

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

**Satz 7.9** (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

7/2/2

Ist  $a < b$  und  $f$  in  $[a, b]$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar, dann gibt es ein  $c \in (a, b)$ , so daß  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ .

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.2 Partielle Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung

**Satz 8.9** (Satz von Schwarz)

8/2/2

Es sei  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$ .

Ist  $f$  in einer Umgebung  $U(\bar{c})$  definiert und existieren in  $U(\bar{c})$  die partiellen Ableitungen  $f_x, f_y, f_{xy}$  und ist  $f_{xy}$  in  $\bar{c}$  stetig, dann existiert auch  $f_{yx}$  in  $\bar{c}$ , und es ist  $f_{xy}(\bar{c}) = f_{yx}(\bar{c})$ .

(Unter den angegebenen Bedingungen sind die gemischten Ableitungen in  $\bar{c}$  gleich.)

**Beweis.** Es sei  $\bar{c} = (a, b)$  und  $\bar{x} = (x, y)$ .

8/2/3

Wir zeigen, daß  $f_{yx}(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_y(x, b) - f_y(a, b)}{x - a}$  existiert und gleich  $f_{xy}(a, b)$  ist.

Nach Voraussetzung ist  $f$  in  $U(\bar{c})$  partiell nach  $x$  differenzierbar. Folglich läßt sich auf  $f$  (bei festgehaltenem  $y$ ) der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung bezüglich  $x$  anwenden. Damit erhält man für alle  $(x, y) \in U(\bar{c})$  und  $x \neq a, y \neq b$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x - a} \cdot (f_y(x, b) - f_y(a, b)) \\ &= \frac{1}{x - a} \cdot \left( \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{y - b} \cdot \underbrace{(f(x, y) - f(x, b))}_{:= g(x, y)} - \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{y - b} \cdot \underbrace{(f(a, y) - f(a, b))}_{= g(a, y)} \right) \\ &= \frac{1}{x - a} \cdot \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{y - b} \cdot (g(x, y) - g(a, y)) \\ &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{y - b} \cdot \frac{g(x, y) - g(a, y)}{x - a} \end{aligned}$$

$$= \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{y - b} \cdot g_x(\underbrace{a + \vartheta(x - a)}_{:= u}, y) \quad (1. \text{ Mittelwertsatz, } y \text{ fest, } 0 < \vartheta < 1)$$

$$= \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{y - b} \cdot (f_x(u, y) - f_x(u, b))$$

$$= f_{xy}(u, b). \quad (f_{xy} \text{ existiert in } U(\bar{c}))$$

Da nach Voraussetzung  $f_{xy}$  in  $\bar{c}$  stetig ist, existieren die folgenden Limites und es gilt:

$$f_{yx}(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a} \cdot (f_y(x, b) - f_y(a, b)) = \lim_{x \rightarrow a} f_{xy}(u, b) = f_{xy}(a, b). \quad \square$$