

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Definition.** (*gleichmäßige Stetigkeit*)

6/3/25

Sei  $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$  und  $M \subseteq \mathbb{M}_1$ .

$f$  ist in  $M$  *gleichmäßig stetig*

$\stackrel{\text{Def}}{=} M \subseteq D(f)$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $x, y \in M$  gilt: Wenn  $\varrho_1(x, y) < \delta$ , so  $\varrho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

**Satz 6.17** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $M \subseteq D(f)$ .

6/3/30

Ist  $f$  in  $M$  stetig und  $M$  beschränkt und abgeschlossen, dann ist  $f$  in  $M$  gleichmäßig stetig.

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

**Definition.** (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von  $f$  in  $I$ , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von  $f$  in  $I$  gleich, dann heißt  $f$  in  $I$  (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

#### 9.3 Integrierbarkeitskriterien

**Satz 9.8** (*Riemannsches Integrierbarkeitskriterium*)

9/3/1

Sei  $f$  in  $I = [a, b]$  definiert und beschränkt. Dann gilt:  $f$  ist in  $I$  integrierbar gdw für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $\mathfrak{z}$  von  $I$  existiert, so daß  $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$ .

## 9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

**Satz 9.10** *Ist  $f$  in  $I$  stetig, dann ist  $f$  in  $I$  integrierbar.*

9/4/0

**Beweis.** Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Riemann-Kriteriums.

9/4/1

Nach Voraussetzung ist  $f$  stetig in  $I$ , folglich ist  $f$  dort auch gleichmäßig stetig.

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir suchen eine Zerlegung  $\mathfrak{z}$  von  $I$ , so daß  $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$ .

Sei jetzt  $\varepsilon' > 0$  beliebig, aber

$$0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Zu diesem  $\varepsilon' > 0$  existiert auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  in  $I$  ein  $\delta' > 0$ , so daß für jedes  $x_1, x_2 \in I$  gilt:

$$\text{Wenn } |x_1 - x_2| < \delta', \text{ so } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon'.$$

Sei jetzt  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  eine Zerlegung von  $I$ , so daß  $d(\mathfrak{z}) < \delta'$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^n \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{< \delta'} \cdot \underbrace{\left( \sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right)}_{\leq \varepsilon'} \\ &\leq \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \varepsilon' \\ &= \varepsilon' \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i)}_{= b-a} \\ &= \varepsilon' (b-a) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist  $f$  in  $I$  integrierbar.  $\square$