

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.2 Dreifachintegrale

Dreifachintegrale sind völlig analog zu Doppelintegralen definiert.

10/2/0

Dazu seien $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3]$ Intervalle in \mathbb{R} ,

D sei der Quader $D := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_3, b_3]$, und

$f(x, y, z) : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei in D definiert und beschränkt.

Eine *Zerlegung* $\bar{\mathfrak{z}}$ von D entsteht durch Zerlegungen $\bar{\mathfrak{z}}_\nu := (a_\nu^\nu, \dots, a_{n_\nu+1}^\nu)$ von $[a_\nu, b_\nu]$, $\nu = 1, \dots, 3$. Dadurch entstehen kleinere Quader

$$D_{ijk} := [a_i^1, a_{i+1}^1] \times [a_j^2, a_{j+1}^2] \times [a_k^3, a_{k+1}^3].$$

Wegen der Beschränktheit von f in D existieren insbesondere $h_{ijk} := \inf_{\bar{x} \in D_{ijk}} f(\bar{x})$ und

$H_{ijk} := \sup_{\bar{x} \in D_{ijk}} f(\bar{x})$. Damit lassen sich wie früher *Unter-* und *Obersummen* definieren,

wobei D_{ijk} wieder für den Quader selbst und auch für dessen Rauminhalt steht.

Definition. (*Untersumme, Obersumme*)

10/2/1

(1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ heißt *Untersumme* von f bei der Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Def}}{\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})} := \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} D_{ijk} \cdot h_{ij}.$$

(2) $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ heißt *Obersumme* von f bei der Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Def}}{\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})} := \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} D_{ijk} \cdot H_{ij}.$$

Dies sind Summen von 4-dimensionalen Quadern mit der 3-dimensionalen „Grundfläche“ D_{ijk} und der Höhe h_{ijk} bzw. H_{ijk} .

10/2/2

Im folgenden sei D der Quader $D := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_3, b_3]$ und $f(x, y, z) : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt analog wie im ein- und zweidimensionalen Fall der folgende Satz, der die Grundlage für die Definition des Dreifachintegrals liefert (hierbei ist D wieder als Quader und auch als dessen Rauminhalt zu verstehen).

Satz 10.6 *Es sei f in D definiert und beschränkt und $\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\mathfrak{z}}', \bar{\mathfrak{z}}_1, \bar{\mathfrak{z}}_2$ seien beliebige Zerlegungen von D . Dann gilt:*

10/2/3

(1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.

(2) $D \cdot \inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ und $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq D \cdot \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x})$.

(3) Ist $\bar{\mathfrak{z}}'$ eine Verfeinerung von $\bar{\mathfrak{z}}$, dann gilt $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.

(4) Es ist stets $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_1) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_2)$.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem des Satzes 10.1 \square

10/2/4

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral*)

10/2/5

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \stackrel{\text{Df}}{=} \sup \{ \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) : \bar{\mathfrak{z}} \text{ Zerlegung von } D \} \quad (\text{Unterintegral von } f \text{ in } D).$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \stackrel{\text{Df}}{=} \inf \{ \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) : \bar{\mathfrak{z}} \text{ Zerlegung von } D \} \quad (\text{Oberintegral von } f \text{ in } D).$$

Bemerkung.

10/2/6

Der Einfachheit halber schreiben wir hierfür auch $\int_D f(\bar{x}) d\bar{x}$ bzw. $\overline{\int}_D f(\bar{x}) d\bar{x}$.

Nach Definition des Unter- und Oberintegrals gilt offenbar $\int_D f(\bar{x}) d\bar{x} \leq \overline{\int}_D f(\bar{x}) d\bar{x}$.

Definition. (*Integral über Quadern*)

10/2/7

Es sei D ein dreidimensionaler Quader und $f(x, y, z) := f(\bar{x})$ in D definiert und beschränkt.

$$f \text{ ist in } D \text{ integrierbar} \stackrel{\text{Df}}{=} \int_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \overline{\int}_D f(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *Riemann-Integral* oder *Dreifachintegral* oder kurz *Integral* von f in D .

$$\text{Bez.} \quad \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz := \int_D f(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Satz 10.7 (*dreifach iterierte Integrale über Quadern*)

10/2/8

Sei $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ und $f(x, y, z)$ in D integrierbar.

Ist $f(x, y, z)$ für jedes fixierte $x \in [a_1, b_1]$ (als Funktion von x, y) in $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3] := D'$ integrierbar und $F(x) := \iint_{D'} f(x, y, z) dy dz$ (als Funktion von x) in $[a_1, b_1]$ integrierbar,

$$\text{dann ist} \quad \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{D'} f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$

Beweis. Den Beweis führt man analog zu Satz 10.3 \square

10/2/9

Korollar. Ist $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ und $f(x, y, z)$ in D stetig, dann ist

10/2/10

(f in D integrierbar und)

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Beweis. Der Beweis folgt sofort aus den Sätzen 10.7 und 10.3 \square

10/2/11

Einfache Bereiche in \mathbb{R}^3

10/2/12

Es sei $[a_1, b_1]$ ein Intervall in \mathbb{R} , $\varphi_1, \psi_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ seien in $[a_1, b_1]$ stetig, und es sei $\varphi_1(x) \leq \psi_1(x)$ für alle $x \in [a_1, b_1]$. Dann ist

$$B' := \{(x, y) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)\}$$

ein x -einfacher Bereich in \mathbb{R}^2 (d.h. in der (x, y) -Ebene). Weiterhin seien φ_2, ψ_2 stetige Funktionen von B' in \mathbb{R} , und für alle $(x, y) \in B'$ gelte stets $\varphi_2(x, y) \leq \psi_2(x, y)$. Dann heißt

$$B := \{(x, y, z) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x), \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

einfacher Bereich in \mathbb{R}^3 .

Da die Variablen x, y, z hierbei gleichberechtigt sind, hätte man auch mit y oder z beginnen können. Die Entscheidung darüber, mit welcher der Variablen man beginnt, wird vernünftigerweise so getroffen, daß sich die anschließende Integration am einfachsten gestaltet.

Betrachtet man zunächst einen y -einfachen Bereich B' , dann startet man mit einem Intervall $[a_2, b_2]$ und entsprechenden stetigen Funktionen $\varphi_1, \psi_1 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $\varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y)$ für alle $y \in [a_2, b_2]$. Dann ist

$$B' = \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y), a_2 \leq y \leq b_2\} \quad \text{und}$$

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

In der folgenden Abbildung ist B' ein y -einfacher Bereich und B ein einfacher dreidimensionaler Bereich.

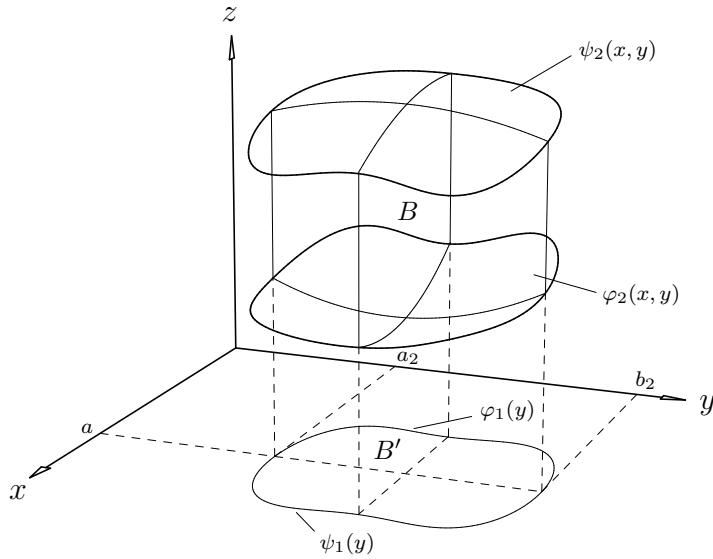


Abb. 10.12 zeigt einen dreidimensionalen einfachen Bereich B , der von oben durch $\psi_2(x, y)$ und von unten durch $\varphi_2(x, y)$ begrenzt ist. Der entsprechende y -einfache Bereich B' in der (x, y) -Ebene ist von oben bzw. von unten durch $\psi_1(y)$ bzw. durch $\varphi_1(y)$ begrenzt. B' wird in dem Intervall $[a_2, b_2]$ betrachtet.

Wir werden jetzt Dreifachintegrale auf einfachen Bereichen definieren.

10/2/14

Dazu sei $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Quader und $B \subseteq D$ ein einfacher Bereich; o.B.d.A. gehen wir von einem x -einfachen Bereich B' über $[a_1, b_1]$ aus.

Sei $f(x, y, z) := f(\bar{x})$ in B definiert und stetig und

$$f^*(\bar{x}) \stackrel{\text{Df}}{=} \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{für } \bar{x} \in B, \\ 0, & \text{für } \bar{x} \in D \setminus B. \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $x \in [a_1, b_1]$:

- wenn $a_2 \leq y < \varphi_1(x)$, so $f^*(\bar{x}) = 0$,
- wenn $\varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)$, so $f^*(\bar{x}) = f(\bar{x})$,
- wenn $\psi_1(x) < y \leq b_2$, so $f^*(\bar{x}) = 0$.

Für jedes $y \in [a_2, b_2]$ erhält man:

- wenn $a_3 \leq z < \varphi_2(x, y)$, so $f^*(\bar{x}) = 0$,
- wenn $\varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$, so $f^*(\bar{x}) = f(\bar{x})$,
- wenn $\psi_2(x, y) < z \leq b_3$, so $f^*(\bar{x}) = 0$.

Satz 10.8 Es sei B ein einfacher Bereich (in \mathbb{R}^3), $B \subseteq D := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_3, b_3]$, und $f(x, y, z)$ sei in B definiert und stetig. Dann ist f^* in D integrierbar, und es ist

10/2/15

$$\iiint_D f^*(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Beweisidee. Den Beweis führt man analog zum Satz 10.4. Aufgrund von Satz 10.7 genügt folgendes zu zeigen:

10/2/16

1. f^* ist in D integrierbar.
2. Für jedes fixierte $x \in [a_1, b_1]$ ist $f^*(x, y, z)$ (als Funktion von x und y) in $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3] := D'$ integrierbar.
3. $F(x) := \iint_{D'} f^*(x, y, z) dydz$ ist (als Funktion von x) in $[a_1, b_1]$ integrierbar.

Diese Behauptungen zeigt man durch ähnliche Überlegungen wie beim Beweis von Satz 10.3. \square

Analog wie im vorhergehenden Abschnitt lassen sich jetzt Dreifachintegrale über einfachen Bereichen definieren. 10/2/17

Definition. (*Dreifachintegral über einfachen Bereichen*) 10/2/18

Es sei B ein einfacher Bereich und D ein Quader, so daß $B \subseteq D$.

$f(x, y, z) : B \rightarrow \mathbb{R}$ sei in B stetig und f^* wie oben definiert.

f ist in B integrierbar $\stackrel{\text{Df}}{=} f^*$ ist in D integrierbar, und

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz \stackrel{\text{Df}}{=} \iiint_D f^*(x, y, z) dx dy dz.$$

$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz$ heißt dann *Dreifachintegral* (oder kurz *Integral*) von f über B .

Bemerkung. Völlig analog lassen sich auch *n-fache Integrale* definieren.

Satz 10.9 (*iterierte Integrale über einfachen Bereichen*) 10/2/19

Es sei B ein einfacher Bereich (in \mathbb{R}^3) und $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ seien wie oben definiert.

Ist $f(x, y, z)$ in B stetig, dann ist f in B integrierbar, und es gilt:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Beweis. Den Beweis führt man analog wie im zweidimensionalen Fall, wir werden die Beweisidee skizzieren. 10/2/20

Nach dem Korollar zu Satz Satz 10.7 ist

$$\iiint_B f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f^*(\bar{x}) dz \right) dy \right) dx.$$

Aufgrund der Definition von f^* in D gilt für jedes fixierte $z \in [a_3, b_3]$:

$$\begin{aligned}
a_3 \leq z < \varphi_2(x, y) &\implies f^*(\bar{x}) = 0, \\
\varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y) &\implies f^*(\bar{x}) = f(\bar{x}), \\
\psi_2 < z \leq b_3 &\implies f^*(\bar{x}) = 0.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\int_{a_3}^{b_3} f^*(\bar{x}) dz &= \int_{a_3}^{\varphi_2(x, y)} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=0} dz + \int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f^*(\bar{x}) dz + \int_{\psi_2(x, y)}^{b_3} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=0} dz \\
&= \int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=f(\bar{x})} dz := G^*(x, y).
\end{aligned}$$

Analog erhält man für jedes feste $y \in [a_2, b_2]$:

$$\begin{aligned}
\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f^*(\bar{x}) dz \right) dy &= \int_{a_2}^{b_2} G^*(x, y) dy \\
&= \int_{a_2}^{\varphi_1(x)} G^*(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} G^*(x, y) dy + \int_{\psi_1(x)}^{b_2} G^*(x, y) dy \\
&= \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} G^*(x, y) dy \\
&= \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=f(\bar{x})} dz \right) dy.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\iiint_B f(\bar{x}) d\bar{x} &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f^*(\bar{x}) dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(\bar{x}) dz \right) dy \right) dx. \quad \square
\end{aligned}$$

Bemerkung.

10/2/21

1. Als Volumen eines dreidimensionalen einfachen Bereiches B , der wie in den vorhergehenden Untersuchungen definiert ist, ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
V &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} (\psi_2(x, y) - \varphi_2(x, y)) dy \right) dx \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} 1 dz \right) dy \right) dx \\
&= \iiint_B 1 dx dy dz = \iiint_B dx dy dz.
\end{aligned}$$

(Hierbei ist auf B ebenfalls eine Funktion $f(\bar{x})$ definiert, nämlich $f(\bar{x}) = 1$.)

2. Ist B abermals ein einfacher dreidimensionaler Bereich, in dem eine (physikalische) Masse verteilt ist, und gibt die in B stetige Funktion $f(\bar{x})$ die Masseverteilung an, dann liefert $\iiint_B f(\bar{x}) d\bar{x}$ die in B befindliche Gesamtmasse.

Beispiel.

10/2/22

In einem aufrechtstehenden Zylinder B mit dem Radius r und der Höhe h sei eine Masse verteilt, deren Dichte nur von der Niveauhöhe im Zylinder abhängt. Insbesondere sei $f(x, y, z) := h - z$ die Funktion, die die Masseverteilung angibt. (Auf der Niveauhöhe h herrscht eine Massendichte von 0, und auf der Höhe null die Dichte h).

Es soll die Gesamtmasse in dem Zylinder berechnet werden.

B wird definiert durch den x -einfachen Bereich

$$B' := \{(x, y) : -r \leq x \leq r, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)\},$$

wobei $\varphi_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ und $\psi_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Schließlich ist

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

mit $\varphi_2(x, y) = 0$ und $\psi_2(x, y) = h$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} (h - z) dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \underbrace{\left[hz - \frac{z^2}{2} \right]_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)}}_{= \frac{h^2}{2}} dy \right) dx = \frac{h^2}{2} \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} dy \right) dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{h^2}{2} \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} \, dx = h^2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$$

$$= r^2 \pi h \cdot \frac{h}{2} = \frac{r^2 \pi h^2}{2}.$$