

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Satz 8.2 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/14

Ist f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert und nach allen Variablen partiell differenzierbar und sind alle partiellen Ableitungen in \bar{c} stetig, dann ist f in \bar{c} (total) differenzierbar, und für jedes $\bar{x} \in U(\bar{c})$ gilt $f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot (x_i - c_i) + o(\bar{x})$.

(D.h., die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die aufgrund der Differenzierbarkeit existiert, ist gegeben durch $A = (a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{c}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{c}) \right)$ und $A(\bar{x} - \bar{c}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot (x_i - c_i)$.)

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in M definiert.

8/3/9

(1) f heißt in M stetig differenzierbar

$\stackrel{\text{Df}}{=} f$ ist in M differenzierbar und f' ist in M stetig.

(Dies ist nach dem Satz 8.2 genau dann der Fall, wenn alle partiellen Ableitungen von f in M vorhanden und stetig sind.)

(2) f ist in M $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar

$\stackrel{\text{Df}}{=} f^{(k)}$ ist in M stetig differenzierbar.

Bez.: $f \in C^{k+1}(M)$.