

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_{\frac{a}{-}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\frac{b}{-}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.16 (*Erweiterter 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung*)

9/5/4

Sei $a < b$, seien f, g in $I = [a, b]$ integrierbar, und g wechsele in I nicht das Vorzeichen (d.h., $g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ oder $g(x) \leq 0$ für alle $x \in I$).

Dann gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\inf_{x \in I} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in I} f(x)$, so daß

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \mu \cdot \int_a^b g(x) dx.$$