

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Definition. (\cos, \sin)

5/3/45

$$\cos x \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Satz 5.16 \sin und \cos haben folgende Eigenschaften:

5/3/47

- (1) \sin und \cos sind in \mathbb{R} definiert, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.
- (2) \sin ist ungerade und \cos ist gerade.
- (3) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ ($\implies \sin 2x = 2 \sin x \cos x$).
- (4) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ ($\implies \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$).
- (5) $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$.
- (6) $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}$.
- (7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ($\implies |\sin x|, |\cos x| \leq 1$).
- (8) \sin und \cos sind stetig.

Lemma 2. \cos hat in $[0, 2]$ eine Nullstelle.

5/3/51

Korollar. \cos hat in $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.

5/3/55

Beweis. Angenommen, es existieren $x, y \in [0, 2]$, mit $x \neq y$ und $\cos x = \cos y = 0$.
Sei o.B.d.A. $y < x$. Dann gilt:

5/3/56

$$0 = \cos x - \cos y = -2 \cdot \underbrace{\sin \frac{x-y}{2}}_{\in (0,2)} \cdot \underbrace{\sin \frac{x+y}{2}}_{\in (0,2)} \neq 0,$$

denn nach Lemma 2 ist \sin in $(0, 2)$ positiv. $\nmid!$ \square