

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*Konvergenz von Reihen*)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=}$ (S_n) konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann *Wert* oder *Limes der Reihe*.

Satz 4.6 (*Leibniz-Kriterium*)

4/1/26

Ist $\sum a_i$ alternierend und $\lim a_i = 0$ und $(|a_i|)_{i=0,1,2,\dots}$ monoton fallend, dann ist $\sum a_i$ konvergent.

Beispiele.

1. (Anwendung des Leibniz-Kriteriums)

4/1/30/1

Behauptung: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}}_{:= a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ ist konvergent.

Offenbar ist $\sum a_n$ alternierend, $a_n \rightarrow 0$ und $|a_n| = \frac{1}{n+1}$ monoton fallend, folglich ist die betrachtete Reihe konvergent.

$$\text{Sei } a = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \implies a_0 = 1 > a > 0$$

(vgl. Beweis zu Satz 4.6; mit dem späteren Korollar zu Satz 7.11 läßt sich leicht zeigen, daß $a = \ln 2$).