

# Kapitel 1

## Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

**Definition.** (*Funktion* oder *Abbildung*)

1/0/14

(1)  $f$  ist eine *Funktion* (oder *Abbildung*)

$\overline{\text{Df}}$  Es existieren Mengen  $M$  und  $N$ , so daß  $f \subseteq M \times N$ , und für jedes  $a \in M$  gibt es höchstens ein  $b \in N$ , so daß  $(a, b) \in f$ .  
(Eine Funktion ist also eine spezielle Relation.)

(2)  $f$  ist eine *Funktion aus  $M$  in  $N$*

$\overline{\text{Df}}$   $f \subseteq M \times N$  und für jedes  $a \in M$  gibt es höchstens ein  $b \in N$ , so daß  $(a, b) \in f$ .

**Bez.:**  $f : M \rightarrow N$ .

(3)  $f$  ist eine *Funktion von  $M$  in  $N$*

$\overline{\text{Df}}$   $f \subseteq M \times N$  und für jedes  $a \in M$  existiert genau ein  $b \in N$ , so daß  $(a, b) \in f$ . (Jedes  $a \in M$  bestimmt eindeutig ein gewisses  $b \in N$ .)

**Bez.:**  $f(a) = b$ .

In diesem Falle heißt  $M$  *Definitionsbereich* (oder *domain*) von  $f$  und

$$f(M) := \{b \in N : \text{es existiert ein } a \in M, \text{ so daß } b = f(a)\}$$

*Wertebereich* oder *Bild* (oder *image*) von  $f$ .

**Bez.:**  $M = D(f) = \text{dom}(f)$  und  $f(M) = W(f) = \text{im}(f)$ .

Für Abbildungen  $f : M \rightarrow N$  gilt also im allgemeinen nur  $D(f) \subseteq M$  und  $W(f) \subseteq N$ .  $N$  heißt auch *Zielbereich* (oder *range*) von  $f$ .

## Kapitel 4

### Unendliche Reihen; Potenzreihen

#### 4.4 Potenzreihen

**Definition.** (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei  $(a_n)$  eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und  $a, x$  seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  *Potenzreihe* in  $x-a$  mit den *Koeffizienten*  $a_n$ .

**Beispiele.**

1. Es sei  $a_n = \frac{1}{n!}$ ,  $a = 0$ , also  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

4/4/3/1

Diese Reihe konvergiert (nach dem Quotientenkriterium) für alle reellen oder komplexen  $x$ .

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

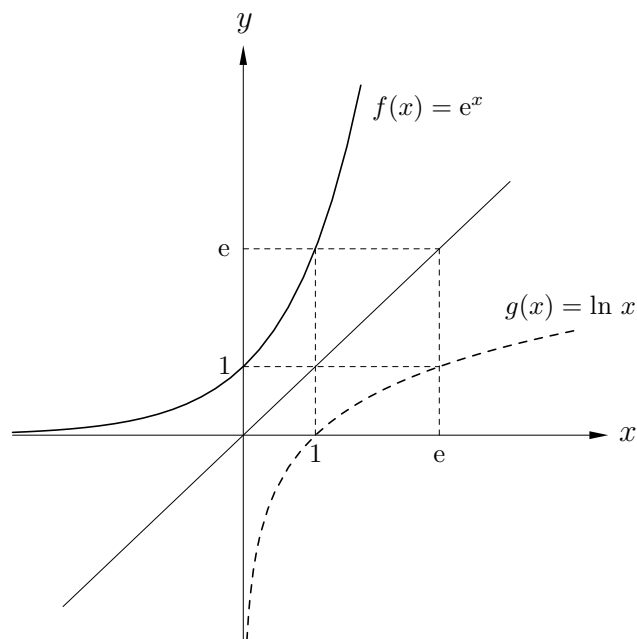
#### 5.3 Elementare Funktionen

##### Exponentialfunktion

5/3/17

In dem Abschnitt über Reihen haben wir schon gesehen, daß die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert (sogar absolut; zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, daß für  $x = 0$  und  $n = 0$   $x^n = 1$  gesetzt wurde).

Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist also durch  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ein Wert  $y$  festgelegt, d.h., durch die Reihe ist eine Funktion  $f(x)$  definiert. (vgl. Abb. 5.18)



5/3/26

Abb. 5.18 Das Bild zeigt die Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$  und den natürlichen Logarithmus  $g(x) = \ln x$ . Hier ist zu erkennen, daß  $D(e^x) = W(\ln x)$  und  $D(\ln x) = W(e^x)$ .

Weiterhin wird deutlich, daß  $f(0) = e^0 = 1$ ,  $f(1) = e^1 = e$  und  $g(1) = \ln 1 = 0$ ,  $g(e) = \ln e = 1$ .

##### Logarithmusfunktion

Aufgrund der strengen Monotonie von  $e^x$  besitzt diese Funktion eine Umkehrfunktion.