

## Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Satz 3.10** (Eigenschaften konvergenter Folgen)

3/1/43

Es seien  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  konvergente Folgen und  $c, d$  seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1)  $(c \cdot a_n)$  ist konvergent und  $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$ .
- (2)  $(a_n + b_n)$  ist konvergent und  $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ .
- (3)  $(a_n \cdot b_n)$  ist konvergent und  $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$ .
- (4) Sind alle  $b_n \neq 0$  und ist  $\lim b_n \neq 0$ , dann ist  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  konvergent und  

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}.$$
- (4') Sind alle  $b_n \neq 0$  und ist  $\lim b_n \neq 0$ , dann ist  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  konvergent  
und  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$
- (5)  $(|a_n|)$  ist konvergent und  $\lim |a_n| = |\lim a_n|.$
- (6) Ist  $a_n \leq b_n$  für jedes  $n$ , dann ist  $\lim a_n \leq \lim b_n$ .  
Ist insbesondere  $a_n \leq d$  bzw.  $d \leq b_n$  für jedes  $n$ , dann ist  $\lim a_n \leq d$   
bzw.  $d \leq \lim b_n$ .

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.2 Stetigkeit

**Satz 5.3** (Folgenstetigkeit)

5/2/14

Es sei  $a \in D(f)$ . Dann gilt:

$f$  ist in  $a$  stetig gdw für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in D(f)$  gilt:

Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , so  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

**Satz 5.4** (Stetigkeit der rationalen Operationen)

5/2/17

Summe, Differenz, Produkt und Quotient von stetigen Funktionen sind stetig.

**Beweis.** Mit Hilfe von Satz 5.3 erhält man die Behauptung unmittelbar aus den Grenzwertsätzen für Folgen.

5/2/18

Wir skizzieren den Beweis für die Summe. Es sei  $x_n \rightarrow a$ . Dann ist

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a) + g(a) = (f + g)(a). \quad \square$$