

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

**Satz 2.7** (*Dreiecksungleichungen*)

2/2/22

Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

- (1)  $|a + b| \leq |a| + |b|.$
- (2)  $||a| - |b|| \leq |a - b|.$

**Beweis.** (1). Nach Satz 2.6(3) gilt:  $\pm a \leq |a|$  und  $\pm b \leq |b|.$

2/2/23

1. Fall:  $a + b \geq 0 \implies |a + b| = a + b \leq |a| + |b|.$

2. Fall:  $a + b < 0 \implies |a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|.$

In jedem Fall ist also  $|a + b| \leq |a| + |b|.$

(2). Nach (1) gilt:

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Analog erhält man

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \implies \underbrace{|b| - |a|}_{-(|a| - |b|)} \leq |b - a| = |a - b|.$$

Also  $\pm(|a| - |b|) \leq |a - b|$ , und somit gilt

$$||a| - |b|| \leq |a - b|. \quad \square$$

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.3 Komplexe Zahlen

**Satz 4.17** Für komplexe Zahlen  $z, z_1, z_2$  gilt:

4/3/8

- (1)  $|z| \geq 0$ , und  $|z| = 0 \iff z = 0$ ,
- (2)  $|-z| = |z|$ , ( $\implies |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ )
- (3)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ , ( $\implies |z^n| = |z|^n$ )
- (4)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ , falls  $z_2 \neq 0$ ,
- (5)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ,
- (6)  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$

**Beweis.** (1). Sei  $z = a + ib$ . Dann gilt

4/3/9

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0; \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0.$$

(2). Trivial!

(3). Sei  $z_n = a_n + ib_n$ ,  $n = 1, 2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |a_1 a_2 + i^2 \cdot b_1 b_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2| \\ &= |a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)| \\ &= \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2} \\ &= \sqrt{a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + 2a_1 b_2 b_1 a_2 + b_1^2 a_2^2} \\ &= \sqrt{a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(b_2^2 + a_2^2)} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2)} \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |z_1| \cdot |z_2|. \end{aligned}$$

(4). Es genügt zu zeigen:  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ , denn

$$\left|\frac{u}{z}\right| = \left|u \cdot \frac{1}{z}\right| = |u| \cdot \left|\frac{1}{z}\right| = |u| \cdot \frac{1}{|z|} = \frac{|u|}{|z|}.$$

Wir wissen schon, daß für  $z = a + ib$  und  $c := a^2 + b^2$  gilt:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{c} + i \frac{-b}{c} \implies$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|z|}.$$

(5). Es sei  $z_n = a_n + ib_n$ ,  $n = 1, 2$ . Dann ist die linke Seite  $ls$  von (5):

$$ls := |a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2| = |a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

und die rechte Seite  $rs$  ist:

$$rs := |a_1 + ib_1| + |a_2 + ib_2| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Offenbar sind  $ls, rs \geq 0$ . Folglich ist

$$ls \leq rs \iff ls^2 \leq rs^2 \iff$$

$$(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2) + 2\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + (a_2^2 + b_2^2) \iff$$

$$\underbrace{2(a_1a_2 + b_1b_2)}_{:= (\star)} \leq 2 \cdot \underbrace{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}_{:= (\star\star)}.$$

Ist  $(\star) < 0$ , dann gilt offenbar die letzte Ungleichung und damit  $ls \leq rs$ .

Es sei jetzt  $(\star) \geq 0$ . dann ist

$$\begin{aligned} (\star) \leq (\star\star) &\iff (\star)^2 \leq (\star\star)^2 \iff \\ (a_1a_2 + b_1b_2)^2 &\leq (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \iff \\ a_1^2a_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 &\leq a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 \iff \\ 0 &\leq (a_1b_2)^2 - 2a_1b_2b_1a_2 + (b_1a_2)^2 = (a_1b_2 - b_1a_2)^2. \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt  $ls \leq rs$ .

(6). Der Beweis hierzu erfolgt durch ähnliche Überlegungen.  $\square$

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$

**Satz 6.1** (*Schwarzsche Ungleichung*)

6/1/5

Für beliebige reelle Zahlen  $a_i, b_i$  gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

**Satz 6.2** Für alle  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^n$  und  $r \in \mathbb{R}$  gilt:

6/1/7

- (1)  $|\bar{a}| \geq 0$ , und  $|\bar{a}| = 0 \iff \bar{a} = \bar{0}$ .
- (2)  $|r \cdot \bar{a}| = |r| \cdot |\bar{a}|$ .  
( $\implies |-\bar{a}| = |\bar{a}|$  und  $|\bar{a} - \bar{b}| = |\bar{b} - \bar{a}|$ ). (Symmetrie des Abstands)
- (3)  $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$ . (Dreiecksungleichung)
- (4)  $|\bar{a} - \bar{b}| \leq |\bar{a} - \bar{c}| + |\bar{c} - \bar{b}|$ ,  $\left. \vphantom{\begin{matrix} (4) \\ (5) \end{matrix}} \right\}$  (Formen der Dreiecksungleichung)
- (5)  $||\bar{a}| - |\bar{b}|| \leq |\bar{a} - \bar{b}|$ .

**Beweis.** (1) und (2) sind trivial (analog wie für komplexe Zahlen).

6/1/8

(3) wird mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung bewiesen (analog wie für komplexe Zahlen).

(4) und (5) folgen aus (3) wie bei den reellen Zahlen.  $\square$