

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung*)

8/1/1

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

f ist in \bar{c} differenzierbar (oder total differenzierbar)

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert, und es existiert eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $o(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0}, \text{ so daß für jedes } \bar{x} \in U(\bar{c}) \text{ gilt: } f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x}).$$

Die Matrix A heißt dann 1. Ableitung von f an der Stelle \bar{c} .

Bez.: $A := f'(\bar{c})$.

Satz 8.6 (*Differentiation rationaler Funktionen*)

8/1/28

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und f, g in \bar{c} differenzierbar. Dann gilt:

(1) $f \pm g$ und $f \cdot g$ sind in \bar{c} differenzierbar, und es ist

$$(f \pm g)'(\bar{c}) = f'(\bar{c}) \pm g'(\bar{c}) \quad \left(\implies d(f \pm g) = df \pm dg \right),$$

$$(f \cdot g)'(\bar{c}) = f'(\bar{c}) \cdot g(\bar{c}) + f(\bar{c}) \cdot g'(\bar{c}) \quad \left(\implies d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg \right).$$

(2) Ist $g(\bar{x}) \neq 0$ für jedes \bar{x} in einer Umgebung $U(\bar{c})$, dann ist $\frac{f}{g}$ in \bar{c} differenzierbar, und es ist

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(\bar{c}) = \frac{f'(\bar{c}) \cdot g(\bar{c}) - f(\bar{c}) \cdot g'(\bar{c})}{g^2(\bar{c})} \quad \left(\implies d\left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2} \right).$$