

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Satz 5.11 Die Exponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

5/3/19

- (1) $D(\exp) = \mathbb{R}$.
- (2) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).
- (3) $\exp(0) = 1$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
für $x < 0$ ist $0 < \exp(x) < 1$, und
für $x > 0$ ist $1 < \exp(x)$.
- (4) \exp ist streng monoton wachsend
(folglich ist \exp injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion).
- (5) $\exp(1) = e$ ($e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$).
- (6) Für rationale $x = \pm \frac{m}{n}$ ist $\exp(x) = e^{\pm \frac{m}{n}}$
(für irrationale x ist e^x bisher nicht definiert!).
- (7) \exp ist stetig.

Definition. (Exponentialfunktion zur Basis a)

5/3/32

Sei $a > 0$. $a^x \stackrel{\text{Def}}{=} e^{x \cdot \ln a}$ (Exponentialfunktion zur Basis a).

Satz 5.14 Es seien $a, b > 0$. Dann gilt:

5/3/34

- (1) $\ln a^x = x \cdot \ln a$,
- (2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
- (3) $(a^x)^y = a^{xy}$,
- (4) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$,
- (5) a^x ist stetig.
- (6) Für $0 < a < 1$ ist a^x streng monoton fallend, und
für $1 < a$ ist a^x streng monoton wachsend,
für $a = 1$ ist a^x konstant 1.
- (7) Für $0 < a < 1$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$, und
für $a < 1$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

Beweis. Den Beweis führt man leicht mit Hilfe der Eigenschaften von e^x .

□

5/3/35