

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9/0

Die Differentialrechnung ist u.a. durch das Tangentenproblem und das Geschwindigkeitsproblem motiviert. Dabei ist also eine Funktion f – etwa die Funktion des zurückgelegten Weges eines sich bewegenden Massepunktes – gegeben, und die Ableitung f' der Funktion f – also die Funktion der Geschwindigkeit des Punktes – ist gesucht.

In der Praxis entsteht oft die umgekehrte Fragestellung. Z.B. kann die Funktion der Geschwindigkeit gegeben sein, und man sucht die Funktion des Weges. Also gegeben ist eine Funktion f , gesucht ist eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$. Dies führt uns in gewisser Weise zur Umkehrung des Differenzierens, zum (unbestimmten) Integrieren. Mit dieser Fragestellung verwandt, obwohl auf dem ersten Blick nicht zu erkennen, ist das sog. *Flächenproblem*:

Gegeben sei eine in einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ mit $a < b$ definierte und nicht negative Funktion f . Es erhebt sich die Frage, ob der ebenen Punktmenge

$$M = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

in „vernünftiger Weise“ ein Flächeninhalt zugeschrieben werden kann und wie dieser gegebenenfalls berechnet werden könnte? (siehe auch Abb. 9.1 und 9.2)

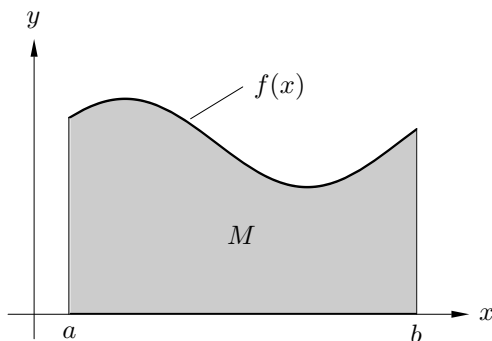


Abb. 9.1 Die schattierte Fläche symbolisiert den vermeintlichen Flächeninhalt der oben definierten Punktmenge M .

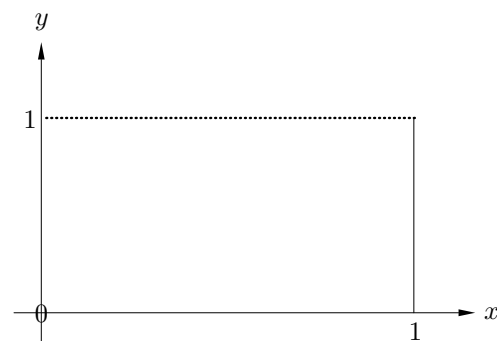


Abb. 9.2 Sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ Lässt sich auch dieser Punktmenge M ein Flächeninhalt zuordnen?

Diese Fragestellungen werden in den nächsten beiden Abschnitten behandelt. Wir fassen uns zunächst mit der „Umkehrung des Differenzierens“.