

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.2 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

2/2/3

- (0) $0 < 1$.
- (1) *nicht* $(a < a)$. (Irreflexivität)
- (2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$. (Transitivität)
- (3) Für jedes a, b gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$. (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Trichotomie)
- (4) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$,
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.
- (6) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, so $a + c \leq b + d$.
Ist zusätzlich $a < b$ oder $c < d$, so ist $a + c < b + d$.
- (7) Es gilt: $a < b \iff -b < -a$.
- (8) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$,
Wenn $0 < a$ und $b < 0$, so $a \cdot b < 0$,
Wenn $a < 0$ und $b < 0$, so $0 < a \cdot b$.
- (9) Wenn $0 < a$, so $0 < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0$, so $\frac{1}{a} < 0$.
- (10) Wenn $0 < a < b$, so $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0 < b$, so $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$,
Wenn $a < b < 0$, so $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.
- (11) Wenn $0 < a$, dann gibt es natürliche Zahlen m und n , so daß $0 < a < m$ und $0 < \frac{1}{n} < a$.
- (12) Wenn $a < b$, so $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Konvergenz*)

3/1/0

Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

(a_n) ist *konvergent gegen* a

$\stackrel{\text{Def}}{=}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

In diesem Falle heißt a *Grenzwert* oder *Limes* von (a_n) .

Bez.: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $a = \lim a_n$ oder auch einfach
 $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ oder $a_n \rightarrow a$.

Satz 3.3 *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

3/1/14

Beweis. Es sei (a_n) konvergent gegen a .

3/1/15

Für $\varepsilon = 1$ existiert dann ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon = 1$.

Es sei $d := \max\{|a_0 - a| : n < n_0\}$, $\implies |a_n - a| \leq d$ für alle $n < n_0$.

Für beliebige n gilt dann: $|a_n - a| < 1 + d$. Hieraus erhält man

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{< 1+d} + |a| < 1 + d + |a| := c.$$

Folglich ist (a_n) beschränkt. \square