

## Kapitel 1

### Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Wir geben jetzt Regeln für die Verneinung zusammengesetzter Aussagen an. Durch schrittweise Anwendung dieser Regeln lassen sich beliebige mathematische Aussagen verneinen. 1/0/21

$$\begin{aligned}\neg(\neg A) &\equiv A, & (\neg(\neg A) \leftrightarrow A \text{ ist also immer wahr.}) \\ \neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B, \\ \neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B, \\ \neg(A \rightarrow B) &\equiv A \wedge \neg B, \\ \neg(A \leftrightarrow B) &\equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B), \\ \neg \forall x A(x) &\equiv \exists x \neg A(x), \\ \neg \exists x A(x) &\equiv \forall x \neg A(x).\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich sofort die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}A \rightarrow B &\equiv \neg A \vee B, \\ A \leftrightarrow B &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).\end{aligned}$$

Es werden jetzt einige wahre Aussagen betrachtet, die aufgrund ihrer logischen Struktur häufig als *Beweisprinzipien* auftreten. (In der Regel benutzt man diese Prinzipien schon rein intuitiv richtig.) 1/0/22

$$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B \quad (\textit{Modus ponens} \text{ oder } \textit{Abtrennungsregel})$$

Aus der Gültigkeit der Aussagen  $A$  und  $A \rightarrow B$ , schließt man auf die Gültigkeit der Aussage  $B$ .

Analog interpretiert man auch die folgenden Prinzipien:

$$\begin{aligned}(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) &\rightarrow (A \rightarrow C) \quad (\textit{Kettenschluß}) \\ A \rightarrow B &\leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A \quad (\textit{Kontraposition})\end{aligned}$$

Die Kontraposition besagt, daß die Aussagen  $A \rightarrow B$  und  $\neg B \rightarrow \neg A$  stets den gleichen Wahrheitswert besitzen. Dies darf allerdings nicht verwechselt werden mit der Umkehrung  $B \rightarrow A$  der Implikation  $A \rightarrow B$ . Die Aussagen  $A \rightarrow B$  und  $B \rightarrow A$  sind im allgemeinen nicht äquivalent.

$$(\neg A \rightarrow F) \rightarrow A \quad (\textit{indirekter Beweis}; F \text{ steht für eine beliebige falsche Aussage})$$

Praktisch geht man beim indirekten Beweis folgendermaßen vor:

Man nimmt an, daß die Aussage  $A$  falsch ist, also die Negation  $\neg A$  gilt. Dann leitet man aus dieser Annahme etwas Falsches her, d.h., man erzeugt einen *Widerspruch*. (Dies wird häufig einfach durch das Symbol  $\text{⌵!}$  ausgedrückt). Daraus schließt man, daß die Aussage

$\neg A$  nicht richtig sein kann; also gilt die Aussage  $A$ . (Hierbei wird ganz wesentlich das Prinzip der Zweiwertigkeit benutzt.)

Die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen ist die *vollständige Induktion*. Sie beruht auf dem

### Induktionsaxiom:

Es sei  $E$  eine Eigenschaft für natürliche Zahlen  $n$ . Dann gilt

$$E(0) \wedge \forall n (E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m E(m).$$

Um die Aussage  $\forall m E(m)$  zu beweisen, genügt es:

1.  $E(0)$  zu zeigen (*Anfangsschritt*) und
2.  $\forall n (E(n) \rightarrow E(n+1))$  nachzuweisen (*Induktionsschritt*).

Bei der Eigenschaft 2. betrachtet man ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  und zeigt:

Wenn  $E(n)$ , so  $E(n+1)$ .

$E(n)$  heißt *Induktionsvoraussetzung*,  $E(n+1)$  *Induktionsbehauptung*.

Eigentlich müßte beim Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Fall (a):  $E(n)$  ist falsch.

Dann ist die Implikation  $E(n) \rightarrow E(n+1)$  aber trivialerweise richtig. Daher läßt man diesen Fall im Induktionsbeweis in der Regel weg und betrachtet nur noch

Fall (b):  $E(n)$  ist richtig.

Unter dieser Voraussetzung ist dann die Gültigkeit von  $E(n+1)$  zu zeigen.

**Achtung:** Häufig findet man bei „Anfängern“ die folgende falsche Formulierung im Induktionsschritt:

„Für beliebiges  $n$  wird vorausgesetzt, daß  $E(n)$  schon gilt.“

Wer dies so formuliert, hat die Behauptung bereits vorausgesetzt.

### Modifikationen des Induktionsaxioms

1/0/24

- (1) Es sei  $k$  eine natürliche Zahl.

$$E(k) \wedge \forall n (k \leq n \wedge E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m (k \leq m \rightarrow E(m)).$$

- (2) Es seien  $k, l$  natürliche Zahlen mit  $k < l$ .

$$E(k) \wedge \forall n (k \leq n < l \wedge E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m (k \leq m \leq l \rightarrow E(m)).$$

- (1) liefert das Beweisprinzip von  $E(n)$  für alle  $n \geq k$  und (2) das von  $E(n)$  für alle  $n$  mit  $k \leq n \leq l$ .

## Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 1

- Beweisprinzipien (Modus ponens, Kettenschluß, Kontraposition, indirekter Beweis, vollständige Induktion);

1/2/4
-------