

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Aus Satz 10.1 (2) folgt sofort, daß die Menge aller Untersummen nach oben und die Menge aller Obersummen nach unten beschränkt ist. Folglich existieren 10/1/5

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy \stackrel{\text{Df}}{=} \sup \{ \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) : \bar{\mathfrak{z}} \text{ Zerlegung von } D \} \quad (\text{Unterintegral von } f \text{ in } D),$$

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy \stackrel{\text{Df}}{=} \inf \{ \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) : \bar{\mathfrak{z}} \text{ Zerlegung von } D \} \quad (\text{Oberintegral von } f \text{ in } D).$$

Aus (4) erhält man unmittelbar, daß stets $\iint_D f(x, y) \, dx dy \leq \iint_D f(x, y) \, dx dy$ gilt.

Analog wie im eindimensionalen Fall definieren wir jetzt das *Doppelintegral*.

Definition. (*Integral über Rechteckbereichen*)

10/1/6

Sei f in D definiert und beschränkt.

f ist in D integrierbar

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

Der gemeinsame Wert von Ober- und Unterintegral heißt dann *Riemann-Integral* oder *Doppelintegral* oder kurz *Integral* von f in D .

$$\text{Bez.: } \iint_D f(x, y) \, dx dy := \int_D f(\bar{x}) \, d\bar{x}.$$