geq x$  eine andere Schreibweise für  $x \leq y$ .

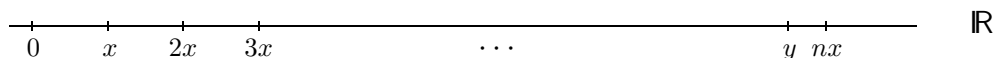
## III. $\mathbb{R}$ ist ein archimedisch geordneter Körper

2/1/3

(d.h., in  $\mathbb{R}$  gilt zusätzlich das *archimedische Axiom*)

Für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $0 < x, y$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , so daß  $y < n \cdot x$ ,  
(wobei  $x < y \stackrel{\text{Df}}{\iff} x \leq y$  und  $x \neq y$ ).

Dies bedeutet, daß durch endlich-oft-maliges Addieren einer positiven reellen Zahl zu sich selbst schließlich jede reelle Zahl übertroffen werden kann.



Bevor das letzte Axiom für die reellen Zahlen formuliert werden kann, benötigen wir noch einige Definitionen und Bezeichnungen.

## IV. $\mathbb{R}$ genügt dem Intervallschachtelungsaxiom:

2/1/6

Es sei  $([a_n, b_n])_{n=0,1,2,\dots}$  eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in  $\mathbb{R}$ , so daß für jede natürliche Zahl  $n$  gilt:  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ . Dann gibt es ein  $c \in \mathbb{R}$ , so daß  $a_n \leq c \leq b_n$ , für jede natürliche Zahl  $n$ .

**Anschauliche Deutung des Axioms:** Wie die Intervalle auch beschaffen sind, sie können sich nicht auf eine „Lücke zusammenziehen“; sie schachteln stets wenigstens eine reelle Zahl ein.

I – IV können als Axiome für die reellen Zahlen aufgefaßt werden. Nur diese Eigenschaften von reellen Zahlen werden bei späteren Beweisen wirklich benutzt.

Definiert man die reellen Zahlen (mit einer der bekannten Methoden) aus der Menge der rationalen Zahlen, dann werden die Eigenschaften I – IV natürlich beweisbare Sätze.

## 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

**Satz 2.1** Für alle  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  gilt:

2/2/1

- (1)  $-(-a) = a, \quad -0 = 0, \quad (-1) \cdot a = -a.$
- (2)  $\frac{a}{1} = a.$
- (3)  $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a, \text{ falls } a \neq 0.$
- (4)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc, \text{ falls } b, d \neq 0.$

**Satz 2.2** Für alle reellen Zahlen  $a, b, c$  gilt:

2/2/3

- (0)  $0 < 1.$
- (1) *nicht*  $(a < a).$  (Irreflexivität)
- (2) Wenn  $a < b$  und  $b < c$ , so  $a < c.$  (Transitivität)
- (3) Für jedes  $a, b$  gilt:  $a < b$  oder  $a = b$  oder  $b < a.$  (Konnexität)

**Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.

- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen:  $a < b, a = b, b < a.$  (Trichotomie)
- (4) Wenn  $a < b$ , so  $a + c < b + c.$  (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $a \cdot c < b \cdot c,$   
Wenn  $a < b$  und  $c < 0$ , so  $a \cdot c > b \cdot c.$
- (6) Wenn  $a \leq b$  und  $c \leq d$ , so  $a + c \leq b + d.$   
Ist zusätzlich  $a < b$  oder  $c < d$ , so ist  $a + c < b + d.$
- (7) Es gilt:  $a < b \iff -b < -a.$
- (8) Wenn  $0 < a$  und  $0 < b$ , so  $0 < a \cdot b,$   
Wenn  $0 < a$  und  $b < 0$ , so  $a \cdot b < 0,$   
Wenn  $a < 0$  und  $b < 0$ , so  $0 < a \cdot b.$
- (9) Wenn  $0 < a$ , so  $0 < \frac{1}{a},$   
Wenn  $a < 0$ , so  $\frac{1}{a} < 0.$
- (10) Wenn  $0 < a < b$ , so  $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a},$   
Wenn  $a < 0 < b$ , so  $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b},$   
Wenn  $a < b < 0$ , so  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0.$

(11) Wenn  $0 < a$ , dann gibt es natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ , so daß  $0 < a < m$  und  $0 < \frac{1}{n} < a$ .

(12) Wenn  $a < b$ , so  $a < \frac{a+b}{2} < b$ .

**Beweis.** Wir beweisen hier nicht alle diese Eigenschaften, sondern greifen uns nur einige als Beispiele heraus. Die verbleibenden Behauptungen werden durch ähnliche Überlegungen gezeigt. Zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, daß  $a < b \iff a \leq b$  und  $a \neq b$ .

2/2/4

(0). I(10) besagt:  $0 \neq 1$ ; II(3) liefert  $0 \leq 1$  oder  $1 \leq 0$ .

Wäre  $1 \leq 0$ , so erhielte man aus II(4):  $\underbrace{1 + (-1)}_{=0} \leq 0 + (-1) = -1$ .

Folglich wäre  $0 \leq -1$ . Aus II(5) erhält man dann (mit Hilfe von Satz 2.1)  $0 \leq (-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$ .

Also  $1 \leq 0$  und  $0 \leq 1$ . Aus II(3) folgt dann  $0 = 1$ .  $\nexists!$  (zu I(10))

(1). (Beweis indirekt.)

Angenommen, es gibt ein  $a$  mit  $a < a$ .

Nach Definition gilt:  $a < a \iff a \leq a \wedge a \neq a$ . Da  $a \neq a$  stets falsch ist, ist auch die Konjunktion  $a \leq a \wedge a \neq a$  und damit auch  $a < a$  stets falsch.  $\nexists!$

(5). Teil 1: Sei  $a < b$  und  $0 < c$ .

Man hat zu zeigen, daß  $a \cdot c < b \cdot c$ .

Es genügt zu zeigen:  $a \cdot c \leq b \cdot c$  und  $a \cdot c \neq b \cdot c$ .

Es gilt  $a < b \iff a \leq b \wedge a \neq b$  und  $0 < c \iff 0 \leq c \wedge 0 \neq c$ .

Aus  $a \leq b$  folgt:  $0 = a + (-a) \leq b + (-a) = b - a$ , also  $0 \leq b - a$ .

Wegen  $0 \leq c$  gilt dann:  $0 \leq (b - a) \cdot c = b \cdot c - a \cdot c$  und somit nach II(4)

$$a \cdot c \leq (b \cdot c - a \cdot c) + a \cdot c = b \cdot c + 0 = b \cdot c.$$

Es bleibt noch zu zeigen:  $a \cdot c \neq b \cdot c$ .

Annahme,  $a \cdot c = b \cdot c$ .

Wegen  $c \neq 0$  existiert  $\frac{1}{c}$ , folglich ist

$$a = a \cdot 1 = a \cdot \left(c \cdot \frac{1}{c}\right) = (a \cdot c) \cdot \frac{1}{c} = (b \cdot c) \cdot \frac{1}{c} = b \cdot \left(c \cdot \frac{1}{c}\right) = b \cdot 1 = b;$$

also  $a = b$  im Widerspruch zu  $a < b$ .

Den 2. Teil der Behauptung (5) beweist man analog.

(7). Sei  $a < b$ , also  $a \leq b \wedge a \neq b$ .

Folglich ist  $0 = a + (-a) \leq b + (-a)$  und daher

$$-b \leq (b + (-a)) + (-b) = b + ((-a) + (-b)) = b + ((-b) + (-a))$$

$$= (b + (-b)) + (-a) = 0 + (-a) = (-a) + 0 = -a.$$

Also  $-b \leq -a$ .

Angenommen:  $-b = -a$ .

Dann gilt

$$b = -(-b) = (-1) \cdot (-b) = (-1) \cdot (-a) = -(-a) = a. \quad \text{!}$$

Die Umkehrung  $-b < -a \implies a < b$  beweist man analog.

(11). Sei  $0 < a$ , dann ist nach (10) auch  $0 < \frac{1}{a}$ . Wegen  $0 < 1$  gibt es nach dem archimedischen Axiom eine natürliche Zahl  $m$ , so daß  $a < m \cdot 1 = m$ .

Analog gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , so daß  $\frac{1}{a} < n$ . Nach (10) erhält man daraus

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{a}} = a. \quad \square$$