

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.15 Sei $a < b$, und seien f, g in I integrierbar. Dann gilt:

9/5/0

(1) Wenn $f(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, so ist $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(2) Wenn $f(x) \leq g(x)$ für jedes $x \in I$, so ist $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Satz 9.16 (Erweiterter 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

9/5/4

Sei $a < b$, seien f, g in $I = [a, b]$ integrierbar, und g wechsele in I nicht das Vorzeichen (d.h., $g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ oder $g(x) \leq 0$ für alle $x \in I$).

Dann gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\inf_{x \in I} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in I} f(x)$, so daß

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \mu \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Beweis. Sei $g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ (den verbleibenden Fall beweist man analog).

9/5/5

Dann gilt für $\inf_{x \in I} f(x) := \mu_1$ und für $\sup_{x \in I} f(x) := \mu_2$ offenbar

$$\mu_1 \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq \mu_2 \cdot g(x)$$

und somit nach Satz 9.15

$$\mu_1 \cdot \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq \mu_2 \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Für $A := \int_a^b g(x) dx$ und $B := \int_a^b f(x)g(x) dx$ ist $\mu_1 A \leq B \leq \mu_2 A$ und somit $\mu_1 \leq \frac{B}{A} := \mu \leq \mu_2$, falls $A \neq 0$; für $A = 0$ leistet $\mu = 0$ das Verlangte. \square