

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

**I.  $\mathbb{R}$  ist ein Körper** (d.h., in  $\mathbb{R}$  gelten folgende 10 Eigenschaften:)

2/1/1

- (1)  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ,
- (2)  $x + y = y + x$ ,
- (3) Es existiert ein Element  $0$  in  $\mathbb{R}$ , so daß für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $x + 0 = x$ .

**Bemerkung.** Aus (2) und (3) folgt sofort, daß es genau ein solches Element  $0$  in  $\mathbb{R}$  gibt. Denn sind  $0_1, 0_2$  Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

- (4) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  existiert ein  $y \in \mathbb{R}$ , so daß  $x + y = 0$ .

**Bemerkung.** Aus (1) – (4) folgt, daß es für jedes  $x \in \mathbb{R}$  genau ein  $y \in \mathbb{R}$  gibt mit  $x + y = 0$ . Wir zeigen, daß  $y$  durch  $x$  tatsächlich eindeutig bestimmt ist.

Dazu sei  $x$  gegeben.

Angenommen, es gibt Elemente  $y, z$ , so daß  $x + y = 0$  und  $x + z = 0$ . Dann gilt:

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = (x + y) + z = 0 + z = z + 0 = z.$$

Dieses durch  $x$  eindeutig bestimmte  $y$  wird mit  $y := -x$  bezeichnet.

Die Eigenschaften (1) – (4) sind die Axiome für eine (*additive*) *abelsche Gruppe*.

- (5)  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ,
- (6)  $x \cdot y = y \cdot x$ ,
- (7) Es existiert ein Element  $1$  in  $\mathbb{R}$ , so daß für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $x \cdot 1 = x$ .

**Bemerkung.** Analog wie bei (3) gibt es genau ein solches Element  $1$ . Denn wären  $1_1, 1_2$  Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2.$$

- (8) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq 0$  existiert ein  $y \in \mathbb{R}$  mit  $x \cdot y = 1$ .

**Bemerkung.** Analog wie zu (4) zeigt man, daß  $y$  durch  $x$  eindeutig bestimmt ist; der Beweis bleibt als Übungsaufgabe.

Dieses durch  $x$  eindeutig bestimmte  $y$  wird mit  $y := x^{-1} = \frac{1}{x}$  bezeichnet.

- (9)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ .

**Bemerkung.** Aus den obigen Axiomen erhält man:  $x \cdot 0 = 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

Es ist  $x = x \cdot 1 = x \cdot (1 + 0) = \underbrace{x \cdot 1}_{=x} + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$ . Nach den Axiomen (2) und (3) gibt es genau ein Element  $0$ , so daß  $x = x + 0$ . Da auch  $x = x + x \cdot 0$  ist, muß dann  $x \cdot 0$  dieses Element  $0$  sein.

- (10)  $0 \neq 1$ .

## Kapitel 3

## Folgen von reellen Zahlen

**Definition.** (*Folge*)

3/0/1

$F$  ist eine *Folge* (von reellen Zahlen)

$\stackrel{\text{Def}}{=} F$  ist eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{R}$ ,

d.h., jeder natürlichen Zahl  $n$  wird eine reelle Zahl  $a_n$  zugeordnet, so daß  $F(n) = a_n$ .

**Bez.:**  $F = (a_n)_{n=0,1,2,\dots}$  oder einfach  $F = (a_n)$ .

## Kapitel 4

### Unendliche Reihen; Potenzreihen

**Definition.** (*Reihe*)

4/0/1

Es sei  $(a_n)_{n=0,1,2,\dots}$  eine Folge von reellen Zahlen.

Die Folge  $(S_n)_{n=0,1,2,\dots}$  mit  $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$  heißt *Folge der Partialsummen* von  $(a_n)$  oder *unendliche Reihe* (kurz *Reihe*).

**Bez.:**  $(S_n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum a_i$

## 4.3 Komplexe Zahlen

**Satz 4.16** Mit den definierten Operationen (Addition und Multiplikation von Paaren) bildet  $\mathbb{R}^2$  einen Körper  $\mathbb{C}$  (den Körper der komplexen Zahlen). 4/3/3

**Bemerkung.** Da die komplexen Zahlen einen Körper bilden, kann man mit ihnen entsprechend der Axiome I(1 – 10) rechnen (vgl. Kapitel 2, 2/1/1). Insbesondere lassen sich in  $\mathbb{C}$  analog wie in  $\mathbb{R}$  Folgen und Reihen bilden. Alle Definitionen und Sätze für Folgen und Reihen (mit reellen Zahlen), bei denen die Ordnung der Glieder **keine** Rolle spielt, gelten entsprechend auch für die komplexen Zahlen. Insbesondere hat man:

4/3/10