

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.2 Dreifachintegrale

Bemerkung.

10/2/21

1. Als Volumen eines dreidimensionalen einfachen Bereiches B , der wie in den vorhergehenden Untersuchungen definiert ist, ergibt sich dann

$$\begin{aligned} V &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} (\psi_2(x, y) - \varphi_2(x, y)) dy \right) dx \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} 1 dz \right) dy \right) dx \\ &= \iiint_B 1 dx dy dz = \iiint_B dx dy dz. \end{aligned}$$

(Hierbei ist auf B ebenfalls eine Funktion $f(\bar{x})$ definiert, nämlich $f(\bar{x}) = 1$.)

2. Ist B abermals ein einfacher dreidimensionaler Bereich, in dem eine (physikalische) Masse verteilt ist, und gibt die in B stetige Funktion $f(\bar{x})$ die Masseverteilung an, dann liefert $\iiint_B f(\bar{x}) d\bar{x}$ die in B befindliche Gesamtmasse.

Beispiel.

10/2/22

In einem aufrechtstehenden Zylinder B mit dem Radius r und der Höhe h sei eine Masse verteilt, deren Dichte nur von der Niveauhöhe im Zylinder abhängt. Insbesondere sei $f(x, y, z) := h - z$ die Funktion, die die Masseverteilung angibt. (Auf der Niveauhöhe h herrscht eine Massendichte von 0, und auf der Höhe null die Dichte h).

Es soll die Gesamtmasse in dem Zylinder berechnet werden.

B wird definiert durch den x -einfachen Bereich

$$B' := \{(x, y) : -r \leq x \leq r, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)\},$$

wobei $\varphi_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ und $\psi_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Schließlich ist

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

mit $\varphi_2(x, y) = 0$ und $\psi_2(x, y) = h$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_B f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} (h - z) \, dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \underbrace{\left[hz - \frac{z^2}{2} \right]_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)}}_{= \frac{h^2}{2}} dy \right) dx = \frac{h^2}{2} \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} dy \right) dx \\
&= \frac{h^2}{2} \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} \, dx = h^2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \\
&= r^2 \pi h \cdot \frac{h}{2} = \frac{r^2 \pi h^2}{2}.
\end{aligned}$$