

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

**Satz 8.10** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung mit mehreren Veränderlichen) 8/3/1

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $M$  differenzierbare Funktion. Weiterhin seien  $\bar{a}, \bar{b} \in M$  und die Verbindungsstrecke  $s(\bar{a}, \bar{b})$  zwischen  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$  gehöre zu  $M$ . Dann gibt es ein  $\bar{c} \in s(\bar{a}, \bar{b})$  mit  $\bar{c} \neq \bar{a}, \bar{b}$ , so daß  $f(\bar{b}) - f(\bar{a}) = f'(\bar{c}) \cdot (\bar{b} - \bar{a})$ .

#### 8.4 Implizite Funktionen

**Beweis.** Da  $f_y(\bar{c}) \neq 0$  und  $f_y$  in  $U(\bar{c})$  stetig ist, gibt es eine Umgebung  $U'(\bar{c})$ , 8/4/4  
so daß  $f_y$  dort stets positiv oder stets negativ ist. Sei o.B.d.A.  $f_y(\bar{c}) > 0$  ( $f_y(\bar{c}) < 0$  analog).

Wir wählen jetzt  $d > 0$ , jedoch so klein, daß  $U_d(a) \times U_d(b) \subseteq U'(\bar{c})$ .

Da  $f_y(a, y) > 0$  für alle  $y \in U_d(b)$ , ist  $f_y$  in  $U_d(b)$  streng monoton wachsend. Sei  $0 < \varepsilon < d$  und  $y_1 := b - \varepsilon$ ,  $y_2 := b + \varepsilon$ . Wegen  $f(a, b) = 0$  ist  $f(a, y_1) < 0 < f(a, y_2)$ . Da  $f(x, y_1)$ ,  $f(x, y_2)$  als Funktionen von  $x$  stetig sind, gibt es ein  $\delta$  mit  $0 < \delta < \varepsilon$ , so daß für jedes  $x \in U_\delta(a)$  gilt:  $f(x, y_1) < 0 < f(x, y_2)$ .

Für  $x_0 \in U_\delta(a)$  ist also  $f(x_0, y)$  in  $[y_1, y_2]$  stetig und

$$f(x_0, y_1) < 0 < f(x_0, y_2).$$

Nach dem Zwischenwertsatz (für Funktionen einer Veränderlichen) gibt es ein  $y_0 \in [y_1, y_2]$ , so daß  $f(x_0, y_0) = 0$ .

Da  $f_y$  in  $U'(\bar{c})$  stets positiv ist, erhält man insbesondere  $f_y(x_0, y) > 0$ . Folglich ist  $f(x_0, y)$  streng monoton wachsend und somit  $y_0$  das einzige Element in  $U'_\varepsilon(b)$  mit  $f(x_0, y_0) = 0$ . Durch  $g(x_0) := y_0$  für  $x_0 \in U_\delta(a)$  ist eine Funktion  $g$  definiert.

Es bleibt noch zu zeigen, daß  $g$  in  $U_\delta(a)$  stetig ist.

Sei  $x_0 \in U_\delta(a)$ ,  $\varepsilon > 0$  (wie oben) und  $\delta' > 0$ , jedoch so klein, daß  $U_{\delta'}(x_0) \subseteq U_\delta(a)$  und  $|x - x_0| < \delta'$ . Nach den vorhergehenden Betrachtungen existiert für  $x \in U_{\delta'}(a)$  genau ein  $y \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ , so daß  $f(x, y) = 0$ , also  $g(x) = y$ .

Damit erhält man

$$|g(x) - g(x_0)| = |y - y_0| \leq \underbrace{|y - b|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|b - y_0|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon.$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von  $g$  in  $x_0$ . □

**Korollar.** Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 8.15 noch

8/4/5

(4)  $f$  ist in  $U(\bar{c})$  stetig partiell nach  $x$  differenzierbar,  
dann ist die durch  $f(x, y) = 0$  in  $U_\delta(a)$  implizit definierte Funktion  $g$  differenzierbar,  
und es gilt:  $g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$ .

**Beweis.** Wir wählen die Bezeichnungen wie im vorhergehenden Beweis.

8/4/6

Sei  $|x - x_0| < \delta'$ ,  $x \neq a$  und  $y = g(x)$ , dann ist  $(x, y) \in U_{\delta'}(x_0) \times U_\varepsilon(b) := D$ , und die Verbindungsstrecke zwischen  $(a, b)$  und  $(x, y)$  gehört ganz zu  $D$ . Nach dem Mittelwertsatz für Funktionen mit mehreren Veränderlichen gilt (er kann hier angewendet werden, da  $f(x, y)$  nach Voraussetzung differenzierbar ist):

$$\underbrace{f(x, y)}_{=0} - \underbrace{f(a, b)}_{=0} = 0 = (x - a) \cdot f_x(\bar{u}) + (y - b) \cdot f_y(\bar{u}),$$

wobei  $\bar{u} = \bar{a} + \vartheta(\bar{x} - \bar{c})$ ,  $y = g(x)$  und  $b = g(a)$ . Hieraus folgt

$$\frac{y - b}{x - a} = \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = -\frac{f_x(\bar{u})}{f_y(\bar{u})}.$$

Da  $g$  in  $U_\delta(a)$  stetig ist, gilt für  $x \rightarrow a$  auch  $y = g(x) \rightarrow g(a) = b$  und somit  $\bar{u} \rightarrow \bar{a}$ . Folglich existiert

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{=g'(a)} = -\frac{f_x(\bar{c})}{f_y(\bar{c})},$$

also

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}. \quad \square$$