

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*euklidischer Abstand*)

6/1/1

Seien $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

$|\bar{a} - \bar{b}| \stackrel{\text{Df}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$ heißt *euklidischer Abstand* zwischen \bar{a} und \bar{b} .

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Bemerkung. Aus der Differenzierbarkeit folgt also die Stetigkeit; die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung stetig ist, heißt *stetig differenzierbar*. 7/1/14

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*ausgezeichnete Zerlegungsfolge*)

9/2/15

Es sei $(\mathfrak{z}_\nu)_{\nu=0,1,2,\dots}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls I .

(\mathfrak{z}_ν) heißt *ausgezeichnete Zerlegungsfolge* von I

$\stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{\nu \rightarrow \infty} d(\mathfrak{z}_\nu) = 0$.

9.3 Integrierbarkeitskriterien

Definition. (*Zwischensumme*)

9/3/4

Es sei f in I definiert, $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I , und für jedes $i = 1, \dots, n$ sei $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

Dann nennt man $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ ein *Zwischenstellensystem* bei der Zerlegung \mathfrak{z} , und

$S_f(\mathfrak{z}, \tau) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot f(\xi_i)$ heißt *Zwischensumme* von f bei der Zerlegung \mathfrak{z} und dem Zwischenstellensystem τ .

9.8 Länge von Kurven

Definition.

9/8/4

Sei $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ eine Kurve mit der Parameterdarstellung $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$.

- (1) \mathfrak{k} ist *stetig differenzierbar* in $[a, b]$
 $\overline{\text{Df}}$ f ist stetig differenzierbar in $[a, b]$.
- (2) \mathfrak{k} ist *glatt* in $[a, b]$
 $\overline{\text{Df}}$ f ist stetig differenzierbar in $[a, b]$ und $f'(t) \neq 0$ für jedes $t \in [a, b]$.
- (3) \mathfrak{k} ist *stückweise glatt* in $[a, b]$
 $\overline{\text{Df}}$ Es existiert eine Zerlegung $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ von $[a, b]$, so daß \mathfrak{k} in jedem Teilintervall $[a_i, a_{i+1}]$ glatt ist.

Es sei $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ zunächst eine Kurve und $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Verbindet man die Bildpunkte $f(a_0), \dots, f(a_{n+1}) \in \mathfrak{k}$ von a_0, \dots, a_{n+1} der Reihe nach durch Verbindungsstrecken, dann entsteht ein der Kurve einbeschriebener Polygonzug $P_{\mathfrak{z}}$ (vgl. Abb. 9.23). Der Abstand zwischen je zwei „benachbarten“ Bildpunkten $f(a_i)$ und $f(a_{i+1})$ auf der Kurve beträgt $|f(a_{i+1}) - f(a_i)|$. Folglich ist die Länge des Polygonzuges gegeben durch

9/8/5

$$l(P_{\mathfrak{z}}) = \sum_{i=1}^n |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

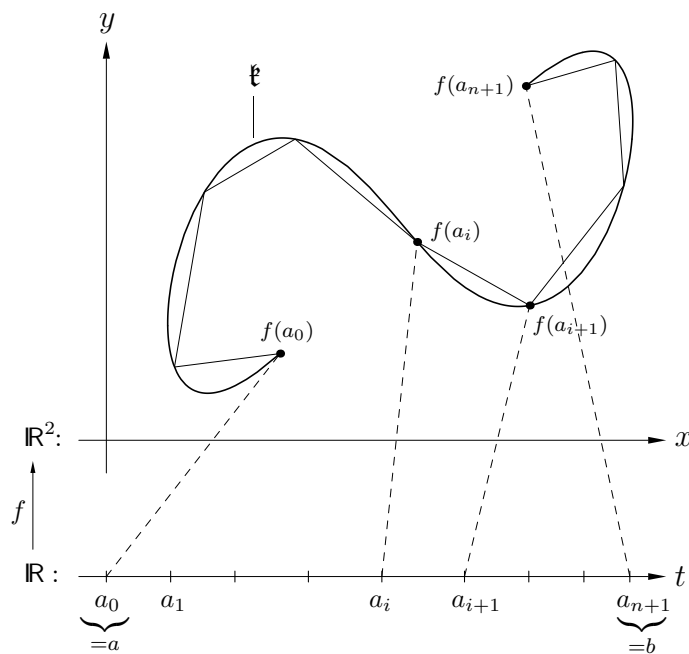


Abb. 9.23 Die Abbildung zeigt eine Kurve im \mathbb{R}^2 mit einem einbeschriebenen Polygonzug. Dabei ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig und $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$. Ist $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dann liegen die Bildpunkte $f(a_i)$, $i = 0, \dots, n+1$, auf der Kurve \mathfrak{k} .

Wir definieren jetzt, was unter der Länge einer Kurve zu verstehen ist.

Lemma. Es sei \mathfrak{k} eine durch $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ definierte und stetig differenzierbare Kurve. Weiterhin sei (\mathfrak{z}_ν) eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von $[a, b]$, und (τ_ν) sei eine Folge zugehöriger Zwischenstellensysteme von (\mathfrak{z}_ν) . Dann folgt:

9/8/8

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein ν_0 , so daß für jedes $\nu \geq \nu_0$ gilt:

$$|l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)| < \varepsilon, \text{ wobei } g(t) = |f'(t)| = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(t)\right)^2}.$$