

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (*Grenze*)

2/3/2

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

(1) Sei M nach oben beschränkt. a ist *obere Grenze* von M

$\overline{\text{Df}}$ a ist die kleinste obere Schranke von M .

Bez.: $a = \sup M$ (*Supremum* von M).

(2) Sei M nach unten beschränkt. a ist *untere Grenze* von M

$\overline{\text{Df}}$ a ist die größte untere Schranke von M .

Bez.: $a = \inf M$ (*Infimum* von M).

Satz 2.8

2/3/4

- (1) Jede nicht leere und nach oben beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere Grenze.
- (2) Jede nicht leere und nach unten beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine untere Grenze.
- (3) Jede nicht leere und beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere und eine untere Grenze.

Definition. (*Häufungspunkt*)

2/3/11

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

a ist ein Häufungspunkt von M

$\overline{\text{Df}}$ In jeder ε -Umgebung von a liegt wenigstens ein von a verschiedenes Element
 (:= Punkt) aus M ,

(d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in M$ mit $x \neq a$ und $x \in U_\varepsilon(a)$).

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.14 Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist f in M stetig, und ist M beschränkt und abgeschlossen, dann ist auch $f(M)$ beschränkt und abgeschlossen.

6/3/16

Satz 6.15 (Satz von Weierstraß)

6/3/21

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $M \neq \emptyset$. Dann gilt:

Ist f in M stetig und M beschränkt und abgeschlossen, dann existieren Minimum und Maximum von f in M (d.h., es gibt Elemente $\bar{a}, \bar{b} \in M$, so daß $f(\bar{a}) = \min f(M)$ und $f(\bar{b}) = \max f(M)$).

Beweis. Wir zeigen, daß f in M ein Maximum besitzt; für das Minimum erfolgt der Beweis analog.

6/3/22

Nach Satz 6.14 ist $f(M)$ beschränkt, folglich existiert $\alpha := \sup f(M)$.

g.z.z.: $\alpha \in M$, denn dann ist α das Maximum von $f(M)$.

Annahme: $\alpha \notin f(M)$.

Wegen $\alpha = \sup f(M)$ ist dann $\alpha > f(\bar{x})$ für alle $\bar{x} \in M$.

Nach Definition des Supremums gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $b \in f(M)$, so daß $\alpha > b > \alpha - \varepsilon$. Also in jeder ε -Umgebung von α liegt ein Punkt $b \in f(M)$ und $b \neq \alpha$; somit ist α ein Häufungspunkt von $f(M)$.

Nach Satz 6.14 ist $f(M)$ abgeschlossen, folglich ist $\alpha \in f(M)$. $\nexists!$ \square