

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

#### 5.2 Stetigkeit

**Satz 5.4** (*Stetigkeit der rationalen Operationen*)

5/2/17

Summe, Differenz, Produkt und Quotient von stetigen Funktionen sind stetig.

**Satz 5.5** (*Stetigkeit der Verkettung*)

5/2/19

Seien  $f, g$  Funktionen mit  $W(g) \subseteq D(f)$ .

Ist  $g$  in  $a$  stetig und  $f$  in  $g(a)$  stetig, dann ist  $f \circ g$  in  $a$  stetig.

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.1 Das unbestimmte Integral

**Definition.** (*Stammfunktion*)

9/1/1

Es seien  $f, F$  in einer Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  definiert.

$F$  ist eine *Stammfunktion* von  $f$  in  $M$

$\overline{\text{Def}}$   $F$  ist in  $M$  differenzierbar, und es gilt  $F'(x) = f(x)$  für jedes  $x \in M$ .

#### 9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

**Satz 9.18** Ist  $f$  in  $I$  stetig und  $x \in I$ , dann ist die durch  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$

9/5/11

definierte Funktion  $F$  in  $I$  differenzierbar, und es ist  $F' = f$

(d.h.,  $F$  ist eine Stammfunktion von  $f$  in  $I$ ).

**Satz 9.19** (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*)

9/5/14

Ist  $f$  in  $[a, b]$  stetig und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  in  $[a, b]$ , dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Satz 9.21** (*Substitutionsregel*)

9/5/19

Ist  $f$  in  $[a, b]$  stetig,  $g$  in  $[\alpha, \beta]$  stetig differenzierbar und  $g([\alpha, \beta]) = [a, b]$ ,  
 $g(\alpha) = a$  und  $g(\beta) = b$ , dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{a=g(\alpha)}^{b=g(\beta)} f(t) dt.$$

Ist außerdem  $g$  injektiv, also  $\alpha = g^{-1}(a)$  und  $\beta = g^{-1}(b)$ , dann ist

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x) dx.$$

**Beweis.** Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ ; sie existiert nach Satz 9.18. Dann ist offenbar  $F(g(x))$  eine Stammfunktion von  $f(g(x)) \cdot g'(x)$  in  $[\alpha, \beta]$ . Außerdem ist  $f(g(x)) \cdot g'(x)$  in  $[\alpha, \beta]$  stetig. Folglich gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

9/5/20

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x) dx &= [F(g(x))]_{\alpha}^{\beta} \\ &= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(t) dt. \quad \square \end{aligned}$$