

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Beispiele.

2. Es sei $|a| < 1$ und $(a_n) = (a^n)$.

3/1/8/2

Um nachzuweisen, daß (a^n) eine Nullfolge ist, g.z.z.:

Wenn $\varepsilon > 0$, dann existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$: $|a^n - 0| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$. Für $a = 0$ ist die Behauptung trivial.

Es sei jetzt $a \neq 0$. Wegen $|a| < 1$ ist $\frac{1}{|a|} > 1$.

Nach dem Korollar zur Bernoullischen Ungleichung existiert für $\frac{1}{\varepsilon}$ eine natürliche Zahl

n_0 , so daß $\left(\frac{1}{|a|}\right)^{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$. Folglich ist $\frac{1}{|a|^{n_0}} > \frac{1}{\varepsilon}$, also $|a|^{n_0} < \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt

damit $|a^n - 0| = |a|^n \leq |a|^{n_0} < \varepsilon$.

Übungsaufgaben

5. Zeigen Sie: (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} = 1$, (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3/3/5

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (Konvergenz von Reihen)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$ konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

Bemerkung. Für die Anwendung des Wurzelkriteriums genügt es, daß $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q < 1$ für fast alle i . (Offenbar folgt aus $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q < 1$ sofort $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} < 1$.)

4/1/37

Ist andererseits (a_i) beschränkt und $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} := c < 1$, so ist $\sqrt[i]{|a_i|} \leq \underbrace{c + \frac{1-c}{2}}_{:= q < 1}$ für

fast alle i ; folglich ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

Ist also $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} < 1$, so ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

Analog erhält man: Wenn $\sqrt[i]{|a_i|} > 1$ für fast alle i , so ist $\sum a_i$ divergent.

Achtung: Für die Konvergenz von $\sum a_i$ reicht es noch nicht, daß stets $\sqrt[i]{|a_i|} < 1$ (bzw. $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} = 1$) ist;

z.B. für $a_i = \frac{1}{i}$ ist $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} < 1$, denn $\frac{1}{i} < 1$ (bzw. $\overline{\lim} \frac{1}{i} = 1$). Aber $\sum \frac{1}{i}$ ist nicht konvergent.

Wenn $\lim \sqrt[i]{|a_i|}$ existiert, dann ist offenbar $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} = \lim \sqrt[i]{|a_i|}$, und man rechnet nur mit dem Limes.

Bemerkung. Für die Anwendung des Quotientenkriteriums genügt es, daß

4/1/40

$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q < 1$ für fast alle i .

Ähnlich wie beim Wurzelkriterium folgt aus $\overline{\lim} \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| < 1$ die absolute Konvergenz von $\sum a_i$.

Ist andererseits $\underline{\lim} \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| > 1$, dann ist $\sum a_i$ divergent.

Übungsaufgaben

11. Für welche reellen Zahlen x sind die folgenden Reihen konvergent:

4/6/11

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}; \quad x \neq -1,$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^{2n+1}; \quad x \neq 0,$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}.$