

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Das unbestimmte Integral von einer Funktion – die eine Stammfunktion besitzt – ist also eine ganze Klasse von Funktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante unterscheiden. Will man mit diesen Klassen „rechnen“, dann kann man dies repräsentantenweise tun und jeweils entsprechende Konstanten addieren. 9/1/7

Zusammenstellung von Grundintegralen

$$\begin{array}{ll}
 \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\
 \int \sin x dx = -\cos x + c & \\
 \int \cos x dx = \sin x + c & \\
 \int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + c & \\
 \int \frac{dx}{\sin x} = -\cot x + c & \\
 \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c & \\
 \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + c, & |x| < 1 \\
 \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c & \\
 \int e^x dx = e^x + c & \\
 \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c & \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c & \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c & \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c, & |x| > 1 \\
 \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|. &
 \end{array}$$

Diese Grundintegrale werden alle durch Differentiation bewiesen.

9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Beweis. Den Beweis führt man leicht (mit Hilfe von Satz 9.14) induktiv über n . □ 9/4/13

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.20 (*partielle Integration*)

9/5/17

Sind f und g in $[a, b]$ stetig differenzierbar, dann ist

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Satz 9.21 (*Substitutionsregel*)

9/5/19

Ist f in $[a, b]$ stetig, g in $[\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar und $g([\alpha, \beta]) = [a, b]$,
 $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$, dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{a=g(\alpha)}^{b=g(\beta)} f(t) dt.$$

Ist außerdem g injektiv, also $\alpha = g^{-1}(a)$ und $\beta = g^{-1}(b)$, dann ist

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x) dx.$$

Übungsaufgaben

8. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

9/10/8

(a) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx,$

(c) $\int_0^2 x^3 e^x,$

(b) $\int_0^1 e^{e^x} e^x dx,$

(d) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$