

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (Konvergenz von Reihen)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$ konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

4.4 Potenzreihen

Satz 4.19 Es seien $a_n, a \in \mathbb{C}$.

4/4/7

- (1) Ist $\sum a_n(x-a)^n$ an einer Stelle $x = x_0$ konvergent, dann ist $\sum a_n(x-a)^n$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-a| < |x_0-a|$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\sum a_n(x-a)^n$ an einer Stelle $x = x_1$ divergent, dann ist $\sum a_n(x-a)^n$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-a| > |x_1-a|$ divergent.

4.5 Rechnen mit Potenzreihen

Lemma. Es sei $\sum c_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$, und sei (x_ν) eine Folge mit $x_\nu \neq a$, $|x_\nu - a| < \varrho$ und $\lim x_\nu = a$.

4/5/7/2

Dann ist $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $|x_\nu - a| < \varrho$. Wegen $x_\nu \rightarrow a$ existiert ein n_0 , so daß für alle $\nu \geq n_0$ gilt: $|x_\nu - a| < \frac{\varrho}{2} < \varrho$.

4/5/7/3

Da Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzkreises absolut konvergieren, ist

$\sum_{n=0}^{\infty} \left| c_n \left(\frac{\varrho}{2} \right)^n \right|$ konvergent. Damit ist offenbar auch $\sum_{n=1}^{\infty} \left| c_n \left(\frac{\varrho}{2} \right)^{n-1} \right|$ konvergent.

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} \left| c_n \left(\frac{\varrho}{2} \right)^{n-1} \right| < c$.

Für $\varepsilon > 0$ existiert ein m_0 , so daß für alle $\nu \geq m_0$ gilt: $|x_\nu - a| < \frac{\varepsilon}{c}$.

Ist $k_0 = \max\{m_0, n_0\}$ und $\nu \geq k_0$, dann ist

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n - c_0 \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot |(x_\nu - a)^n| =$$

$$|x_\nu - a| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot \underbrace{|x_\nu - a|^{n-1}}_{< \frac{\rho}{2}} \leq |x_\nu - a| \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-1}}_{< c} < c \cdot \underbrace{|x_\nu - a|}_{< \frac{\varepsilon}{c}} < \varepsilon.$$

Also

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n = c_0. \quad \square$$