

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*alternierende Reihe*)

4/1/24

$\sum a_i$ heißt *alternierend*
 $\stackrel{\text{Df}}{=} a_i \neq 0$ und $a_i < 0$ gdw $a_{i+1} > 0$ für jedes i
 (oder aber $a_i \cdot a_{i+1} < 0$ für jedes i).

Beispiele.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent. (**Harmonische Reihe**)

4/1/30/3

Diese Reihe dient gleichzeitig als Beispiel dafür, daß eine konvergente Reihe nicht absolut konvergent sein muß. (vgl. Beispiel 1.)

Es sei $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Wir betrachten jetzt die 2^n -te Partialsumme

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

und bilden

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}} - S_{2^n} &= \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^n + 2^n} \\ &\quad (\text{jeder dieser } 2^n \text{ Summanden ist größer oder gleich } \frac{1}{2^{n+1}}) \\ &\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{für beliebiges } n. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= S_{2^0} - S_{2^0} + S_{2^1} - S_{2^1} + \dots + S_{2^{n-1}} - S_{2^{n-1}} + S_{2^n} \\ &= \underbrace{S_{2^0}}_{=1} + \underbrace{S_{2^1} - S_{2^0}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{S_{2^2} - S_{2^1}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{S_{2^n} - S_{2^{n-1}}}_{\geq \frac{1}{2}} \\ &\geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Teilfolge (S_{2^i}) von (S_n) ist also unbeschränkt, und somit ist $(S_n) = \sum \frac{1}{n}$ nicht konvergent.

Da (S_n) monoton wächst, ist $\sum \frac{1}{n}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

4.4 Potenzreihen

Definition. (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *Potenzreihe* in $x-a$ mit den *Koeffizienten* a_n .

Definition. (*Konvergenzradius*)

4/4/5

Es sei ϱ eine nicht-negative reelle Zahl oder $\varrho = \infty$.

ϱ heißt *Konvergenzradius* von $\sum a_n(x-a)^n$

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes x gilt: Wenn $|x-a| < \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent, und wenn $|x-a| > \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ divergent.

(Hierbei soll immer gelten: $\{x : |x-a| < \infty\} = \mathbb{R}$ bzw. $= \mathbb{C}$ und $\{x : |x-a| > \infty\} = \emptyset$.)

Satz 4.21 Es sei $\sum a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius ϱ ,

4/4/13

und es sei $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gilt:

(1) Wenn $0 < l < \infty$, so $\varrho = \frac{1}{l}$.

(2) Wenn $l = 0$, so $\varrho = \infty$.

(3) Wenn $l = \infty$, so $\varrho = 0$.

Bemerkung. Da einer der drei Fälle immer auftritt, kann man auf diese Weise den Konvergenzradius bestimmen. Zur Übung untersuche man noch einmal die letzten Beispiele 1. – 4. Existieren $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ bzw. $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ oder haben sie den uneigentlichen Grenzwert ∞ , dann ist $l = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ bzw. $l = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ (in Satz 4.21). Dies kann bei der Bestimmung des Konvergenzradius genutzt werden.

4/4/15

Übungsaufgaben

26. Bestimmen Sie den Konvergenzradius für die folgenden Potenzreihen:

4/6/26

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n; \quad x \in \mathbb{R},$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^n} x^n; \quad x \in \mathbb{R},$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n; \quad x \in \mathbb{R}.$

Geben Sie bei (c) das genaue Konvergenzgebiet der Reihe an.