

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Satz 6.4 (Satz von Bolzano-Weierstraß)

6/1/24

Jede unendliche und beschränkte Menge von Elementen aus \mathbb{R}^n besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

Beweis. (Der Beweis erfolgt mit einer sog. Würfelschachtelung, die analog zu einer Intervallschachtelung induktiv konstruiert wird).

6/1/25

Beweisidee: Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und M unendlich und beschränkt. Dann läßt sich M in eine Kugel und damit auch in einen n -dimensionalen Würfel $W_0 := [a_1^0, b_1^0] \times \cdots \times [a_n^0, b_n^0]$ mit endlicher Kantenlänge einschließen, wobei $a_i^0, b_i^0 \in \mathbb{R}$, $a_i^0 < b_i^0$ und $b_i^0 - a_i^0 = b_j^0 - a_j^0$ für $i, j = 1, \dots, n$. Es gilt also $M \subseteq W_0$.

Die Kanten des Würfels werden durch die Intervalle $[a_i^0, b_i^0]$ auf den Koordinatenachsen repräsentiert (vgl. Abb. 6.4).

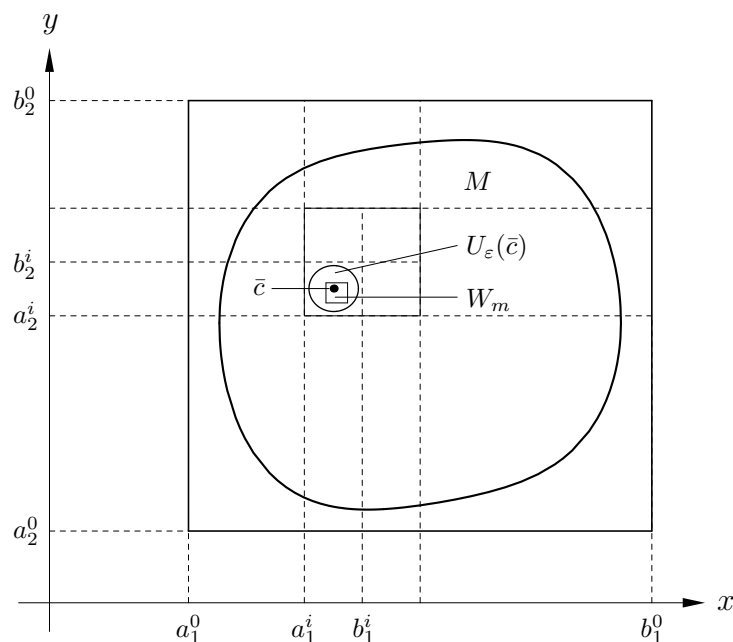


Abb. 6.4 In der Abbildung wird der Fall $n = 2$ dargestellt. Aufgrund der betrachteten Zerlegung gibt es bei jedem Schritt wenigstens einen Teilwürfel, in dem unendlich viele Elemente aus M enthalten sind; einen solchen Teilwürfel wählt man jeweils aus und zerlegt ihn weiter. Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es dann einen Teilwürfel W_m , so daß $W_m \subseteq U_\varepsilon(\bar{c})$.

Durch Halbierung der Würfelkanten entsteht eine Zerlegung von W_0 in endlich viele Teilwürfel W_0^1, \dots, W_0^k , (in unserem Fall ist $k = 2^n$) und $W_0 = \bigcup_{i=1}^k W_0^i$.

Dann ist

$$M \cap W_0 = M \cap \left(\bigcup_{i=1}^k W_0^i \right) = \bigcup_{i=1}^k (M \cap W_0^i)$$

unendlich. Folglich gibt es einen Teilwürfel W_0^i , so daß schon $M \cap W_0^i$ unendlich ist. Wir wählen einen solchen Teilwürfel W_0^i aus und nennen ihn W_1 .

Es sei jetzt W_m schon definiert mit den folgenden Eigenschaften:

Die Kantenlänge von W_m ist $l(W_m) = \frac{1}{2^m} \cdot l(W_0)$ und $M \cap W_m$ ist unendlich.

Analog wie bei W_0 halbieren wir jetzt die Kanten von W_m und erhalten eine Zerlegung von W_m in k Teilwürfel W_m^1, \dots, W_m^k , so daß

$$W_m = \bigcup_{i=1}^k W_m^i \quad \text{und} \quad M \cap W_m = \bigcup_{i=1}^k (M \cap W_m^i).$$

Da nach Voraussetzung $M \cap W_m$ unendlich ist, existiert ein W_m^i , so daß $M \cap W_m^i$ unendlich ist; sei $W_{m+1} := W_m^i$.

Auf diese Weise entsteht eine Folge $W_0 \supseteq W_1 \supseteq \dots \supseteq W_m \supseteq \dots$ von ineinander geschachtelten Würfeln. Für den Würfel W_m sei die j -te Würfelkante ($j = 1, \dots, n$) durch das Intervall $[a_j^m, b_j^m]$ gegeben. Offenbar ist $([a_j^m, b_j^m])_{m=0,1,2,\dots}$ dann eine Intervallschachtelung in \mathbb{R} . Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es ein c_j , so daß $c_j \in [a_j^m, b_j^m]$ für fixiertes j mit $j \in \{1, \dots, n\}$ und $m = 0, 1, 2, \dots$.

Behauptung: $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$ ist ein Häufungspunkt von M .

Offenbar ist $\bar{c} \in \bigcap_{m=0}^{\infty} W_m$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $l(W_m) = \frac{1}{2^m} \cdot l(W_0)$ kann mit wachsendem m die Kantenlänge des m -ten Würfels so klein gemacht werden, daß für hinreichend große m der ganze Würfel W_m zu $U_\varepsilon(\bar{c})$ gehört: $W_m \subseteq U_\varepsilon(\bar{c})$. Da $M \cap W_m \subseteq W_m$ und $M \cap W_m$ unendlich ist, liegen in $U_\varepsilon(\bar{c})$ unendlich viele Elemente aus M ; folglich ist \bar{c} ein Häufungspunkt von M . \square

6.5 Einige wichtige Ergänzungen

Satz 6.22 (*Überdeckungssatz von Heine-Borel*)

6/5/4

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist M beschränkt und abgeschlossen, und ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M , dann enthält \mathcal{U} eine endliche Teilüberdeckung von M

(d.h., M ist kompakt im Sinne der obigen Definition).

Beweis. (mit Würfelschachtelung)

6/5/5

Nach Voraussetzung ist M beschränkt, folglich ist M in einem Würfel W_0 (mit endlicher Kantenlänge) enthalten, also $M \subseteq W_0$ und $M = M \cap W_0$. Weiterhin ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M .

Annahme: Es gibt keine endliche Teilüberdeckung von $M \cap W_0$.

Völlig analog wie im Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß (Satz 6.4) wird W_0 in $k := 2^n$ Teilwürfel W_0^1, \dots, W_0^k durch Halbierung der Kantenlängen zerlegt. Folglich ist

$$W_0 = \bigcup_{i=1}^k W_0^i \quad \text{und} \quad M \cap W_0 = M \cap \bigcup_{i=1}^k W_0^i = \bigcup_{i=1}^k (M \cap W_0^i).$$

Dann gibt es wenigstens einen Teilwürfel $W_0^i := W_1$, so daß $M \cap W_0^i = M \cap W_1$ durch kein endliches Teilsystem von \mathcal{U} überdeckt wird. Induktiv schließt man weiter. (Da der Induktionsschritt völlig analog zum Anfangsschritt erfolgt, wird er hier weggelassen.)

Es entsteht eine Würfelschachtelung $W_0 \supseteq W_1 \supseteq W_2 \supseteq \dots$, so daß $M \cap W_i$ durch kein endliches Teilsystem von \mathcal{U} überdeckt wird und die Kantenlänge des i -ten Würfels, $l(W_i)$, durch $l(W_i) = \frac{1}{2^i} \cdot l(W_0)$ gegeben ist.

Analog wie im Beweis von Satz 6.4 schachtelt die konstruierte Würfelreihe einen Punkt $\bar{c} \in \mathbb{R}$ ein, d.h., $\bar{c} \in \bigcap_{i=0}^{\infty} W_i$.

Offenbar ist jede der Mengen $M \cap W_i$ unendlich, da sonst $M \cap W_i$ schon durch ein endliches Teilsystem von \mathcal{U} überdeckt wird.

Sei $\varepsilon' > 0$. Wir betrachten $U_{\varepsilon'}(\bar{c})$ und wählen i so groß, daß $W_i \subseteq U_{\varepsilon'}(\bar{c})$ und damit $M \cap W_i \subseteq U_{\varepsilon'}(\bar{c})$. Dann liegen in jeder ε' -Umgebung von \bar{c} unendlich viele Elemente aus M . Folglich ist \bar{c} ein Häufungspunkt von M . Da M abgeschlossen ist, gehört \bar{c} zu M . Folglich gibt es eine offene Menge $U \in \mathcal{U}$, so daß $\bar{c} \in U$. Mit \bar{c} gehört noch eine ganze ε -Umgebung zu U . Es existiert also ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_{\varepsilon}(\bar{c}) \subseteq U$. Wir wählen i jetzt so groß, daß $W_i \subseteq U_{\varepsilon}(\bar{c})$. Dann ist $M \cap W_i \subseteq U$, folglich wird $M \cap W_i$ schon durch **eine** Menge $U \in \mathcal{U}$ überdeckt. Dies ist ein Widerspruch dazu, daß $M \cap W_i$ durch kein endliches Teilsystem von \mathcal{U} überdeckt wird. Damit ist die obige Annahme falsch und der Satz bewiesen. \square