

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung*)

8/1/1

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

f ist in \bar{c} differenzierbar (oder total differenzierbar)

$\stackrel{\text{Df}}{=} f$ ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert, und es existiert eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $o(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0}, \text{ so daß für jedes } \bar{x} \in U(\bar{c}) \text{ gilt: } f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x}).$$

Die Matrix A heißt dann 1. Ableitung von f an der Stelle \bar{c} .

Bez.: $A := f'(\bar{c})$.

Definition. (*partielle Ableitung*)

8/1/4

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert.

f ist in \bar{c} partiell nach x_i differenzierbar ($i = 1, \dots, n$)

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Die Funktion } \varphi(x_i) := f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) \text{ ist (als Funktion der einen Veränderlichen } x_i) \text{ an der Stelle } c_i \text{ differenzierbar.}$

Nach der früheren Differenzierbarkeitsdefinition bedeutet dies, daß die folgenden Limites existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(c_i + h) - \varphi(c_i)}{h}, \text{ für } h := x_i - c_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - f(\bar{c})}{x_i - c_i}. \end{aligned}$$

Der Limes selbst (falls er existiert) heißt *partielle Ableitung* von f nach x_i an der Stelle \bar{c} (oder kurz: in \bar{c}).

Bez.: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = f_{x_i}(\bar{c})$.

Satz 8.3 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/17

Ist f in \bar{c} differenzierbar (d.h., es gibt reelle Zahlen a_1, \dots, a_n , so daß

$$f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + \sum_{i=1}^n a_i(x_i - c_i) + o(\bar{x}) \text{ für alle } \bar{x} \text{ in einer Umgebung } U(\bar{c}),$$

dann existieren alle partiellen Ableitungen von f in \bar{c} , und es ist $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})$.

(Die Ableitung $f'(\bar{c}) := (a_1, \dots, a_n)$ ist also durch die partiellen Ableitungen eindeutig bestimmt.)

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

8/1/18

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \sum_{i=1}^n a_i(x_i - c_i) + o(\bar{x})$$

auch speziell für

$$\bar{x} = (c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) = \bar{c} + h\bar{e}_i \quad \text{mit} \quad h = x_i - c_i.$$

Folglich ist

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = f(\bar{c} + h\bar{e}_i) - f(\bar{c}) = a_i \cdot h + o(\bar{x}) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{f(\bar{c} + h\bar{e}_i) - f(\bar{c})}{h} = a_i + \underbrace{\frac{o(\bar{x})}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}.$$

Damit existiert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{c} + h\bar{e}_i) - f(\bar{c})}{h} = a_i. \quad \square$$