

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Satz 5.6 (Zwischenwertsatz oder Nullstellensatz von Bolzano)

5/2/21

Ist f in dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$ (d.h., $f(a) \cdot f(b) < 0$), dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so daß $f(c) = 0$.

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Satz 7.13 Es sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar. Dann gilt:

7/3/9

- (1) f ist in I monoton wachsend gdw $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$.
- (2) f ist in I streng monoton wachsend gdw $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, und es gibt kein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$ mit $a' < b'$, so daß $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a', b')$.

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.4 Implizite Funktionen

Satz 8.15 (Hauptsatz über implizite Funktionen mit zwei Veränderlichen)

8/4/3

Voraussetzung:

- (1) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in M .
- (2) Sei $\bar{c} = (a, b) \in M$ und $f(\bar{c}) = 0$.
- (3) f ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ stetig partiell nach y differenzierbar und $f_y(\bar{c}) \neq 0$.

Behauptung:

Es gibt eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in U_\delta(a)$ genau ein $y \in U_\varepsilon(b)$ existiert mit $f(x, y) = 0$ und $y = g(x)$ (insbesondere ist $b = g(a)$).

Beweis. Da $f_y(\bar{c}) \neq 0$ und f_y in $U(\bar{c})$ stetig ist, gibt es eine Umgebung $U'(\bar{c})$, so daß f_y dort stets positiv oder stets negativ ist. Sei o.B.d.A. $f_y(\bar{c}) > 0$ ($f_y(\bar{c}) < 0$ analog).

8/4/4

Wir wählen jetzt $d > 0$, jedoch so klein, daß $U_d(a) \times U_d(b) \subseteq U'(\bar{c})$.

Da $f_y(a, y) > 0$ für alle $y \in U_d(b)$, ist f_y in $U_d(b)$ streng monoton wachsend. Sei $0 < \varepsilon < d$ und $y_1 := b - \varepsilon$, $y_2 := b + \varepsilon$. Wegen $f(a, b) = 0$ ist $f(a, y_1) < 0 < f(a, y_2)$. Da $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)$ als Funktionen von x stetig sind, gibt es ein δ mit $0 < \delta < \varepsilon$, so daß für jedes $x \in U_\delta(a)$ gilt: $f(x, y_1) < 0 < f(x, y_2)$.

Für $x_0 \in U_\delta(a)$ ist also $f(x_0, y)$ in $[y_1, y_2]$ stetig und

$$f(x_0, y_1) < 0 < f(x_0, y_2).$$

Nach dem Zwischenwertsatz (für Funktionen einer Veränderlichen) gibt es ein $y_0 \in [y_1, y_2]$, so daß $f(x_0, y_0) = 0$.

Da f_y in $U'(\bar{c})$ stets positiv ist, erhält man insbesondere $f_y(x_0, y) > 0$. Folglich ist $f(x_0, y)$ streng monoton wachsend und somit y_0 das einzige Element in $U'_\varepsilon(b)$ mit $f(x_0, y_0) = 0$. Durch $g(x_0) := y_0$ für $x_0 \in U_\delta(a)$ ist eine Funktion g definiert.

Es bleibt noch zu zeigen, daß g in $U_\delta(a)$ stetig ist.

Sei $x_0 \in U_\delta(a)$, $\varepsilon > 0$ (wie oben) und $\delta' > 0$, jedoch so klein, daß $U_{\delta'}(x_0) \subseteq U_\delta(a)$ und $|x - x_0| < \delta'$. Nach den vorhergehenden Betrachtungen existiert für $x \in U_{\delta'}(a)$ genau ein $y \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$, so daß $f(x, y) = 0$, also $g(x) = y$.

Damit erhält man

$$|g(x) - g(x_0)| = |y - y_0| \leq \underbrace{|y - b|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|b - y_0|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon.$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von g in x_0 . \square