

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (*Umgebung*)

2/3/10

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

(1) U heißt ε -Umgebung von a

$$\stackrel{\text{Df}}{=} U = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\},$$

$$(\text{d.h., } U = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)).$$

Bez.: $U = U_\varepsilon(a)$.

(2) U ist eine Umgebung von a

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es gibt ein } \varepsilon > 0, \text{ so da\ss } U_\varepsilon(a) \subseteq U.$$

Bez.: $U(a)$.

Satz 2.11 (*Satz von Bolzano-Weierstra\ss*)

2/3/16

Jede unendliche und beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt (wenigstens) einen Häufungspunkt.

Beweis. (Beweis mit Intervallschachtelung!)

2/3/17

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, M unendlich und beschränkt. Dann existieren Elemente $a, b \in \mathbb{R}$, so da\ss $a \leq x \leq b$ für jedes $x \in M$.

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])$ mit folgenden Eigenschaften:

- $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$,
- in jedem $[a_n, b_n]$ liegen unendlich viele Elemente aus M ,
- $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Sei $a_0 = a$, $b_0 = b$.

Dann ist $M \subseteq [a_0, b_0]$ und $[a_0, b_0] \cap M$ unendlich.

Sei $c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Dann ist $[a_0, b_0] = [a_0, c_1] \cup [c_1, b_0]$.

Da $[a_0, b_0]$ unendlich viele Elemente aus M enthält, mu\ss dies auch für $[a_0, c_1]$ oder für $[c_1, b_0]$ gelten.

Entsprechend dieser Fallunterscheidung definieren wir:

$a_1 = a_0$, $b_1 = c_1$, falls $[a_0, c_1] \cap M$ unendlich ist und

$a_1 = c_1$, $b_1 = b_0$, anderenfalls ($\implies [c_1, b_0] \cap M$ unendlich).

In jedem Falle ist $[a_1, b_1] \cap M$ unendlich, und weiterhin gilt $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$ und $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$.

Seien a_n, b_n schon (entsprechend der Induktionsvoraussetzung) mit den geforderten Eigenschaften definiert.

Sei $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Da $[a_n, b_n] = [a_n, c_{n+1}] \cup [c_{n+1}, b_n]$ und $[a_n, b_n] \cap M$ unendlich ist, gilt:

$[a_n, c_{n+1}] \cap M$ ist unendlich oder $[c_{n+1}, b_n] \cap M$ ist unendlich. Entsprechend dieser Fallunterscheidung definiert man:

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = c_{n+1}, \quad \text{falls } [a_n, c_{n+1}] \cap M \text{ unendlich ist und}$$

$$a_{n+1} = c_{n+1}, \quad b_{n+1} = b_n, \quad \text{sonst.}$$

Offensichtlich besitzt $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ die geforderten Eigenschaften.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c \leq b_n$ für alle n .

Behauptung: c ist ein Häufungspunkt von M .

z.z.: Wenn $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $x \in M$ mit $x \neq c$ und $x \in U_\varepsilon(c)$.

Wählt man n so groß, daß $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) < \varepsilon$, dann ist wegen $a_n \leq c \leq b_n$ auch $c - a_n, b_n - c < \varepsilon$ und damit $c - \varepsilon < a_n, b_n < c + \varepsilon$. Schließlich gilt:

$$[a_n, b_n] \subseteq (c - \varepsilon, c + \varepsilon) = U_\varepsilon(c).$$

Da $[a_n, b_n]$ unendlich viele Elemente aus M enthält, liegen auch unendlich viele Elemente aus M in $U_\varepsilon(c)$. Folglich ist c ein Häufungspunkt von M . \square