

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Satz 6.6 In metrischen Räumen gilt:

6/1/29

- (1) Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.
- (2) Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.
- (3) Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
- (4) Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

6.5 Einige wichtige Ergänzungen

Definition. (*Überdeckung*)

6/5/1

Es sei (\mathbb{M}, ϱ) ein metrischer Raum und $M \subseteq \mathbb{M}$.

Weiterhin sei \mathcal{U} ein System von (offenen) Teilmengen von \mathbb{M} (also $\mathcal{U} \subseteq \text{Pot}(\mathbb{M})$).

- (1) \mathcal{U} ist eine (*offene*) *Überdeckung* von M

$\overline{\text{Df}}$ Zu jedem $a \in M$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$, so daß $a \in U$.

(Die Mengen aus \mathcal{U} überdecken die Menge M).

- (2) \mathcal{U} ist eine *endliche Überdeckung* von M

$\overline{\text{Df}}$ \mathcal{U} ist eine Überdeckung von M , und \mathcal{U} enthält nur endlich viele Mengen.

Definition. (*kompakt*)

6/5/3

Es sei (\mathbb{M}, ϱ) ein metrischer Raum und $M \subseteq \mathbb{M}$.

- (1) M ist *kompakt*

$\overline{\text{Df}}$ Jede offene Überdeckung von M enthält eine endliche Teilüberdeckung von M (d.h., ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M , dann existiert ein endliches Teilsystem

$\mathcal{U}_0 := \{U_1, \dots, U_m\} \subseteq \mathcal{U}$, so daß schon \mathcal{U}_0 die Menge M überdeckt).

- (2) (\mathbb{M}, ϱ) ist *kompakt*

$\overline{\text{Df}}$ $M = \mathbb{M}$ ist kompakt.