

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

**Satz 2.2** Für alle reellen Zahlen  $a, b, c$  gilt:

2/2/3

- (0)  $0 < 1$ .
- (1) *nicht*  $(a < a)$ . (Irreflexivität)
- (2) Wenn  $a < b$  und  $b < c$ , so  $a < c$ . (Transitivität)
- (3) Für jedes  $a, b$  gilt:  $a < b$  oder  $a = b$  oder  $b < a$ . (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen:  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$ . (Trichotomie)
- (4) Wenn  $a < b$ , so  $a + c < b + c$ . (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $a \cdot c < b \cdot c$ ,  
Wenn  $a < b$  und  $c < 0$ , so  $a \cdot c > b \cdot c$ .
- (6) Wenn  $a \leq b$  und  $c \leq d$ , so  $a + c \leq b + d$ .  
Ist zusätzlich  $a < b$  oder  $c < d$ , so ist  $a + c < b + d$ .
- (7) Es gilt:  $a < b \iff -b < -a$ .
- (8) Wenn  $0 < a$  und  $0 < b$ , so  $0 < a \cdot b$ ,  
Wenn  $0 < a$  und  $b < 0$ , so  $a \cdot b < 0$ ,  
Wenn  $a < 0$  und  $b < 0$ , so  $0 < a \cdot b$ .
- (9) Wenn  $0 < a$ , so  $0 < \frac{1}{a}$ ,  
Wenn  $a < 0$ , so  $\frac{1}{a} < 0$ .
- (10) Wenn  $0 < a < b$ , so  $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ,  
Wenn  $a < 0 < b$ , so  $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$ ,  
Wenn  $a < b < 0$ , so  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ .
- (11) Wenn  $0 < a$ , dann gibt es natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ , so daß  $0 < a < m$  und  $0 < \frac{1}{n} < a$ .
- (12) Wenn  $a < b$ , so  $a < \frac{a+b}{2} < b$ .

**Satz 2.7** (Dreiecksungleichungen)

2/2/22

Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

- (1)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .
- (2)  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ .

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

#### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Definition.**

3/1/2

- (1)  $(a_n)$  konvergiert (oder ist konvergent) in  $\mathbb{R}$   
 $\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in \mathbb{R}$ , so daß  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert.
- (2)  $(a_n)$  divergiert (oder ist divergent) in  $\mathbb{R}$   
 $\overline{\text{Df}}$   $(a_n)$  ist nicht konvergent in  $\mathbb{R}$ .

**Satz 3.3** Jede konvergente Folge ist beschränkt.

3/1/14

**Satz 3.10** (Eigenschaften konvergenter Folgen)

3/1/43

Es seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente Folgen und  $c, d$  seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1)  $(c \cdot a_n)$  ist konvergent und  $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$ .
- (2)  $(a_n + b_n)$  ist konvergent und  $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ .
- (3)  $(a_n \cdot b_n)$  ist konvergent und  $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$ .
- (4) Sind alle  $b_n \neq 0$  und ist  $\lim b_n \neq 0$ , dann ist  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  konvergent und  

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}.$$
- (4') Sind alle  $b_n \neq 0$  und ist  $\lim b_n \neq 0$ , dann ist  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  konvergent  
und 
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$
- (5)  $(|a_n|)$  ist konvergent und  $\lim |a_n| = |\lim a_n|$ .
- (6) Ist  $a_n \leq b_n$  für jedes  $n$ , dann ist  $\lim a_n \leq \lim b_n$ .  
Ist insbesondere  $a_n \leq d$  bzw.  $d \leq b_n$  für jedes  $n$ , dann ist  $\lim a_n \leq d$   
bzw.  $d \leq \lim b_n$ .

Beweis zu (4). Es ist

3/1/44/4

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| &= \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b - b_n| \\ &= \underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{\leq \frac{2}{|b|}} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot |b_n - b| \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| := (\star \star \star). \end{aligned}$$

Wegen  $b_n \rightarrow b$  existiert für  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  gilt:

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot |b|^2. \implies (\star \star \star) < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Also  $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim b_n}$ .

(4'). Wegen  $b_n \neq 0$ ,  $b_n \rightarrow b$  und  $b \neq 0$  gilt  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ . Da auch  $a_n \rightarrow a$  erhält man mit (3)

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \implies$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

(5). Es ist  $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$  für hinreichend große  $n$ .  $\implies |a_n| \rightarrow |a|$ .  
Also  $\lim |a_n| = |a| = |\lim a_n|$ .

(6). Sei  $c_n := b_n - a_n$  ( $\geq 0$ ).

g.z.z.:  $\lim c_n \geq 0$ .

Denn dann gilt ja

$$0 \leq \lim c_n = \lim(b_n - a_n) = \lim b_n - \lim a_n \implies$$

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

Annahme:  $\lim c_n := c < 0$ .

Sei  $\varepsilon = \frac{|c|}{2} = -\frac{c}{2}$ . Dann liegen in  $U_\varepsilon(c)$  fast alle  $c_n$ .  $\implies$

$$c - \varepsilon < c_n < c + \varepsilon, \text{ also } c - \left(-\frac{c}{2}\right) < c_n < c + \left(-\frac{c}{2}\right) \implies$$

$$\frac{3}{2} \cdot c < c_n < \frac{c}{2} < 0 \quad \text{!}$$

Ist speziell  $a_n \leq d$ , so ist  $\lim a_n \leq \lim d = d$  ( $d$  als konstante Folge betrachtet).

Analoges gilt für  $d \leq b_n$ .  $\square$