

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Satz 8.2 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/14

Ist f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert und nach allen Variablen partiell differenzierbar und sind alle partiellen Ableitungen in \bar{c} stetig, dann ist f in \bar{c} (total) differenzierbar, und für jedes $\bar{x} \in U(\bar{c})$ gilt $f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot (x_i - c_i) + o(\bar{x})$.

(D.h., die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die aufgrund der Differenzierbarkeit existiert, ist gegeben durch $A = (a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{c}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{c}) \right)$ und $A(\bar{x} - \bar{c}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot (x_i - c_i)$.)

Satz 8.3 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/17

Ist f in \bar{c} differenzierbar (d.h., es gibt reelle Zahlen a_1, \dots, a_n , so daß

$$f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + \sum_{i=1}^n a_i(x_i - c_i) + o(\bar{x}) \quad \text{für alle } \bar{x} \text{ in einer Umgebung } U(\bar{c}),$$

dann existieren alle partiellen Ableitungen von f in \bar{c} , und es ist $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})$.

(Die Ableitung $f'(\bar{c}) := (a_1, \dots, a_n)$ ist also durch die partiellen Ableitungen eindeutig bestimmt.)

Satz 8.5 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/25

Ist f in \bar{c} differenzierbar, dann ist f an der Stelle \bar{c} in jede Richtung \bar{r} (mit $|\bar{r}| = 1$)

differenzierbar, und es ist $f_{\bar{r}}(\bar{c}) = f'(\bar{c}) \cdot \bar{r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot r_i$, wobei $\bar{r} = (r_1, \dots, r_n)$.

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 8

- Beziehungen zwischen Differenzierbarkeit, partieller Differenzierbarkeit und Richtungsableitbarkeit,

8/6/4