

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.2 Partielle Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung

Satz 8.9 (Satz von Schwarz)

8/2/2

Es sei $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$.

Ist f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert und existieren in $U(\bar{c})$ die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xy} und ist f_{xy} in \bar{c} stetig, dann existiert auch f_{yx} in \bar{c} , und es ist $f_{xy}(\bar{c}) = f_{yx}(\bar{c})$.

(Unter den angegebenen Bedingungen sind die gemischten Ableitungen in \bar{c} gleich.)

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Es sei jetzt M eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 , $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f \in C^{k+1}(M)$. Weiterhin seien $\bar{a} = (a_1, a_2)$, $\bar{c} = \bar{a} + t \cdot \bar{h}$, wobei $t \in [0, 1]$, $\bar{h} = (h_1, h_2)$ und die Verbindungsstrecke $s(\bar{a}, \bar{b})$ ganz zu M gehöre. Dann ist

8/3/10

$$\varphi(t) := f(\bar{a} + t\bar{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1$$

eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, deren Ableitung sich gemäß der Kettenregel wie folgt berechnet

$$\varphi'(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{c}) \cdot h_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(\bar{c}) \cdot h_2.$$

Für $\frac{\partial}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial y}$ schreiben wir kurz D_1 bzw. D_2 . Damit ergibt sich

$$\varphi'(t) = h_1 \cdot D_1 f + h_2 \cdot D_2 f = (h_1 D_1 + h_2 D_2) f,$$

wobei das Argument von f der Einfachheit halber weggelassen wurde.

Für $n = 2$ ist dann

$$\varphi''(t) = h_1(h_1 D_1 D_1 f + h_2 D_2 D_1 f) + h_2(h_1 D_1 D_2 f + h_2 D_2 D_2 f).$$

Nach dem Satz von Schwarz ist $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$ und somit erhält man für $D_i D_i := D_i^2$, $i = 1, 2$,

$$\varphi''(t) = h_1^2 D_1^2 f + 2h_1 h_2 D_1 D_2 f + h_2^2 D_2^2 f.$$

In Analogie zur binomischen Formel schreiben wir für $h_1^2 D_1^2 f + 2h_1 h_2 D_1 D_2 f + h_2^2 D_2^2 f$ im folgenden auch $(h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(2)} f$.

Analog erhält man für $\varphi^{(k)}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, die Darstellung

$$\varphi^{(k)}(t) = (h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(k)} f.$$

(Beweis induktiv über k)

Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{m+1}(M)$ und sind $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\bar{a} + t \cdot \bar{h}$ mit $0 \leq t \leq 1$ und $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$ Elemente aus M , deren Verbindungsstrecke ganz zu M gehört, und ist $\varphi(t) = f(\bar{a} + t\bar{h}) = f(a_1 + th_1, \dots, a_n + th_n)$, dann ist

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n h_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{a} + t\bar{h}).$$

Schreibt man D_i für $\frac{\partial}{\partial x_i}$, so erhält man

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n h_i D_i f \quad \text{und} \quad \varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j D_i D_j f \\ &= (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(2)} f, \end{aligned}$$

wenn man den Satz von Schwarz und eine der binomischen Formel (für n Summanden) analoge Schreibweise benutzt.

Induktiv zeigt man schließlich

$$\varphi^{(k)}(t) = (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(k)} f.$$

Jetzt sind wir in der Lage, den Taylorschen Satz in übersichtlicher Weise zu formulieren.