

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

#### II. $\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper

2/1/2

(d.h., in  $\mathbb{R}$  gelten zusätzlich die folgenden 5 Eigenschaften:)

- (1) Wenn  $x \leq y$  und  $y \leq z$ , so  $x \leq z$ . (*Transitivität*)
- (2) Wenn  $x \leq y$  und  $y \leq x$ , so  $x = y$ . (*Antisymmetrie*)
- (3) Für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $x \leq y$  oder  $y \leq x$ . (*Linearität*)
- (4) Wenn  $x \leq y$ , so  $x + z \leq y + z$ . (*Monotonie der Addition*)
- (5) Wenn  $0 \leq x$  und  $0 \leq y$ , so  $0 \leq x \cdot y$ .

**Bemerkung.** Aus (3) folgt sofort die *Reflexivität*, d.h. für jedes  $x$  gilt:  $x \leq x$ .

Die Eigenschaften (1) – (3) sind die *Axiome der reflexiven Ordnung*.

(4) könnte auch abgeschwächt werden zu

(4') Wenn  $0 \leq x$  und  $0 \leq y$ , so  $0 \leq x + y$ .

Es läßt sich leicht nachweisen, daß  $x \leq y \iff 0 \leq y - x$ .

Wie üblich ist  $y \geq x$  eine andere Schreibweise für  $x \leq y$ .

### 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

**Definition.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2/2/19

$$|a| \stackrel{\text{Df}}{=} \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

**Bez.:**  $|a|$  heißt *Betrag* oder *Absolutbetrag* von  $a$ , und  
 $|a - b|$  heißt *Abstand* zwischen  $a$  und  $b$ .

**Satz 2.7** (*Dreiecksungleichungen*)

2/2/22

Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

- (1)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .
- (2)  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ .