

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.4 Potenzreihen

Definition. (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *Potenzreihe* in $x-a$ mit den *Koeffizienten* a_n .

Definition. (*Konvergenzradius*)

4/4/5

Es sei ϱ eine nicht-negative reelle Zahl oder $\varrho = \infty$.

ϱ heißt *Konvergenzradius* von $\sum a_n(x-a)^n$

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes x gilt: Wenn $|x-a| < \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent, und wenn $|x-a| > \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ divergent.

(Hierbei soll immer gelten: $\{x : |x-a| < \infty\} = \mathbb{R}$ bzw. $= \mathbb{C}$ und $\{x : |x-a| > \infty\} = \emptyset$.)

4.5 Rechnen mit Potenzreihen

Satz 4.24 (*Umordnen von Potenzreihen*)

4/5/4

Voraussetzungen:

- (1) Es sei $\sum a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$.
- (2) Weiterhin sei $b \neq a$, $|b-a| < \varrho$ und $\varrho - |b-a| = \varrho' (> 0)$.

Behauptung:

Es gibt eine Potenzreihe $\sum b_n(x-b)^n$ mit einem Konvergenzradius $\geq \varrho'$, so daß für jedes x mit $|x-b| < \varrho'$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-b)^n, \text{ wobei } b_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m \binom{m}{n} (b-a)^{m-n}.$$

(Bez.: $\sum b_n(x-b)^n$ entsteht aus $\sum a_n(x-a)^n$ durch Umordnung nach Potenzen von $(x-b)$.)