

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) f ist *stetig in* M

$\overline{\text{Df}}$ f ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.

(2) f ist *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ f ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

Definition. (*Grenzwert bei Funktionen*)

5/2/6

Es sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$ (a muß nicht selbst zu $D(f)$ gehören).

f besitzt an der Stelle a den *Grenzwert* c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$

Satz 5.2 Sei $a \in D(f)$ und a ein Häufungspunkt von $D(f)$. Dann gilt:

5/2/12

f ist in a stetig gdw $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert und $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Übungsaufgaben

12. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen an der Stelle a einen Grenzwert besitzen:

5/5/12

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x < 0, \\ 2^x & \text{für } x \geq 0, \end{cases} \quad a = 0,$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0, \end{cases} \quad a = 0,$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) & \text{für } |x| \leq 1, \\ |x - 1| & \text{für } |x| > 1, \end{cases} \quad a = 1, \quad a = -1.$$