

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Um den Konvergenzbegriff möglichst anschaulich zu formulieren, sagen wir auch: 3/1/1
 In jeder ε -Umgebung von a liegen *fast alle* Folgenglieder a_n . „Fast alle“ bedeutet „alle, mit Ausnahme höchstens endlich vieler“.

Definition. (*Limes superior, Limes inferior*) 3/1/27

Es sei (a_n) eine beschränkte Folge von reellen Zahlen und $H(a_n)$ die Menge aller Häufungspunkte (oder *Limites* von konvergenten Teilfolgen) von (a_n) .

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \left(:= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \stackrel{\text{Df}}{=} \sup H(a_n).$$

$\sup H(a_n)$ heißt *Limes superior* oder *oberer Limes* von (a_n) [:= größter Häufungspunkt in $H(a_n)$].

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \left(:= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \stackrel{\text{Df}}{=} \inf H(a_n),$$

$\inf H(a_n)$ heißt *Limes inferior* oder *unterer Limes* von (a_n) [:= kleinster Häufungspunkt in $H(a_n)$].

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Satz 4.9 (*Wurzelkriterium*) 4/1/35

Es sei (a_i) eine beliebige Folge. Dann gilt:

- (1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$,
dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für alle i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

Satz 4.10 (*Quotientenkriterium*) 4/1/38

Es sei $a_i \neq 0$ für jedes i . Dann gilt:

- (1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$,
dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$ für jedes i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

Bemerkung. Für die Anwendung des Quotientenkriteriums genügt es, daß

4/1/40

$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q < 1$ für fast alle i .

Ähnlich wie beim Wurzelkriterium folgt aus $\overline{\lim} \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| < 1$ die absolute Konvergenz von $\sum a_i$.

Ist andererseits $\underline{\lim} \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| > 1$, dann ist $\sum a_i$ divergent.