

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

**Definition.** (*lokales Extremum*)

8/3/17

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\bar{c}$  ein innerer Punkt von  $D(f)$ .

$f$  besitzt an der Stelle  $\bar{c}$  ein *relatives* oder *lokales Extremum* ( $:=$  *lokales Minimum* bzw. *lokales Maximum*)

$\overline{\text{Def}}$  Es gibt eine Umgebung  $U(\bar{c})$ , so daß für jedes  $\bar{x} \in U(\bar{c})$  mit  $\bar{x} \neq \bar{c}$  gilt:  
 $f(\bar{x}) > f(\bar{c})$  für ein lokales Minimum und  
 $f(\bar{x}) < f(\bar{c})$  für ein lokales Maximum.

**Satz 8.13** (*Notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums*)

8/3/18

Sei  $f(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in einer Umgebung von  $\bar{c}$  definiert und in  $\bar{c}$  nach allen Variablen partiell differenzierbar.

Besitzt  $f$  in  $\bar{c}$  ein lokales Extremum, dann sind alle (ersten) partiellen Ableitungen von  $f$  in  $\bar{c}$  null.

(Wenn  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ , also  $\text{grad} f(\bar{c}) = \bar{0}$ , dann heißt  $\bar{c}$  auch *kritischer* oder *stationärer Punkt* von  $f$ .)

**Satz 8.14** (*Hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums*)

8/3/22

Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$  und  $f$  sei in einer Umgebung von  $\bar{c}$  zweimal stetig differenzierbar.

Weiterhin sei  $\bar{c}$  ein kritischer Punkt von  $f$  und  $D = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{c}) & f_{xy}(\bar{c}) \\ f_{xy}(\bar{c}) & f_{yy}(\bar{c}) \end{vmatrix}$ .

Dann gilt:

- (1) Ist  $D > 0$ , dann besitzt  $f$  in  $\bar{c}$  ein lokales Extremum, und zwar  
ein lokales Minimum, falls  $f_{xx}(\bar{c}) > 0$  und  
ein lokales Maximum, falls  $f_{xx}(\bar{c}) < 0$ .
- (2) Ist  $D < 0$ , dann besitzt  $f$  in  $\bar{c}$  einen sog. *Sattelpunkt* (das ist ein kritischer Punkt, in dem die betrachtete Funktion weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum besitzt; vgl. Abb. 8.11).
- (3) Ist  $D = 0$ , dann läßt sich (allein mit Hilfe der zweiten partiellen Ableitungen) *noch keine Aussage treffen*.

**Beweis.** Wir benutzen die gleichen Bezeichnungen wie in der obigen Formel ( $\star$ ). Da

8/3/23

nach Voraussetzung  $f_x(\bar{c})$  und  $f_y(\bar{c})$  null sind, erhält man aus  $(\star)$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{1}{2} \left( h^2 \cdot f_{xx}(\bar{u}) + 2hk \cdot f_{xy}(\bar{c}) + k^2 \cdot f_{yy}(\bar{u}) \right) = R_1(\bar{x}).$$

(1). Nach Voraussetzung ist

$$D := D(\bar{c}) = f_{xx}(\bar{c}) \cdot f_{yy}(\bar{c}) - f_{xy}^2(\bar{c}) > 0.$$

Betrachtet man  $D(\bar{u})$  als Funktion von  $\bar{u} = \bar{c} + \vartheta(\bar{x} - \bar{c})$ , dann ist wegen  $f \in C^2(U)$  die Funktion  $D(\bar{u})$  in  $U$  stetig und somit  $D(\bar{u}) > 0$ , falls  $\bar{x}$  hinreichend nahe bei  $\bar{c}$  liegt.

Analog gilt für  $f_{xx}(\bar{c}) \lesssim 0$  auch  $f_{xx}(\bar{u}) \lesssim 0$ .

Im folgenden schreiben wir für  $f_{xx}(\bar{u})$ ,  $f_{xy}(\bar{u})$ ,  $f_{yy}(\bar{u})$  kurz  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$ ,  $f_{yy}$ .

Da  $f_{xx}$  nicht null ist, erhält man

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f(\bar{c}) &= \frac{1}{2f_{xx}} \cdot [h^2 f_{xx}^2 + hk f_{xx} f_{xy} + k^2 f_{xx} f_{yy}] \\ &= \frac{1}{2f_{xx}} \left[ \underbrace{(h f_{xx} + k f_{yy})^2}_{\geq 0} + k^2 \underbrace{(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)}_{> 0} \right]. \end{aligned}$$

Da der Ausdruck in den eckigen Klammern für  $k \neq 0$  positiv ist, hängt das Vorzeichen von  $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$  nur von  $f_{xx}(\bar{c})$  ab. (Für  $k = 0$  gilt nach  $(\star)$  schon  $f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot f_{xx}(\bar{c})$ .)

Also für  $f_{xx}(\bar{c}) > 0$  besitzt  $f$  an der Stelle  $\bar{c}$  ein lokales Minimum und für  $f_{xx}(\bar{c}) < 0$  ein lokales Maximum.

(2). Sei  $D < 0$ . Setzt man  $h = k$  bzw.  $h = -k$ , dann erhält man

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot (f_{xx} + 2f_{xy} + f_{yy}) \quad \text{bzw.}$$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot (f_{xx} - 2f_{xy} + f_{yy}).$$

Es sei zunächst  $f_{xx}(\bar{c}) = f_{yy}(\bar{c}) = 0$ .

Wegen  $D(\bar{c}) < 0$  ist dann  $f_{xy}(\bar{c}) \neq 0$  und somit

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 2f_{xy}(\bar{c}), \quad \text{falls } h = k \quad \text{und}$$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} -2f_{xy}(\bar{c}), \quad \text{falls } h = -k.$$

Dies bedeutet, daß in jeder Umgebung von  $\bar{c}$  sowohl positive als auch negative Werte von  $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$  auftreten. Folglich besitzt  $f$  in  $\bar{c}$  kein lokales Extremum.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, daß  $f_{xx}(\bar{c}) \neq 0$  oder  $f_{yy}(\bar{c}) \neq 0$ .

Sei o.B.d.A.  $f_{xx}(\bar{c}) \neq 0$ . Dann erhält man für  $k = 0$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot f_{xx}.$$

Für hinreichend nahe bei  $\bar{c}$  gelegene  $\bar{x}$  haben  $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$  und  $f_{xx}(\bar{c})$  das gleiche Vorzeichen.

Sei jetzt  $h = -s \cdot f_{xy}(\bar{c})$  und  $k = s \cdot f_{xx}(\bar{c})$  für „kleine“  $s \neq 0$ . Dann gilt

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{s^2}{2} (f_{xy}^2(\bar{c}) \cdot f_{xx} - 2f_{xy}(\bar{c}) \cdot f_{xx}(\bar{c}) \cdot f_{xy} + f_{xx}^2(\bar{c}) \cdot f_{yy}).$$

Wegen  $f \in C^2(U)$  gilt

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f(\bar{c}) &\xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{s^2}{2} (f_{xy}^2(\bar{c}) \cdot f_{xx}(\bar{c}) - 2f_{xy}^2(\bar{c}) \cdot f_{xx}(\bar{c}) + f_{xx}^2(\bar{c}) \cdot f_{yy}(\bar{c})) \\ &= \frac{s^2}{2} \cdot f_{xx}(\bar{c}) \cdot \underbrace{(f_{xx}(\bar{c}) \cdot f_{yy}(\bar{c}) - f_{xy}^2(\bar{c}))}_{< 0}. \end{aligned}$$

Folglich haben  $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$  und  $f_{xx}(\bar{c})$  unterschiedliches Vorzeichen, und damit besitzt  $f$  in  $\bar{c}$  kein lokales Extremum.

Den Fall  $f_{yy}(\bar{c}) \neq 0$  beweist man durch ähnliche Überlegungen.  $\square$

**Bemerkung.** Nach unserer Definition sind die Extremstellen einer Funktion  $f$  immer innere Punkte des betrachteten Definitionsbereiches (man kann dies auch anders definieren!). Ist man nicht nur an lokalen sondern auch an absoluten (oder globalen) Extrema (im Gegensatz zu lokalen Extremstellen) interessiert, dann muß noch der Teil des Randes des Definitionsbereiches untersucht werden, der selbst zum Definitionsbereich gehört. Schränkt man die Funktion  $f$  auf den betreffenden Teil des Randes ein, dann erhält man (in Abhängigkeit von der Kompliziertheit des Randes) oft eine „handhabbare“ Funktion  $g$  mit einer Veränderlichen. Die lokalen und globalen Extrema für  $g$  (falls solche existieren) müssen dann mit den lokalen Extrema von  $f$  verglichen werden.

8/3/27

## Übungsaufgaben

11. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale und globale Extrema:

8/5/11

(a)  $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad -2 \leq y \leq 2,$

(b)  $f(x, y) = x \cdot y + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad 1 \leq x \leq 10, \quad 1 \leq y \leq 10,$

(c)  $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x - y), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$