

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.1 Ableitung

Der Begriff der *Ableitung* (oder des *Differentialquotienten*) ist aus geometrisch-physikalischen Fragestellungen entstanden, insbesondere aus dem Tangentenproblem und dem Geschwindigkeitsproblem. 7/1/0

##### Tangentenproblem

Gegeben ist eine ebene Kurve und ein Punkt auf dieser Kurve.

Gesucht ist die Gleichung der Tangente (falls existent) an der Kurve in diesem Punkt (vgl. Abb. 7.1).

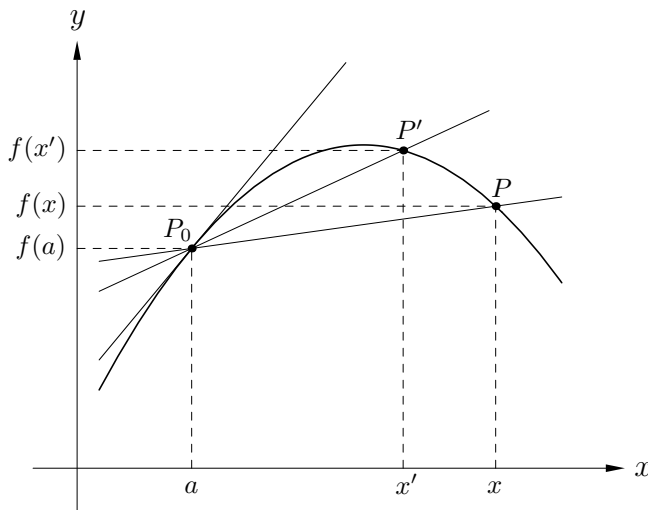


Abb. 7.1 Die Abbildung zeigt, wie sich der Anstieg der Sekante durch die Punkte  $P_0 = (a, f(a))$  und  $P = (x, f(x))$  für  $x \rightarrow a$  verändert.

Im Grenzfalle erhält man die Tangente an der Kurve im Punkt  $P_0$ .

Im einfachsten Fall sei die Kurve mit Hilfe der Funktion  $y = f(x)$  gegeben. Dann ist der Anstieg der Sekante durch die Punkte  $P_0, P$  als Quotient

$$\frac{y - b}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

definiert.

Wenn  $P \rightarrow P_0$  (d.h.  $x \rightarrow a$ ), dann „dreht“ sich die Sekante und nimmt „im Grenzfalle“ die Lage der „Tangente“ ein (falls die Eigenschaften der Funktion „hinreichend gutartig“ sind).

##### Geschwindigkeitsproblem

Ein Massepunkt bewege sich (mit variabler Geschwindigkeit) entlang einer gegebenen Bahn. Gesucht ist die „Augenblicksgeschwindigkeit“ des Punktes zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$ .

Die Durchschnittsgeschwindigkeit  $v$  zwischen zwei Bahnpunkten berechnet sich als Quotient der zurückgelegten Strecke  $s$  und der dazu benötigten Zeit  $t$ :

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

wobei  $\Delta s$  die zurückgelegte Strecke und  $\Delta t$  die gemessene Zeitdifferenz bedeuten.

Durch Verkleinerung der Meßstrecke nähert man sich der sog. Augenblicksgeschwindigkeit an, die für  $t \rightarrow t_0$  entsteht.

Mathematisch gesehen ergibt sich in beiden Fällen das gleiche Problem, nämlich den Grenzwert eines bestimmten Quotienten auszuwerten. Die Mathematik abstrahierte von den konkreten Problemen und entwickelte hierzu eine leistungsfähige Theorie, die *Differentialrechnung*.

Wir betrachten in diesem Abschnitt nur Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition.** (*Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient*)

7/1/3

$f$  ist an der Stelle  $a$  (oder kurz in  $a$ ) *differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$   $f$  ist in einer Umgebung  $U(a)$  definiert, und es existiert  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von  $f$  in  $a$ .

**Bez.**  $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$ .

7/1/6

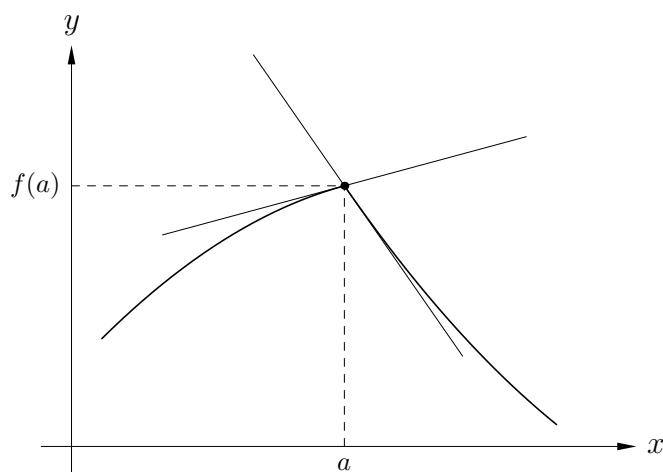


Abb. 7.2 Die dargestellte Funktion besitzt an der Stelle  $a$  eine linksseitige und eine rechtsseitige Ableitung. Da diese beiden Ableitungen jedoch voneinander verschieden sind, ist die Funktion in  $a$  nicht differenzierbar.

**Bemerkung.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Wenn an der durch  $f$  gegebenen Kurve eine *Tangente* im Punkt  $(a, f(a))$  existiert (dies wird der Fall sein, wenn  $f$  in  $a$  differenzierbar ist), dann ist der Anstieg der Tangente an der Stelle  $a$  durch  $f'(a)$  gegeben.

Wir wollen jetzt die Gleichung der Tangente bestimmen. Zunächst gehen wir von der Geradengleichung  $y := t(x) = c \cdot x + d$  aus und berechnen  $c$  und  $d$ .

Der Anstieg der Tangente ist durch  $c = f'(a)$  gegeben. Die Tangente soll durch den Punkt  $(a, f(a))$  verlaufen. Folglich ist

$$t(a) = f'(a) \cdot a + d = f(a) \implies$$

$$d = f(a) - f'(a) \cdot a \implies$$

$$t(x) = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a = f(a) + f'(a)(x - a).$$

**Definition.** (*Tangente*)

7/1/7

Es sei  $f$  in  $a$  differenzierbar.

Die durch die Gleichung  $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$  bestimmte Gerade heißt *Tangente* von  $f$  an der Stelle  $a$  (oder im Punkt  $(a, f(a))$ ), und die entsprechende Gleichung heißt auch *Gleichung der Tangente*. (vgl. Abb. 7.1)