

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Gleichheit von Mengen

1/0/2

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, d.h.,

$$M = N \stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } x \text{ gilt: } x \in M \text{ genau dann, wenn } x \in N.$$

Eine wesentliche Aufgabe der Mathematik besteht darin, die Gültigkeit oder Ungültigkeit von mathematischen Aussagen (Behauptungen, Theoremen, ...) zu überprüfen. In diesem Zusammenhang erhebt sich sofort die Frage nach dem *Wahrheitswert* (*wahr* := W bzw. *falsch* := F) einer zusammengesetzten Aussage in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten ihrer einzelnen Bestandteile. Wir setzen hierbei das logische *Prinzip der Zweiwertigkeit* voraus, nämlich, daß jede mathematische Aussage entweder wahr oder falsch ist. In Form von Schemata (*Wahrheitstabelle*) kann der Wahrheitwert aussagenlogisch zusammengesetzter Aussagen dargestellt werden. Hierzu seien *A* und *B* beliebige Aussagen. Wir bilden aus *A*, *B* kompliziertere Aussagen, die mit Hilfe von nicht, und, oder, wenn – so, gdw zusammengesetzt sind. Dann gilt:

1/0/16

<i>A</i>	$\neg A$	<i>A</i>	<i>B</i>	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
W	F	W	W	W	W	W	W
F	W	W	F	F	W	F	F
		F	W	F	W	W	F
		F	F	F	F	W	W

Die Implikation „Wenn *A*, so *B*“ ist immer schon dann wahr, wenn die *Voraussetzung* *A* falsch ist. (In solchen Implikationen nennt man *A* *Voraussetzung* und *B* *Behauptung*.) Dies führt gelegentlich zu Irritationen. Aber, in der Mathematik wird die Implikation genau so benutzt. An dem folgenden kleinen Beispiel soll dies erläutert werden.

Übungsaufgaben

9. Es sei *R* eine zweistellige Relation in \mathbb{R} .

1/1/9

Verneinen Sie die folgenden Aussagen, und führen Sie die jeweilige Verneinung so weit wie möglich aus:

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$.
- Nicht für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es reelle Zahlen y_1, y_2 mit $y_1 \neq y_2$ und $(x, y_1) \in R$ und $(x, y_2) \in R$.
- Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt: $(x, y) \notin R$.
- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$.