

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*Stetigkeit in metrischen Räumen*)

6/2/2

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in \mathbb{M}_1$.

f ist in a stetig

$\stackrel{\text{Df}}{=} a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
(Andere Formulierung: Wenn $x \in U_\delta(a)$, so $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.)

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung*)

8/1/1

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

f ist in \bar{c} differenzierbar (oder total differenzierbar)

$\stackrel{\text{Df}}{=} f$ ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert, und es existiert eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $o(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft
 $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0}$, so daß für jedes $\bar{x} \in U(\bar{c})$ gilt: $f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x})$.

Die Matrix A heißt dann 1. Ableitung von f an der Stelle \bar{c} .

Bez.: $A := f'(\bar{c})$.

Definition. (*partielle Ableitung*)

8/1/4

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert.

f ist in \bar{c} partiell nach x_i differenzierbar ($i = 1, \dots, n$)

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Die Funktion } \varphi(x_i) := f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) \text{ ist (als Funktion der einen Veränderlichen } x_i) \text{ an der Stelle } c_i \text{ differenzierbar.}$

Nach der früheren Differenzierbarkeitsdefinition bedeutet dies, daß die folgenden Limites existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(c_i + h) - \varphi(c_i)}{h}, \quad \text{für } h := x_i - c_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - f(\bar{c})}{x_i - c_i}. \end{aligned}$$

Der Limes selbst (falls er existiert) heißt partielle Ableitung von f nach x_i an der Stelle \bar{c} (oder kurz: in \bar{c}).

Bez.: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = f_{x_i}(\bar{c})$.

Satz 8.2 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

Ist f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert und nach allen Variablen partiell differenzierbar und sind alle partiellen Ableitungen in \bar{c} stetig, dann ist f in \bar{c} (total) differenzierbar, und für jedes $\bar{x} \in U(\bar{c})$ gilt $f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot (x_i - c_i) + o(\bar{x})$.

(D.h., die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die aufgrund der Differenzierbarkeit existiert, ist gegeben durch $A = (a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{c}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{c}) \right)$ und $A(\bar{x} - \bar{c}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot (x_i - c_i)$.)