

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### Übungsaufgaben

1. Es sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . 8/5/1  
 Man bilde (mit Hilfe der Kettenregel) die Ableitung von  $f \circ g$ , wobei:
  - (a)  $f(x, y) = \sin(xy)$ ,  $g(t) = (t, t^2)$ .
  - (b)  $f(x, y) = x \sin(xy)$ ,  $g(t) = (t^2, \ln(t^2 + 1))$ .
  
2. Bestimmen Sie die (totale) Ableitung der folgenden Funktionen: 8/5/2
  - (a)  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ ,                      (c)  $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ ,
  - (b)  $f(x, y) = \ln \tan \frac{x}{y}$ ,                      (d)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
  
3. (a) Berechnen Sie die Gradienten von 8/5/3  
 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$       und  
 $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ .  
 (b) Bestimmen Sie für  $f(x, y) = x^2 - y^2$  in den Punkten (1,1) und (-1,1) die Richtungsableitung in Richtung  $\bar{a} = (r_1, r_2)$  und in Richtung  $-\bar{a}$ , wobei  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ .
  
4. Man berechne die Gleichung der Tangentialebene für 8/5/4
  - (a) das Rotationsparaboloid  $z = x^2 + y^2$ ,
  - (b) die Halbkugel  $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ ,
  - (c) die Sattelfläche  $z = x \cdot y$ .
  
5. (a) Für  $f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$  beweise man, daß 8/5/5  
 $f_x + f_y + f_z = \frac{3}{x + y + z}$ .  
 (b) Für  $f(x, y, z) = \frac{4\pi a^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  beweise man, daß  $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ .
  
6. (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion  $f(x, y) = e^x \sin y$  im 8/5/6  
 Punkt  $(a, b)$  in beiden Richtungen der Geraden  $y - b = (a - x) \cdot \tan b$ .  
 (b) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion  $f(x, y) = x^2 - y^2$  in den Punkten (1, 1) und (-1, -1) in Richtung der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.
  
7. Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ . 8/5/7  
 (a) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene für  $f$  an der Stelle (1, 1) an.

(b) Es sei  $M = \{(x, y) : |x - 1| < \frac{1}{10}, |y - 1| < \frac{1}{10}\}$ .

Wie groß ist die Abweichung zwischen  $f$  und der Tangentialebene in  $M$  (möglichst genau angeben)?

8. Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  und  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . 8/5/8

Unter welchen Bedingungen für  $a, b, c$  besitzt  $f$  genau einen kritischen Punkt?

9. Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit 8/5/9

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bilden Sie (falls existent) alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von  $f$ .

Was läßt sich über die gemischten Ableitungen aussagen?

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Inhalt des Satzes von Schwarz.

10. Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f$  in  $M$  definiert. 8/5/10

Weiterhin besitze  $f$  in jedem Punkt aus  $M$  partielle Ableitungen nach allen Variablen  $x_1, \dots, x_n$ .

Zeigen Sie: Ist  $\bar{a} \in M$  und sind alle partiellen Ableitungen in einer Umgebung von  $\bar{a}$  beschränkt, dann ist  $f$  in  $\bar{a}$  stetig.

11. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale und globale Extrema: 8/5/11

(a)  $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2, \quad -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2,$

(b)  $f(x, y) = x \cdot y + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad 1 \leq x \leq 10, 1 \leq y \leq 10,$

(c)  $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x - y), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$