

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.9 Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

**Satz 9.24** (*Integrierbarkeit der Grenzfunktion*)

9/9/1

Sei  $a < b$ ,  $I = [a, b]$  und  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die in dem Intervall  $I$  definiert sind. Dann gilt:

- (1) Konvergiert  $(f_n)$  in  $I$  gleichmäßig gegen die Funktion  $f$  und sind alle  $f_n$  in  $I$  integrierbar, dann ist  $f$  in  $I$  integrierbar, und es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

(Vertauschbarkeit des Limes mit dem Integral)

- (2) Konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  in  $I$  gleichmäßig gegen die Funktion  $f$  und sind alle  $f_n$  in  $I$  integrierbar, dann ist  $f$  in  $I$  integrierbar, und es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

(Vertauschbarkeit des Integrals mit der unendlichen Summe)

**Korollar.**

9/9/3

- (1) Eine in einem Intervall  $I = [a, b]$  gleichmäßig konvergente Funktionenreihe kann gliedweise integriert werden.
- (2) Potenzreihen können in jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Konvergenzgebietes gliedweise integriert werden.

#### Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 9

- Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei gleichmäßig konvergenten Funktionenfolgen und -reihen (Satz 9.24 + Korollar).

9/11/18