

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.1 Konvergenz von Reihen

**Definition.** (Konvergenz von Reihen)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  konvergiert (gegen  $a$ )  $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$  konvergiert (gegen  $a$ ).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

$a$  heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

**Satz 4.6** (Leibniz-Kriterium)

4/1/26

Ist  $\sum a_i$  alternierend und  $\lim a_i = 0$  und  $(|a_i|)_{i=0,1,2,\dots}$  monoton fallend, dann ist  $\sum a_i$  konvergent.

**Beispiele.**

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist nicht konvergent. (**Harmonische Reihe**)

4/1/30/3

Diese Reihe dient gleichzeitig als Beispiel dafür, daß eine konvergente Reihe nicht absolut konvergent sein muß. (vgl. Beispiel 1.)

Es sei  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ . Wir betrachten jetzt die  $2^n$ -te Partialsumme

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

und bilden

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}} - S_{2^n} &= \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^n + 2^n} \\ &\quad (\text{jeder dieser } 2^n \text{ Summanden ist größer oder gleich } \frac{1}{2^{n+1}}) \\ &\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{für beliebiges } n. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= S_{2^0} - S_{2^0} + S_{2^1} - S_{2^1} + \dots + S_{2^{n-1}} - S_{2^{n-1}} + S_{2^n} \\ &= \underbrace{S_{2^0}}_{=1} + \underbrace{S_{2^1} - S_{2^0}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{S_{2^2} - S_{2^1}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{S_{2^n} - S_{2^{n-1}}}_{\geq \frac{1}{2}} \\ &\geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Teilfolge  $(S_{2^i})$  von  $(S_n)$  ist also unbeschränkt, und somit ist  $(S_n) = \sum \frac{1}{n}$  nicht konvergent.

Da  $(S_n)$  monoton wächst, ist  $\sum \frac{1}{n}$  bestimmt divergent gegen  $+\infty$ .

**Satz 4.8** (*Majorantenkriterium*)

4/1/32

Es seien  $\sum a_i$ ,  $\sum b_i$  Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei  $\sum b_i$  eine Majorante von  $\sum a_i$ . Dann gilt:

- (1) Ist  $\sum b_i$  konvergent, so ist auch  $\sum a_i$  konvergent.
- (2) Ist  $\sum a_i$  divergent, so ist auch  $\sum b_i$  divergent.

**Satz 4.10** (*Quotientenkriterium*)

4/1/38

Es sei  $a_i \neq 0$  für jedes  $i$ . Dann gilt:

- (1) Existiert ein  $q$  mit  $0 < q < 1$ , so daß für jedes  $i$  gilt:  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$ ,  
dann ist  $\sum a_i$  absolut konvergent.
- (2) Ist  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$  für jedes  $i$ , dann ist  $\sum a_i$  divergent.

## Übungsaufgaben

23. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium:

4/6/23

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2}$ ,
- (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+1)3^n}$ ,
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ .