

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

Übungsaufgaben

1. Man beweise: Für alle reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen n gilt: 4/6/1

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}.$$

2. Man berechne $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$ und $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i}$. 4/6/2

3. Zeigen Sie: $2 \cdot \sum_{i=0}^n \binom{2n}{2i} = 2^{2n}$. 4/6/3

4. Man berechne $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$. 4/6/4

[Hinweis: $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$; (wichtige Zerlegung; bitte einprägen !)]

5. Ermitteln Sie die n -te Partialsumme und den Grenzwert der Reihe 4/6/5

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}.$$

[Hinweis: Man ermittle zunächst Zahlen a, b, c , so daß gilt: $\frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{a}{i} + \frac{b}{i+1} + \frac{c}{i+2}$.]

6. Es sei (a_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. 4/6/6

Beweisen Sie, daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^{-n}$ konvergiert.

7. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen: 4/6/7

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}, & \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \text{mit } a > 1, \\ \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+1)3^n}, & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} n^k \cdot a^n \quad \text{mit } k \in \mathbb{N} \text{ und } 0 < a < 1. \end{array}$$

8. Zeigen Sie, daß 4/6/8

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}, \\ \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}; \quad \text{Hinweis: } S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}. \\ \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3; \quad \text{Hinweis: } S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}. \end{array}$$

9. Es sei $a_n > 0$ für jedes $n \geq 0$, und es sei (a_n) konvergent gegen a oder bestimmt divergent gegen ∞ . 4/6/9

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n$ für $x \in \mathbb{R} - \{a\}$.

10. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz: 4/6/10

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n-1}, & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \\ \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(8n+9)^2}, & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} \quad \text{für } s \in \mathbb{Q}. \\ \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, & \end{array}$$

11. Für welche reellen Zahlen x sind die folgenden Reihen konvergent: 4/6/11

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^n)}; \quad x \neq -1, \\ \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^{2n+1}; \quad x \neq 0, \\ \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}. \end{array}$$

12. Unter Benutzung von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ ist nachzuweisen, daß für folgende 4/6/12

Reihen, die aus der oben angegebenen Reihe durch Umordnung ihrer Glieder entstehen, gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2. \\ \text{(b)} \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{1}{2} \ln 2. \end{array}$$

13. Eine Schnecke wird auf ein 1 km langes „Gummiband“ gesetzt; sie soll das Band von Anfang bis Ende „durchlaufen“. Sie legt pro Sekunde 1 cm zurück. Nach jeder Sekunde wird jedoch das Gummiband (in seiner gesamten Länge) um 1 km ausgedehnt (die Ausdehnung soll gleichmäßig über das ganze Band erfolgen). Frage: Wird die Schnecke jemals das Ende des Gummibandes erreichen (falls sie genügend viel Zeit zur Verfügung hat) ? 4/6/13

14. Berechnen Sie für die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 - i$: 4/6/14

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad z_1 \cdot z_2, & \text{(b)} \quad \frac{z_1}{z_2}, & \text{(c)} \quad |z_1|, \\ \text{(d)} \quad z_2^3, & \text{(e)} \quad \sqrt{z_2}, & \text{(f)} \quad \sqrt{z_1}. \end{array}$$

15. (a) Es sei $R_n := \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$ und $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q < 1$ für $i > n$. 4/6/15

Beweisen Sie, daß $|R_n| < \frac{|a_{n+1}|}{1-q}$ ist.

- (b) Unter Benutzung von $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ ($x \in \mathbb{R}$) berechne man $e^{0.1}$ auf 4 Stellen genau, d.h.,

$$|R_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{0.1^i}{i!} \right| < \frac{1}{10^4}$$

16. Es sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie: 4/6/16

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(|a| + |b|) \leq |z| \leq |a| + |b|.$$

17. Wo liegen die Zahlen z in der Gaußschen Zahlenebene mit: 4/6/17

- (a) $|z + 3| \leq 2$, (b) $\operatorname{Re}(z) \geq 1$,
 (c) $\left| \frac{z-1}{z-2} \right| = 1$, (d) $\operatorname{Re}(z^2) = a$, (a reell).

18. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen: 4/6/18

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$, (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$.

19. Es sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ die Cauchysche Produktreihe von $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a^n$ mit $|a| < 1$. 4/6/19

(a) Man zeige: $c_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot a^n$.

(b) Welchen Grenzwert hat P ?

20. Man beweise für alle $x, y \in \mathbb{R}$: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$. 4/6/20

21. Zerlegen Sie $\exp(ix) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ in Real- und Imaginärteil ($i^2 = -1$). 4/6/21

22. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium: 4/6/22

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+3}$,
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n+3}$.

23. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium: 4/6/23

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2},$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+1)3^n},$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$

24. (a) Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$ 4/6/24

(b) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}.$

25. Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz: 4/6/25

(a) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}},$

(b) $a_n = (-1)^n \frac{1}{a n + b}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$

(c) $a_n = \left(a + \frac{1}{n} \right)^n, \quad a \in \mathbb{R}.$

Formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium.

26. Bestimmen Sie den Konvergenzradius für die folgenden Potenzreihen: 4/6/26

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n; \quad x \in \mathbb{R},$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^n} x^n; \quad x \in \mathbb{R},$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n; \quad x \in \mathbb{R}.$

Geben Sie bei (c) das genaue Konvergenzgebiet der Reihe an.