

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Satz 4.8 (Majorantenkriterium)

4/1/32

Es seien $\sum a_i$, $\sum b_i$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei $\sum b_i$ eine Majorante von $\sum a_i$. Dann gilt:

- (1) Ist $\sum b_i$ konvergent, so ist auch $\sum a_i$ konvergent.
- (2) Ist $\sum a_i$ divergent, so ist auch $\sum b_i$ divergent.

4. Wir betrachten $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

4/1/44

Die Konvergenz dieser Reihe kann man weder mit dem Wurzel- noch mit dem Quotientenkriterium nachweisen (bitte ausprobieren!). Für eine geeignete konvergente Majorante könnte man das Majorantenkriterium heranziehen.

Es ist $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent. Denn

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \implies$$

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Folglich ist $S_k \rightarrow 1$, und somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ eine konvergente Majorante von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Aus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ erhält man die Behauptung.

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Übungsaufgaben

6. Es sei \mathcal{F} die Menge aller Folgen von reellen Zahlen. Für zwei beliebige Elemente $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ von \mathcal{F} sei $\rho(x, y)$ wie folgt definiert:

6/6/6

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Beweisen Sie, daß ρ eine Abbildung von $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ in \mathbb{R} mit den folgenden Eigenschaften ist:

- (a) $\rho(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in \mathcal{F}$,
- (b) $\rho(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- (c) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ für alle $x, y \in \mathcal{F}$.