

# Kapitel 10

## Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

### Übungsaufgaben

1. Beweisen Sie den Satz 10.1. 10/3/1
2. Beweisen Sie das Riemannsche Integrierbarkeitskriterium (für Doppel- und Dreifachintegrale). 10/3/2
3. Es sei  $D$  ein Rechteck bzw. ein Quader, und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei in  $D$  beschränkt. 10/3/3  
Zeigen Sie:
  - (a) Ist  $f$  in  $D$  stetig, dann ist  $f$  in  $D$  integrierbar.
  - (b) Besitzt  $f$  in  $D$  höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen, dann ist  $f$  in  $D$  integrierbar.
4. Es sei  $[a, b]$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig in  $[a, b]$ , 10/3/4  
und es gelte  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Weiterhin sei  
 $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  ( $x$ -einfacher Bereich).  
Zeigen Sie:  $B$  ist kompakt.
5. Man beweise Satz 10.7. 10/3/5
6. Sei  $D := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ , und  $f$  sei in  $D$  durch  $f(x, y) = x^y$  10/3/6  
definiert.  
Man berechne  $\iint_D f(x, y) \, dx dy$ .
7. Es sei  $B := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ , und  $f$  sei in  $B$  durch 10/3/7  
 $f(x, y) = x^2 + 7y^2$  definiert.  
Berechnen Sie  $\iint_B f(x, y) \, dx dy$ .
8. Berechnen Sie mit Hilfe des Integrals das Volumen der Punktmenge 10/3/8  
 $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq f(x, y)\},$   
wobei  $f(x, y) := 2 + \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$  (schrägabgeschnittener Zylinder).
9. In dem Intervall  $[0, 1]$  seien die Funktionen  $\varphi, \psi$  durch  $\varphi(x) := x^2$  10/3/9  
und  $\psi(x) := \sqrt[4]{x}$  definiert.  
 $B$  sei der durch  $B := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  gegebene  
 $x$ -einfache Bereich. Weiterhin sei  $f(x, y) = \sqrt{x} - y^2$ .  
(a) Berechnen Sie  $\iint_B f(x, y) \, dx dy$ ,

- (b) Stellen Sie  $B$  als  $y$ -einfachen Bereich dar, und berechnen Sie das Integral erneut, jedoch jetzt über dem  $y$ -einfachen Bereich  $B$ .

10. Man berechne das Integral  $\iiint_B \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$  über dem Tetraeder  $B$ , das von **10/3/10** den Ebenen  $x=0$ ;  $y=0$ ;  $z=0$ ;  $x+y+z=1$  begrenzt wird.