

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

#### 3.1 Konvergenz von Folgen

##### Beispiele.

1. Sei  $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ .

3/1/4/1

Behauptung:  $(a_n)$  konvergiert gegen 0.

Beweis. z.z.: Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  gilt:  
 $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Satz 2.2(11) existiert ein  $n_0$ , so daß  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ . Für  $n \geq n_0$  ist dann  
 $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ . Also  $\lim \frac{1}{n} = 0$ .

2. Sei  $(a_n) = \left(\frac{2n^2}{n^2 + 2n + 3}\right)$ .

3/1/4/2

Behauptung:  $a_n \rightarrow 2$ .

Beweis. Sei  $\varepsilon > 0$ . Es ist

$$\begin{aligned} |a_n - 2| &= \left| \frac{2n^2}{n^2 + 2n + 3} - 2 \right| = \left| \frac{2n^2 - 2n^2 - 4n - 6}{n^2 + 2n + 3} \right| \\ &= \left| \frac{-4n - 6}{n^2 + 2n + 3} \right| = \frac{4n + 6}{n^2 + 2n + 3} \\ &= \underbrace{\frac{4n}{n^2 + 2n + 3}}_{\leq \frac{4n}{n^2}} + \underbrace{\frac{6}{n^2 + 2n + 3}}_{\leq \frac{6}{2n}} \\ &\leq \frac{4}{n} + \frac{3}{n} = \frac{7}{n}. \end{aligned}$$

Ist  $n_0 > \frac{7}{\varepsilon}$ , dann gilt für alle  $n \geq n_0$ :

$$|a_n - 2| \leq \frac{7}{n} \leq \frac{7}{n_0} < \varepsilon.$$

3. Sei  $(a_n) = ((-1)^n)$ .

3/1/4/3

Behauptung:  $(a_n)$  ist divergent (in  $\mathbb{R}$ ).

Annahme:  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ .

Nach Definition der Konvergenz erhält man: Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  gilt:  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

Dies gilt insbesondere für  $\varepsilon = 1$ .

Für  $a$  sind zwei Fälle möglich:  $a \geq 0$  oder  $a < 0$ .

Fall 1.  $a \geq 0$ .

Ist  $n$  ungerade, dann ist  $a_n = -1$ . Folglich ist

$$1 = \varepsilon > |a_n - a| = |-1 - a| = |1 + a| \geq 1, \quad \text{!}$$

Fall 2.  $a < 1$ .

Ist  $n$  gerade, dann ist  $a_n = 1$  und damit gilt

$$1 = \varepsilon > |a_n - a| = |1 + \underbrace{(-a)}_{>0}| > 1, \quad \text{!}$$

Folglich ist  $(a_n)$  nicht konvergent.