

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (*Schranke*)

2/3/1

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

- (1) $a \in \mathbb{R}$ ist eine *obere Schranke* von M
 $\overline{\text{Df}} \quad x \leq a \text{ für jedes } x \in M.$
- (2) $a \in \mathbb{R}$ ist eine *untere Schranke* von M
 $\overline{\text{Df}} \quad a \leq x \text{ für jedes } x \in M.$
- (3) M ist *nach oben* (bzw. *unten*) *beschränkt*
 $\overline{\text{Df}} \quad M$ besitzt eine obere (bzw. untere) Schranke.
- (4) M ist *beschränkt*
 $\overline{\text{Df}} \quad M$ ist nach oben und nach unten beschränkt.

Definition. (*Grenze*)

2/3/2

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

- (1) Sei M nach oben beschränkt. a ist *obere Grenze* von M
 $\overline{\text{Df}} \quad a$ ist die kleinste obere Schranke von M .
Bez.: $a = \sup M$ (*Supremum von M*).
- (2) Sei M nach unten beschränkt. a ist *untere Grenze* von M
 $\overline{\text{Df}} \quad a$ ist die größte untere Schranke von M .
Bez.: $a = \inf M$ (*Infimum von M*).

Satz 2.8

2/3/4

- (1) Jede nicht leere und nach oben beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere Grenze.
- (2) Jede nicht leere und nach unten beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine untere Grenze.
- (3) Jede nicht leere und beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere und eine untere Grenze.

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (Konvergenz von Reihen)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=}$ (S_n) konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

Definition. (Divergenz von Reihen)

4/1/2

$\sum a_i$ ist divergent $\stackrel{\text{Df}}{=}$ $\sum a_i$ ist nicht konvergent.

Definition. (absolute Konvergenz)

4/1/15

$\sum a_i$ ist absolut konvergent $\stackrel{\text{Df}}{=}$ $\sum |a_i|$ ist konvergent.

4.4 Potenzreihen

Definition. (Potenzreihe)

4/4/1

Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ Potenzreihe in $x-a$ mit den Koeffizienten a_n .

Definition. (Konvergenzradius)

4/4/5

Es sei ϱ eine nicht-negative reelle Zahl oder $\varrho = \infty$.

ϱ heißt Konvergenzradius von $\sum a_n(x-a)^n$

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ Für jedes x gilt: Wenn $|x-a| < \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent, und wenn $|x-a| > \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ divergent.

(Hierbei soll immer gelten: $\{x : |x-a| < \infty\} = \mathbb{R}$ bzw. $= \mathbb{C}$ und $\{x : |x-a| > \infty\} = \emptyset$.)

Satz 4.19 Es seien $a_n, a \in \mathbb{C}$.

4/4/7

- (1) Ist $\sum a_n(x-a)^n$ an einer Stelle $x = x_0$ konvergent, dann ist $\sum a_n(x-a)^n$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-a| < |x_0-a|$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\sum a_n(x-a)^n$ an einer Stelle $x = x_1$ divergent, dann ist $\sum a_n(x-a)^n$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-a| > |x_1-a|$ divergent.

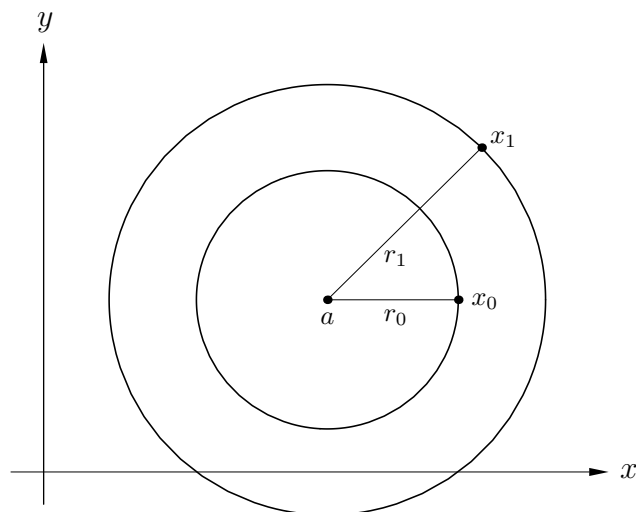


Abb. 4.2 In dem Kreis $\{x : |x - a| < r_0\}$ ist $\sum a_n(x - a)^n$ absolut konvergent, und für alle x mit der Eigenschaft $|x - a| > r_1$ ist $\sum a_n(x - a)^n$ divergent.

Satz 4.20 Jede Potenzreihe besitzt einen Konvergenzradius ϱ , der auch 0 oder ∞ sein kann. 4/4/10

Beweis. Sei $\sum a_n(x - a)^n$ eine beliebige Potenzreihe.

4/4/11

1. Fall: Die Reihe konvergiert nur für $x = a$. Dann ist $\varrho = 0$.
2. Fall: Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert die Reihe absolut für alle x (nach Satz 4.19). Folglich ist $\varrho = \infty$.
3. Fall: $\sum a_n(x - a)^n$ konvergiert für ein $x_0 \neq a$ und divergiert für ein x_1 (vgl. Abb. 4.2).

Es sei

$M = \{r \in \mathbb{R} : \text{es gibt ein } x \in \mathbb{C}, \text{ so daß } |x - a| = r \text{ und } \sum a_n(x - a)^n \text{ konvergiert}\}.$

Dann ist $M \neq \emptyset$, denn $0 \in M$.

Es sei $r_1 = |x_1 - a|$. Nach Voraussetzung ist $\sum a_n(x_1 - a)^n$ divergent. Folglich gilt (nach Satz 4.19(2)): Wenn $r' > r_1$, so ist $r' \notin M$. Dann ist M nach oben beschränkt (z.B. durch r_1), besitzt also ein Supremum; es sei $\varrho := \sup M$.

Behauptung: ϱ ist der Konvergenzradius von $\sum a_n(x - a)^n$.

z.z.: 1. Wenn $|x - a| < \varrho$, so ist $\sum a_n(x - a)^n$ absolut konvergent.

2. Wenn $|x - a| > \varrho$, so ist $\sum a_n(x - a)^n$ divergent.

Zu 1. Sei $|x - a| < \varrho$.

Dann existiert (nach Definition des Supremums) ein $r' \in \mathbb{R}$, so daß $|x - a| < r' \leq \varrho$ und $r' \in M$. Nach Definition von M existiert ein $x' \in \mathbb{C}$, so daß $|x' - a| = r'$ und $\sum a_n(x' - a)^n$ konvergiert.

Wegen $|x - a| < r' = |x' - a|$ ist dann (nach Satz 4.19(1)) $\sum a_n(x - a)^n$ absolut konvergent.

Zu 2. Sei $|x - a| > \varrho$. Wäre $\sum a_n(x - a)^n$ konvergent, so wäre $r = |x - a| \in M$ und $r > \varrho$, folglich wäre ϱ nicht $\sup M$. $\nexists!$ \square