

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.3 Komplexe Zahlen

$$(a, b) + (c, d) \stackrel{\text{Df}}{=} (a + c, b + d) \quad (\text{Addition von Elementen aus } \mathbb{R}^2),$$

4/3/1

$$c \cdot (a, b) \stackrel{\text{Df}}{=} (ca, cb) \quad (\text{Multiplikation mit reellen Zahlen}).$$

Zur geometrischen Veranschaulichung der komplexen Zahlen betrachten wir in \mathbb{R}^2 die kanonische Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ und erhalten so ein rechtwinkliges Koordinatensystem für \mathbb{R}^2 , mit dessen Hilfe sich die Elemente aus \mathbb{R}^2 als Punkte in der Ebene darstellen lassen (*Gaußsche Zahlenebene*).

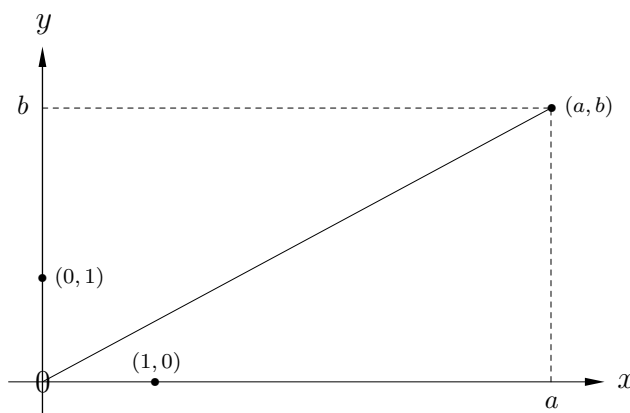


Abb. 4.1 Gaußsche Zahlenebene zur Darstellung der komplexen Zahlen

Jedes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ läßt sich eindeutig als Linearkombination der Basis darstellen. Die folgenden Teilmengen $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ und $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ bilden wichtige eindimensionale Teilräume, die mit den entsprechenden Koordinatenachsen identifiziert werden können.

Wir führen jetzt eine Multiplikation von Paaren in \mathbb{R}^2 ein.

4/3/2

Es sei $(a, b) \cdot (c, d) \stackrel{\text{Df}}{=} (ac - bd, ad + bc)$.

Damit erhält man das folgende Resultat.

Bemerkung. Man kann mit komplexen Zahlen im Prinzip rechnen wie mit reellen Zahlen, allerdings ist in \mathbb{C} keine Ordnung definiert.

4/3/5

Wir haben uns schon überlegt, daß $\{(1, 0), (0, 1)\}$ eine Basis für den Vektorraum \mathbb{R}^2 bildet. Der Teilraum $\{x \cdot (1, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ von \mathbb{R}^2 ist offenbar isomorph mit \mathbb{R} (als 1-dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R}). Daher identifizieren wir in Zukunft $(1, 0)$ mit 1. Für $(0, 1)$ schreibt man auch i (nicht zu verwechseln mit natürlichen Zahlen i), so daß durch $\{1, i\}$ eine Basis für \mathbb{R}^2 gegeben ist.

Mit dieser Vereinbarung gilt

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i.$$

Für $a \cdot 1$ bzw. für $b \cdot i$ schreiben wir kurz a bzw. ib . Damit erhält man eine geeignete Darstellung für komplexe Zahlen:

$$(a, b) = a + ib, \quad (0, 0) = 0 + i0 := 0.$$

Bez.: In $z = x + iy$ heißt x *Realteil* ($:= \operatorname{Re}(z)$) und y *Imaginärteil* ($:= \operatorname{Im}(z)$) von z .

Bemerkung. Aus der Definition der Multiplikation für komplexe Zahlen ergibt sich

4/3/6

$$i \cdot i = i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = (-1) \cdot (1, 0) = -1.$$

und weiterhin

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = ac - bd + i(ad + bc).$$

Berechnet man das Produkt (formal) wie in einem Körper, so entsteht dasselbe Ergebnis:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = a \cdot c + a \cdot id + ib \cdot c + \underbrace{ib \cdot id}_{i^2 \cdot db} = ac - bd + i \cdot (ad + bc).$$