

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.2 Stetigkeit

**Korollar** (*Zwischenwertsatz*)

5/2/23

Ist  $f$  in  $[a, b]$  stetig,  $d \in \mathbb{R}$  beliebig und  $f(a) < d < f(b)$  oder  $f(a) > d > f(b)$ , dann existiert ein  $c \in (a, b)$ , so daß  $f(c) = d$ .

### 5.3 Elementare Funktionen

**Bez.:**  $f(x) := \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

5/3/18

$f(x) = \exp(x)$  heißt *Exponentialfunktion*.

**Satz 5.11** Die Exponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

5/3/19

- (1)  $D(\exp) = \mathbb{R}$ .
- (2) Für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$   
(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).
- (3)  $\exp(0) = 1$  und  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ ,  
für  $x < 0$  ist  $0 < \exp(x) < 1$ , und  
für  $x > 0$  ist  $1 < \exp(x)$ .
- (4)  $\exp$  ist streng monoton wachsend  
(folglich ist  $\exp$  injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion).
- (5)  $\exp(1) = e$  ( $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ).
- (6) Für rationale  $x = \pm \frac{m}{n}$  ist  $\exp(x) = e^{\pm \frac{m}{n}}$   
(für irrationale  $x$  ist  $e^x$  bisher nicht definiert!).
- (7)  $\exp$  ist stetig.

**Definition.** Für  $x \in \mathbb{R}$  sei  $e^x \stackrel{\text{Df}}{=} \exp(x)$ .

5/3/22

**Satz 5.12** Für  $e^x$  gilt:

5/3/24

- (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .
- (2)  $e^x$  nimmt jeden Wert  $y > 0$  genau einmal an  
( $\implies W(e^x) = \{y : y > 0\} = (0, \infty)$ ).

**Beweis.** (1). Für  $x > 0$  ist  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + x$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x) = \infty$ .

5/3/25

Für  $x < 0$  ist  $-x > 0$  und somit  $e^x = \frac{1}{e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ , denn  $e^x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$ .

(2). Sei  $y > 0$  beliebig.

Aufgrund der Eigenschaft (1) gibt es Elemente  $a, b \in \mathbb{R}$ , so daß  $e^a < y < e^b$ . Da die Funktion  $e^x$  in  $\mathbb{R}$  stetig ist, nimmt sie nach dem Zwischenwertsatz den Wert  $y$  an. Andererseits kann  $y$  auch nur einmal angenommen werden, denn  $e^x$  ist nach Satz 5.11 (4) streng monoton wachsend.  $\square$