

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

Übungsaufgaben

1. Es sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. 9/10/1
 Überprüfen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:
 - (a) Ist $f(x)$ eine periodische Funktion, so ist auch $F(x)$ periodisch.
 - (b) Ist $f(x)$ eine ungerade (bzw. gerade) Funktion, so ist $F(x)$ eine gerade (bzw. ungerade) Funktion.

2. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale: 9/10/2
 - (a) $\int x(x+1)(x-2)dx$,
 - (b) $\int \frac{\sqrt{4+x^2} + 2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}} dx$,
 - (c) $\int (3x-5)^{10} dx$, [Hinweis: Substitutionsregel],
 - (d) $\int x \sin x dx$, [Hinweis: Partielle Integration].

3. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$. 9/10/3

4. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale $\int f(x)dx$: 9/10/4

(a) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2+2x-8}$,	(d) $f(x) = \frac{4x-3}{2x^2-3x}$,
(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$,	(e) $f(x) = \frac{-2 \cos x \sin x}{\cos^2 x}$,
(c) $f(x) = \frac{1}{x^2+9}$,	(f) $f(x) = x \ln^2 x$.

5. Beweisen Sie: Ist die Funktion f in dem Intervall $[a, b]$ stetig und nicht negativ 9/10/5
 und ist $\int_a^b f(x)dx = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.
[Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.]

6. Es sei f in dem Intervall $[a, b]$ integrierbar und $f(x) \leq c$ für alle $x \in [a, b]$. 9/10/6
 Man beweise $\int_a^b f(x)dx \leq c(b-a)$.

7. Es seien f, g in dem Intervall $[a, b]$ stetig und es sei $f(x) \leq g(x)$ für jedes $x \in [a, b]$. 9/10/7

Gibt es ein $c \in [a, b]$, so daß $f(c) < g(c)$, dann ist $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$.

8. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale: 9/10/8

(a) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx,$

(c) $\int_0^2 x^3 e^x,$

(b) $\int_0^1 e^{e^x} e^x dx,$

(d) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$

9. Berechnen Sie den Inhalt der Punktmenge 9/10/9

$$M = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1 \text{ und } f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

wobei $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2 - x^2$.

10. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von oben bzw. von unten durch 9/10/10

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad r > 0, \quad \text{bzw. durch} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{r} \cdot x^2$$

begrenzt wird.

11. Es sei 9/10/11

$$f(x) = \begin{cases} 5 \sin x + 3x & \text{für } x \leq 1, \\ x^{-1} + 3x^2 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Man berechne $\int_{-2}^5 f(x)dx$.

12. Es sei $f(x) = e^{-x} \cos x$. Man berechne einen Näherungswert für das Integral von f 9/10/12
über dem Intervall $[0, \frac{2}{3}]$, indem man f zunächst durch ein Polynom dritten Grades approximiert.

13. Es sei 9/10/13

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-1, 0], \\ 1 & \text{für } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f in $[-1, 1]$ bestimmt integrierbar ist dort aber keine Stammfunktion besitzt.

[Hinweis: Beweis indirekt; eine Stammfunktion müßte insbesondere an der Stelle 0 differenzierbar sein.]

14. Es sei

9/10/14

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos \frac{\pi}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f in $I = [-1, 1]$ differenzierbar ist (also f' in I eine Stammfunktion besitzt), aber f' in I nicht bestimmt integrierbar ist.

[Hinweis: f' ist in I nicht beschränkt.]

15. Berechnen Sie das Volumen eines Torus. (Drehung einer Kreisscheibe um die x -Achse mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $(0, R)$.)

9/10/15

16. Es sei $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

9/10/16

Ermitteln Sie eine Rekursionsformel für I_n und berechnen Sie I_n .

17. Beweisen Sie, daß für $0 < a, b$ gilt:

9/10/17

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2bx}} = \begin{cases} 2 & \text{für } b < a \\ \frac{2a}{b} & \text{für } b > a. \end{cases}$$

18. Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz:

9/10/18

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},$	(e) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1},$
(b) $\int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}},$	(f) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x + 1},$
(c) $\int_0^\pi \tan x \, dx,$	(g) $\int_0^\infty \sin 3x \, dx,$
(d) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2},$	(h) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx.$

19. (a) Berechnen Sie die Bogenlänge der durch $f(x) = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ im Intervall $[0, 2]$ definierten Kurve.

9/10/19

(b) Bestimmen Sie die Länge der Schraubenlinie mit dem Radius r und der Ganghöhe $c \cdot 2\pi$ für einen Gewindegang.

(c) Es sei $\vec{f}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (Parameterdarstellung der Astroide).

Bestimmen Sie die Länge des gegebenen Kurvenstücks.