

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Nullfolge*)

3/1/7

Eine Folge (a_n) heißt *Nullfolge*
 $\stackrel{\text{Df}}{=} (a_n)$ konvergiert gegen 0.

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*Konvergenz von Reihen*)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$ konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann *Wert* oder *Limes der Reihe*.

Definition. (*Divergenz von Reihen*)

4/1/2

$\sum a_i$ ist *divergent* $\stackrel{\text{Df}}{=} \sum a_i$ ist nicht konvergent.

Beispiel. (*Geometrische Reihe*)

4/1/3

Sei $|a| < 1$ und $a \neq 0$.

Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ gegen $\frac{1}{1-a}$; ($\sum a^i$ heißt *geometrische Reihe*).

Beweis. Für $S_n = 1 + a + \dots + a^n$ ist

$$\begin{aligned} S_n(1-a) &= (1 + \dots + a^n)(1-a) = 1 + \dots + a^n - (a + \dots + a^{n+1}) \\ &= 1 - a^{n+1}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Damit ist der Wert der n -ten Partialsumme berechnet.

Wegen $\lim a^{n+1} = 0$ erhält man aus den Eigenschaften konvergenter Folgen
 (vgl. Beispiel 2 in Kapitel 3, vor dem Satz 3.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a^{n+1})}_{=1} = \frac{1}{1 - a}.$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}.$$

Definition. (absolute Konvergenz)

4/1/15

$\sum a_i$ ist absolut konvergent $\stackrel{\text{Df}}{\iff} \sum |a_i|$ ist konvergent.

Definition. (Minorante, Majorante)

4/1/31

Es seien $\sum a_i, \sum b_i$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern.

$\sum a_i$ heißt Minorante von $\sum b_i$ und gleichzeitig heißt $\sum b_i$ Majorante von $\sum a_i$
 $\stackrel{\text{Df}}{\iff} a_i \leq b_i$ für alle i .

Satz 4.8 (Majorantenkriterium)

4/1/32

Es seien $\sum a_i, \sum b_i$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei $\sum b_i$ eine Majorante von $\sum a_i$. Dann gilt:

- (1) Ist $\sum b_i$ konvergent, so ist auch $\sum a_i$ konvergent.
- (2) Ist $\sum a_i$ divergent, so ist auch $\sum b_i$ divergent.

Satz 4.9 (Wurzelkriterium)

4/1/35

Es sei (a_i) eine beliebige Folge. Dann gilt:

- (1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$,
dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für alle i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

Beweis. (1). Es sei $0 < q < 1$ und $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q \implies |a_i| \leq q^i$.

4/1/36

$\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ ist eine konvergente Majorante von $\sum |a_i|$ (geometrische Reihe). Folglich ist $\sum |a_i|$

(nach dem Majorantenkriterium) konvergent, und damit ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

(2). Sei $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$. Dann ist $|a_i| \geq 1$ und daher (a_i) keine Nullfolge. Folglich ist $\sum a_i$ divergent. \square