

## Kapitel 10

### Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 10.1 Doppelintegrale

**Definition.** (*einfacher Bereich*)

10/1/20

Es seien  $[a, b], [c, d]$  Intervalle in  $\mathbb{R}$ .

1.  $B$  ist ein *x-einfacher Bereich* (über  $[a, b]$ )  
 $\overline{\text{Df}}$  Es gibt Funktionen  $\varphi(x), \psi(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß gilt:
  - (a)  $\varphi, \psi$  sind stetig in  $[a, b]$ ,
  - (b)  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  für jedes  $x \in [a, b]$ ,
  - (c)  $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  (vgl. Abb. 10.4).
2.  $B_1$  ist ein *y-einfacher Bereich* (über  $[c, d]$ )  
 $\overline{\text{Df}}$  Es gibt Funktionen  $\varphi_1(y), \psi_1(y) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß gilt:
  - (a)  $\varphi_1, \psi_1$  sind stetig in  $[c, d]$ ,
  - (b)  $\varphi_1(y) \leq \psi_1(y)$  für jedes  $y \in [c, d]$ ,
  - (c)  $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$  (vgl. Abb. 10.5).
3.  $B$  ist ein *einfacher Bereich*  
 $\overline{\text{Df}}$   $B$  ist *x-einfach* oder *y-einfach*.

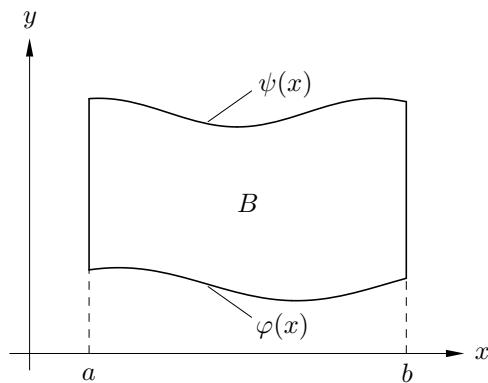


Abb. 10.4 Die Abbildung zeigt einen *x*-einfachen Bereich  $B$ .

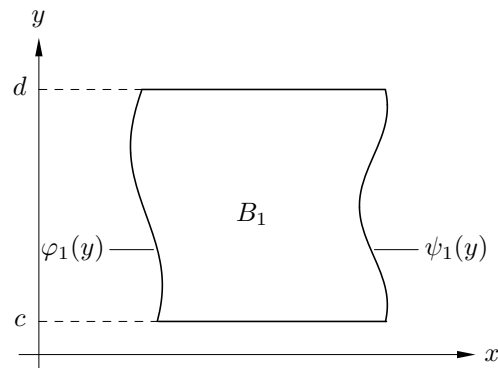


Abb. 10.5 Die Abbildung zeigt einen *y*-einfachen Bereich  $B_1$ .

**Definition.** (*Integral über einfachen Bereichen*)

10/1/24

Es sei  $B$  ein einfacher Bereich und  $D$  ein entsprechender Rechteckbereich, so daß  $B \subseteq D$ .  $f(x, y) : B \rightarrow \mathbb{R}$  sei in  $B$  stetig und  $f^*$  wie oben definiert.

$f$  ist in  $B$  integrierbar  $\overline{\text{Df}}$   $f^*$  ist in  $D$  integrierbar, und

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy \stackrel{\overline{\text{Df}}}{=} \iint_D f^*(x, y) \, dx dy.$$

$\iint_B f(x, y) \, dx dy$  heißt dann *Doppelintegral* (oder kurz *Integral*) über  $B$ .

## Integrale über „komplizierteren“ Bereichen

10/1/29
---------

**Definition.** (*Doppelintegral*)

Es seien  $B_1, \dots, B_k$   $x$ -einfache bzw.  $y$ -einfache Bereiche, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben, und es sei  $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$ . Weiterhin sei  $f(x, y)$  im Inneren von jedem  $B_i$  stetig.

Dann vereinbaren wir:

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^k \iint_{B_i} f(x, y) \, dx dy.$$

$\iint_B f(x, y) \, dx dy$  heißt *Doppelintegral* (oder kurz *Integral*) von  $f$  über  $B$ .