

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung*)

8/1/1

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

f ist in \bar{c} differenzierbar (oder total differenzierbar)

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert, und es existiert eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $o(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0}, \text{ so daß für jedes } \bar{x} \in U(\bar{c}) \text{ gilt: } f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x}).$$

Die Matrix A heißt dann 1. Ableitung von f an der Stelle \bar{c} .

Bez.: $A := f'(\bar{c})$.

Definition. (*Richtungsableitung*)

8/1/7

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert.

Weiterhin sei $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ und $|\bar{r}| = 1$.

f ist an der Stelle \bar{c} in Richtung \bar{r} differenzierbar

$\overline{\text{Df}}$ Die Funktion $\varphi(h) := f(\bar{c} + h \cdot \bar{r})$ ist (als Funktion der einen Veränderlichen h) an der Stelle 0 differenzierbar;

d.h., es existiert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{c} + h \cdot \bar{r}) - f(\bar{c})}{h}$.

Der Limes heißt dann Richtungsableitung von f an der Stelle \bar{c} in Richtung \bar{r} .

Bez.: $\frac{\partial f}{\partial \bar{r}}(\bar{c}) = f_{\bar{r}}(\bar{c})$.

Satz 8.5 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/25

Ist f in \bar{c} differenzierbar, dann ist f an der Stelle \bar{c} in jede Richtung \bar{r} (mit $|\bar{r}| = 1$)

differenzierbar, und es ist $f_{\bar{r}}(\bar{c}) = f'(\bar{c}) \cdot \bar{r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot r_i$, wobei $\bar{r} = (r_1, \dots, r_n)$.