

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen ist die *vollständige Induktion*. Sie beruht auf dem

Induktionsaxiom:

Es sei E eine Eigenschaft für natürliche Zahlen n . Dann gilt

$$E(0) \wedge \forall n (E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m E(m).$$

Um die Aussage $\forall m E(m)$ zu beweisen, genügt es:

1. $E(0)$ zu zeigen (*Anfangsschritt*) und
2. $\forall n (E(n) \rightarrow E(n+1))$ nachzuweisen (*Induktionsschritt*).

Bei der Eigenschaft 2. betrachtet man ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und zeigt:

Wenn $E(n)$, so $E(n+1)$.

$E(n)$ heißt *Induktionsvoraussetzung*, $E(n+1)$ *Induktionsbehauptung*.

Eigentlich müßte beim Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Fall (a): $E(n)$ ist falsch.

Dann ist die Implikation $E(n) \rightarrow E(n+1)$ aber trivialerweise richtig. Daher läßt man diesen Fall im Induktionsbeweis in der Regel weg und betrachtet nur noch

Fall (b): $E(n)$ ist richtig.

Unter dieser Voraussetzung ist dann die Gültigkeit von $E(n+1)$ zu zeigen.

Achtung: Häufig findet man bei „Anfängern“ die folgende falsche Formulierung im Induktionsschritt:

„Für beliebiges n wird vorausgesetzt, daß $E(n)$ schon gilt.“

Wer dies so formuliert, hat die Behauptung bereits vorausgesetzt.

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Beispiel. (Geometrische Reihe)

4/1/3

Sei $|a| < 1$ und $a \neq 0$.

Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ gegen $\frac{1}{1-a}$; ($\sum a^i$ heißt *geometrische Reihe*).

Beweis. Für $S_n = 1 + a + \cdots + a^n$ ist

$$S_n(1-a) = (1 + \cdots + a^n)(1-a) = 1 + \cdots + a^n - (a + \cdots + a^{n+1})$$

$$= 1 - a^{n+1}.$$

Hieraus erhält man

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Damit ist der Wert der n -ten Partialsumme berechnet.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$ erhält man aus den Eigenschaften konvergenter Folgen (vgl. Beispiel 2 in Kapitel 3, vor dem Satz 3.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a^{n+1})}_{=1} = \frac{1}{1 - a}.$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1 - a}.$$

Satz 4.4 Es seien $\sum a_i$, $\sum b_i$ konvergent und $a, b \in \mathbb{R}$.

4/1/19

Dann ist $\sum (a \cdot a_i + b \cdot b_i)$ konvergent und $\sum (a \cdot a_i + b \cdot b_i) = a \cdot \sum a_i + b \cdot \sum b_i$.

Satz 4.8 (Majorantenkriterium)

4/1/32

Es seien $\sum a_i$, $\sum b_i$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei $\sum b_i$ eine Majorante von $\sum a_i$. Dann gilt:

- (1) Ist $\sum b_i$ konvergent, so ist auch $\sum a_i$ konvergent.
- (2) Ist $\sum a_i$ divergent, so ist auch $\sum b_i$ divergent.

Satz 4.10 (Quotientenkriterium)

4/1/38

Es sei $a_i \neq 0$ für jedes i . Dann gilt:

- (1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$,
dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$ für jedes i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

Übungsaufgaben

15. (a) Es sei $R_n := \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$ und $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q < 1$ für $i > n$.

4/6/15

Beweisen Sie, daß $|R_n| < \frac{|a_{n+1}|}{1 - q}$ ist.

(b) Unter Benutzung von $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ ($x \in \mathbb{R}$) berechne man $e^{0.1}$ auf 4 Stellen

genau, d.h.,

$$|R_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{0.1^i}{i!} \right| < \frac{1}{10^4}$$

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Bez.: $f(x) := \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

5/3/18

$f(x) = \exp(x)$ heißt *Exponentialfunktion*.

Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $e^x \stackrel{\text{Df}}{=} \exp(x)$.

5/3/22