

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Definition. (*Funktion* oder *Abbildung*)

1/0/14

(1) f ist eine *Funktion* (oder *Abbildung*)

$\overline{\text{Df}}$ Es existieren Mengen M und N , so daß $f \subseteq M \times N$, und für jedes $a \in M$ gibt es höchstens ein $b \in N$, so daß $(a, b) \in f$.
(Eine Funktion ist also eine spezielle Relation.)

(2) f ist eine *Funktion aus M in N*

$\overline{\text{Df}}$ $f \subseteq M \times N$ und für jedes $a \in M$ gibt es höchstens ein $b \in N$, so daß $(a, b) \in f$.

Bez.: $f : M \rightarrow N$.

(3) f ist eine *Funktion von M in N*

$\overline{\text{Df}}$ $f \subseteq M \times N$ und für jedes $a \in M$ existiert genau ein $b \in N$, so daß $(a, b) \in f$. (Jedes $a \in M$ bestimmt eindeutig ein gewisses $b \in N$.)

Bez.: $f(a) = b$.

In diesem Falle heißt M *Definitionsbereich* (oder *domain*) von f und

$$f(M) := \{b \in N : \text{es existiert ein } a \in M, \text{ so daß } b = f(a)\}$$

Wertebereich oder *Bild* (oder *image*) von f .

Bez.: $M = D(f) = \text{dom}(f)$ und $f(M) = W(f) = \text{im}(f)$.

Für Abbildungen $f : M \rightarrow N$ gilt also im allgemeinen nur $D(f) \subseteq M$ und $W(f) \subseteq N$. N heißt auch *Zielbereich* (oder *range*) von f .

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.4 Potenzreihen

Definition. (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *Potenzreihe* in $x-a$ mit den *Koeffizienten* a_n .

Bemerkung. Die offene Kreisscheibe in \mathbb{C} mit dem Mittelpunkt a und dem Radius ϱ (bzw. das offene Intervall in \mathbb{R} mit dem Mittelpunkt a und der Länge 2ϱ) heißt *Konvergenzgebiet* oder *Konvergenzkreis* (bzw. *Konvergenzintervall*) und a heißt *Mittelpunkt der Potenzreihe* $\sum a_n(x-a)^n$.

4/4/12

Innerhalb dieser offenen Kreisscheibe (bzw. des offenen Intervalls) konvergiert die Potenzreihe absolut, außerhalb divergiert sie; auf dem Rande kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen (man betrachte das Beispiel $\sum \frac{x^n}{n}$ für $x = \pm 1$).

4.5 Rechnen mit Potenzreihen

Satz 4.25 (*Identitätssatz für Potenzreihen*)

4/5/6

Voraussetzungen:

- (1) Es seien $\sum a_n(x-a)^n$ und $\sum b_n(x-a)^n$ Potenzreihen mit den Konvergenzradien ϱ_1 bzw. ϱ_2 und $\varrho_1, \varrho_2 > 0$.
- (2) (x_ν) sei eine Folge mit $x_\nu \neq a$, $\lim x_\nu = a$ und $|x_\nu - a| < \varrho_1, \varrho_2$.
- (3) Für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_\nu - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_\nu - a)^n$.

Behauptung: Für jedes n ist $a_n = b_n$.

(D.h., stimmen zwei Potenzreihen in unendlich vielen Punkten x_ν überein und ist der Mittelpunkt a der Potenzreihen wenigstens ein Häufungspunkt dieser Menge, dann stimmen die Reihen schon koeffizientenweise überein, sie sind also identisch.)

Lemma. Es sei $\sum c_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$, und sei (x_ν) eine Folge mit $x_\nu \neq a$, $|x_\nu - a| < \varrho$ und $\lim x_\nu = a$.

4/5/7/2

Dann ist $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0$.

Bemerkung. Als Folgerung erhält man sofort: Stimmen zwei Potenzreihen in einem „kleinen Intervall“ überein, dann sind sie schon identisch.

4/5/8

Es sei hier ein Ausblick auf eine spätere wichtige Anwendung des Lemmas gegeben.

Mit Potenzreihen lassen sich auf einfache Weise Funktionen definieren:

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, wobei $f(x)$ dann im Konvergenzgebiet der Potenzreihe definiert ist.

Es gilt offenbar $f(a) = a_0$, und aus dem Lemma erhält man:

Wenn $x_\nu \rightarrow a$, so $f(x_\nu) \rightarrow f(a)$. Hieraus folgt, daß die Funktion wenigstens an der Stelle $x = a$ stetig ist (dieser Begriff ist natürlich noch zu definieren). Aus der Stetigkeit an einer Stelle folgt bei einigen wichtigen Funktionen schon die Stetigkeit im gesamten Definitionsbereich (z.B. für die Sinusfunktion und die Exponentialfunktion, mit deren Hilfe sich weitere elementare Funktionen definieren lassen).

In den späteren Kapiteln werden wir uns noch ausführlicher mit weiteren Eigenschaften von Funktionenfolgen und -reihen befassen, insbesondere werden wir Untersuchungen zur Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei gleichmäßiger Konvergenz vornehmen.

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Stetigkeit*)

5/2/1

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *stetig*
 $\stackrel{\text{Df}}{=} a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$
gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
(d.h., für jede ε -Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ -Umgebung von a , so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

5.3 Elementare Funktionen

Bez.: $f(x) := \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

5/3/18

$f(x) = \exp(x)$ heißt *Exponentialfunktion*.

Definition. (\cos , \sin)

5/3/45

$$\cos x \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$