

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Satz 10.3 (*iterierte Integrale über Rechteckbereichen*)

10/1/13

Sei $D = [a, b] \times [c, d]$ und f in D integrierbar. Ist $f(x, y)$ für jedes fixierte $x \in [a, b]$ als Funktion von y in $[c, d]$ integrierbar und ist $F(x) := \int_c^d f(x, y) dy$ in $[a, b]$ integrierbar, dann ist $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b F(x) dx$.

10.2 Dreifachintegrale

Satz 10.7 (*dreifach iterierte Integrale über Quadern*)

10/2/8

Sei $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ und $f(x, y, z)$ in D integrierbar. Ist $f(x, y, z)$ für jedes fixierte $x \in [a_1, b_1]$ (als Funktion von x, y) in $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3] := D'$ integrierbar und $F(x) := \iint_{D'} f(x, y, z) dy dz$ (als Funktion von x) in $[a_1, b_1]$ integrierbar, dann ist $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{D'} f(x, y, z) dy dz \right) dx$.

Korollar. Ist $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ und $f(x, y, z)$ in D stetig, dann ist (f in D integrierbar und)

10/2/10

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Beweis. Der Beweis folgt sofort aus den Sätzen 10.7 und 10.3 \square

10/2/11