

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*metrischer Raum*)

6/1/10

Es sei \mathbb{M} eine nicht-leere Menge und $\varrho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (d.h., für $a, b \in \mathbb{M}$ ist $\varrho(a, b) \in \mathbb{R}$), so daß für alle $a, b, c \in \mathbb{M}$ gilt:

- (1) $\varrho(a, b) \geq 0$, und $\varrho(a, b) = 0 \iff a = b$.
- (2) $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$. (Symmetrie)
- (3) $\varrho(a, b) \leq \varrho(a, c) + \varrho(c, b)$. (Dreiecksungleichung)

Dann ist ϱ eine *Metrik* oder *Abstandsfunktion* in \mathbb{M} , und das Paar (\mathbb{M}, ϱ) heißt *metrischer Raum*.

Bemerkung. Wir werden den metrischen Raum (\mathbb{M}, ϱ) wie üblich auch einfach mit \mathbb{M} bezeichnen.

6/1/11

Offenbar hat der in $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ definierte Abstand die Eigenschaften (1) – (3). Folglich sind $(\mathbb{R}, |\cdots|)$, $(\mathbb{C}, |\cdots|)$, $(\mathbb{R}^n, |\cdots|)$ oder kurz $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ metrische Räume.

Im folgenden sei (\mathbb{M}, ϱ) bzw. \mathbb{M} stets ein metrischer Raum.