

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Beispiel. (Definition der *Eulerschen Zahl* e)

3/1/35

Sei $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Behauptung: (a_n) ist streng monoton wachsend und beschränkt. (Dann ist (a_n) nach Satz 3.8 konvergent.)

z.z.: 1. $a_n < a_{n+1}$ für jedes n und

2. (a_n) ist beschränkt.

Zu 1. g.z.z.: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ (denn alle a_n sind positiv).

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n}_{\geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}} \\ &\geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \quad (\text{nach der Bernoullischen Ungleichung}) \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1, \quad \text{denn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1 &\iff (n+2)(n^2 + n + 1) > (n+1)(n^2 + 2n + 1) \\ &\iff n^3 + 3n^2 + 3n + 2 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

(und die letzte Ungleichung gilt offensichtlich).

Also $a_n < a_{n+1}$ für jedes n , und damit ist (a_n) streng monoton wachsend.

Zu 2. (a_n) ist beschränkt.

Offenbar ist $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \leq a_n$ für jedes n .

Weiterhin ist

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} := b_n.$$

Es genügt zu zeigen, daß die Folge (b_n) streng monoton fällt.

g.z.z.: $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$ (denn alle b_n sind positiv).

Der Beweis hierzu verläuft ähnlich wie für (a_n) , er wird als Übungsaufgabe gestellt.

Damit haben wir

$$b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4 \geq b_n \text{ für jedes } n.$$

Also

$$2 \leq a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \leq 4.$$

Dann ist (a_n) monoton wachsend und beschränkt, also konvergent und (b_n) monoton fallend und beschränkt, und somit auch konvergent.

Folglich existieren Zahlen e und e' , so daß

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{und} \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e'.$$

Behauptung: $e = e'$.

Annahme: $e \neq e'$.

Dann ist $\varepsilon := |e - e'| > 0$, und folglich gilt für hinreichend große n

$$\begin{aligned} |e - e'| &= |e - a_n + a_n - b_n + b_n - e'| \leq \underbrace{|e - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + |a_n - b_n| + \underbrace{|b_n - e'|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + |a_n - b_n|. \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\leq 4} \cdot \frac{1}{n} \leq 4 \cdot \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{falls } \frac{12}{\varepsilon} < n. \end{aligned}$$

Folglich ist $\varepsilon = |e - e'| < \varepsilon$ **!**

Also $e = e'$.

Definition. (*Cauchyfolge* oder *Fundamentalfolge*)

3/1/39

(a_n) ist eine *Cauchyfolge* (oder *Fundamentalfolge*)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n, m \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Satz 3.10 (Eigenschaften konvergenter Folgen)

3/1/43

Es seien (a_n) , (b_n) konvergente Folgen und c, d seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1) $(c \cdot a_n)$ ist konvergent und $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$.
- (2) $(a_n + b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
- (3) $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.
- (4) Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ konvergent und $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}$.
- (4') Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent und $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$.
- (5) $(|a_n|)$ ist konvergent und $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.
- (6) Ist $a_n \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq \lim b_n$.
Ist insbesondere $a_n \leq d$ bzw. $d \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq d$ bzw. $d \leq \lim b_n$.

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen**Definition.** (grenzwertgleich)

3/2/3

Es seien (a_n) , (b_n) Cauchyfolgen.

(a_n) und (b_n) sind grenzwertgleich

$\overline{\text{Df}}$ $(a_n - b_n)$ ist eine Nullfolge.

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sind z.B. grenzwertgleiche Cauchyfolgen im Bereich der rationalen Zahlen.

3/2/4

Bemerkung. „Grenzwertgleich“ ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Cauchyfolgen von rationalen Zahlen. (Beweis mit Satz 3.10 trivial).

Dabei ist der Begriff Äquivalenzrelation wie folgt definiert:

Es sei M eine Menge und \sim eine zweistellige Relation in M .

3/2/5

\sim heißt Äquivalenzrelation in M

$\overline{\text{Df}}$ Für alle $a, b, c \in M$ gilt:

- (1) $a \sim a$, (Reflexivität)
- (2) wenn $a \sim b$ und $b \sim c$, so $a \sim c$, (Transitivität)
- (3) wenn $a \sim b$, so $b \sim a$. (Symmetrie)