

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.7 Uneigentliche Integrale

Definition. (*uneigentliches Integral über unendlichen Intervallen*)

9/7/1

Es sei a eine reelle Zahl, f sei für alle $x \geq a$ definiert und in $[a, x]$ integrierbar,

und es sei $F(x) := \int_a^x f(t) dt$.

f ist in $[a, \infty) = \{x : a \leq x\}$ *uneigentlich integrierbar*

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x).$

Der Limes heißt dann *uneigentliches Integral* von f in $[a, \infty)$.

$$\text{Bez.: } \int_a^\infty f(t) dt$$

Ist f in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann heißt $\int_a^\infty f(t) dt$ *konvergent*, anderenfalls *divergent*.

Ist $|f|$ in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann heißt $\int_a^\infty f(t) dt$ *absolut konvergent*.

Analog definiert man das uneigentliche Integral von f in $(-\infty, a]$. Hierbei sei f für jedes $x \leq a$ definiert und in $[x, a]$ integrierbar.

Man betrachtet dann $F(x) := \int_x^a f(t) dt$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

Definition. f ist in $(-\infty, \infty)$ *uneigentlich integrierbar*

9/7/2

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert ein } a \in \mathbb{R}, \text{ so daß } f \text{ in } (-\infty, a] \text{ und in } [a, \infty) \text{ uneigentlich integrierbar ist.}$

$\int_{-\infty}^\infty f(t) dt \stackrel{\text{Df}}{=} \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^\infty f(t) dt$ heißt *uneigentliches Integral* von f in $(-\infty, \infty)$.