

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

**Satz 2.2** Für alle reellen Zahlen  $a, b, c$  gilt:

2/2/3

- (0)  $0 < 1$ .
- (1) *nicht*  $(a < a)$ . (Irreflexivität)
- (2) Wenn  $a < b$  und  $b < c$ , so  $a < c$ . (Transitivität)
- (3) Für jedes  $a, b$  gilt:  $a < b$  oder  $a = b$  oder  $b < a$ . (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen:  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$ . (Trichotomie)
- (4) Wenn  $a < b$ , so  $a + c < b + c$ . (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $a \cdot c < b \cdot c$ ,  
Wenn  $a < b$  und  $c < 0$ , so  $a \cdot c > b \cdot c$ .
- (6) Wenn  $a \leq b$  und  $c \leq d$ , so  $a + c \leq b + d$ .  
Ist zusätzlich  $a < b$  oder  $c < d$ , so ist  $a + c < b + d$ .
- (7) Es gilt:  $a < b \iff -b < -a$ .
- (8) Wenn  $0 < a$  und  $0 < b$ , so  $0 < a \cdot b$ ,  
Wenn  $0 < a$  und  $b < 0$ , so  $a \cdot b < 0$ ,  
Wenn  $a < 0$  und  $b < 0$ , so  $0 < a \cdot b$ .
- (9) Wenn  $0 < a$ , so  $0 < \frac{1}{a}$ ,  
Wenn  $a < 0$ , so  $\frac{1}{a} < 0$ .
- (10) Wenn  $0 < a < b$ , so  $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ,  
Wenn  $a < 0 < b$ , so  $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$ ,  
Wenn  $a < b < 0$ , so  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ .
- (11) Wenn  $0 < a$ , dann gibt es natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ , so daß  $0 < a < m$  und  $0 < \frac{1}{n} < a$ .
- (12) Wenn  $a < b$ , so  $a < \frac{a+b}{2} < b$ .

## Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Definition.****3/1/2**

- (1)  $(a_n)$  konvergiert (oder ist konvergent) in  $\mathbb{R}$   
 $\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in \mathbb{R}$ , so daß  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert.
- (2)  $(a_n)$  divergiert (oder ist divergent) in  $\mathbb{R}$   
 $\overline{\text{Df}}$   $(a_n)$  ist nicht konvergent in  $\mathbb{R}$ .

**Satz 3.9** (*Cauchysches Konvergenzkriterium*)**3/1/37**

Eine Folge  $(a_n)$  ist konvergent (in  $\mathbb{R}$ ) gdw

für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  existiert, so daß für jedes  $m, n \geq n_0$  gilt:  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .

**Übungsaufgaben**

12. Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Kriteriums die Konvergenz der Folgen:

**3/3/12**

$$(a) \left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right), \quad (b) \left( \frac{n + b}{n} \right), \quad (c) \left( \frac{1}{n^p} \right), \quad p \geq 1.$$