

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$

**Definition.** Der  $n$ -dimensionale Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  zusammen mit dem euklidischen Abstand heißt  *$n$ -dimensionaler euklidischer Raum*. 6/1/3

**Satz 6.6** In metrischen Räumen gilt:

6/1/29

- (1) Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.
- (2) Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.
- (3) Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
- (4) Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

#### 6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

6/3/44

Zunächst führen wir eine neue Bezeichnung ein: Eine in  $\mathbb{R}^n$  abgeschlossene und beschränkte Menge nennen wir auch *kompakt*.

Wir werden den Kompaktheitsbegriff später noch präzisieren und zeigen, daß er in  $\mathbb{R}^n$  genau mit der obigen Bezeichnung zusammenfällt.

- (1) In bogenzusammenhängenden Mengen haben stetige Funktionen die Zwischenwerteigenschaft.
- (2) Ist eine stetige Funktion  $f$  an einer Stelle  $a$  positiv bzw. negativ, dann gibt es eine ganze Umgebung  $U(a)$ , so daß  $f$  in  $U(a) \cap D(f)$  positiv bzw. negativ ist.
- (3) Ist  $M$  kompakt und  $f$  stetig in  $M$ , dann ist auch  $f(M)$  kompakt.
- (4) Stetige Funktionen besitzen in kompakten Mengen ( $\neq \emptyset$ ) ein Minimum und ein Maximum.
- (5) Funktionen, die in kompakten Mengen stetig sind, sind dort auch gleichmäßig stetig.
- (6) Lipschitz-Stetigkeit  $\implies$  gleichmäßige Stetigkeit  $\implies$  Stetigkeit.  
 $\not\Leftarrow$   $\not\Leftarrow$
- (7) Als wichtige Spezialfälle treten die entsprechenden Korollare für Funktionen einer Veränderlichen auf.

#### 6.5 Einige wichtige Ergänzungen

Bisher wurden vorwiegend Funktionen der Art

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

6/5/0

betrachtet, und gewisse Eigenschaften dieser Funktionen untersucht. Dabei traten immer wieder annähernd gleichlautende Definitionen und Sätze auf. Daher war es hilfreich, den Begriff des metrischen Raumes einzuführen, um grundlegende analytische Begriffe und Sätze nur einmal definieren bzw. beweisen zu müssen, um sie dann für die jeweils betrachteten konkreten metrischen Räume entsprechend interpretieren zu können.

Weiterhin haben wir beschränkte und abgeschlossene Teilmengen aus  $\mathbb{R}^n$  kompakt genannt. Dieser Begriff soll jetzt für beliebige metrische Räume neu definiert werden. Anschließend wird gezeigt, daß nach dieser neuen Definition die kompakten Mengen in  $\mathbb{R}^n$  genau die beschränkten und abgeschlossenen sind, so daß nachträglich die Bezeichnungsweise *kompakt* gerechtfertigt ist.