

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Eine wesentliche Aufgabe der Mathematik besteht darin, die Gültigkeit oder Ungültigkeit von mathematischen Aussagen (Behauptungen, Theoremen, ...) zu überprüfen. In diesem Zusammenhang erhebt sich sofort die Frage nach dem *Wahrheitswert* (*wahr* := W bzw. *falsch* := F) einer zusammengesetzten Aussage in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten ihrer einzelnen Bestandteile. Wir setzen hierbei das logische *Prinzip der Zweiwertigkeit* voraus, nämlich, daß jede mathematische Aussage entweder wahr oder falsch ist. In Form von Schemata (*Wahrheitswerttabellen*) kann der Wahrheitwert aussagenlogisch zusammengesetzter Aussagen dargestellt werden. Hierzu seien A und B beliebige Aussagen. Wir bilden aus A , B kompliziertere Aussagen, die mit Hilfe von nicht, und, oder, wenn – so, gdw zusammengesetzt sind. Dann gilt:

1/0/16

A	$\neg A$	A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
W	F	W	W	W	W	W	W
F	W	W	F	F	W	F	F
		F	W	F	W	W	F
		F	F	F	F	W	W

Die Implikation „Wenn A , so B “ ist immer schon dann wahr, wenn die *Voraussetzung* A falsch ist. (In solchen Implikationen nennt man A *Voraussetzung* und B *Behauptung*.) Dies führt gelegentlich zu Irritationen. Aber, in der Mathematik wird die Implikation genau so benutzt. An dem folgenden kleinen Beispiel soll dies erläutert werden.

Wir geben jetzt Regeln für die Verneinung zusammengesetzter Aussagen an. Durch schrittweise Anwendung dieser Regeln lassen sich beliebige mathematische Aussagen verneinen.

1/0/21

$$\begin{aligned}
 \neg(\neg A) &\equiv A, & (\neg(\neg A) \leftrightarrow A \text{ ist also immer wahr.}) \\
 \neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B, \\
 \neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B, \\
 \neg(A \rightarrow B) &\equiv A \wedge \neg B, \\
 \neg(A \leftrightarrow B) &\equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B), \\
 \neg \forall x A(x) &\equiv \exists x \neg A(x), \\
 \neg \exists x A(x) &\equiv \forall x \neg A(x).
 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich sofort die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
 A \rightarrow B &\equiv \neg A \vee B, \\
 A \leftrightarrow B &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).
 \end{aligned}$$