

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Lemma. (*Bernoullische Ungleichung*)

2/2/8/2

Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$ und ist m eine natürliche Zahl, dann gilt $(1 + a)^m \geq 1 + ma$.

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Abschließend betrachten wir noch Funktionenfolgen. Dazu sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine in M definierte Funktion. Weiterhin sei auch $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in M definiert.

3/2/10

Definition. (*Konvergenz von Funktionenfolgen*)

(1) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert an der Stelle $a \in M$ gegen b

$\stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = b$.

(2) (f_n) konvergiert in M gegen die Funktion f

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } a \in M \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a),$

(d.h., für jedes fixierte $a \in M$ konvergiert die Zahlenfolge $(f_n(a))$ gegen die Zahl $f(a)$; diese Art Konvergenz nennen wir auch *punktweise Konvergenz*).

Bez.: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

(3) (f_n) konvergiert in M

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert eine Funktion } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ so daß } (f_n) \text{ in } M \text{ gegen } f \text{ konvergiert.}$

Definition. (*gleichmäßige Konvergenz*)

3/2/12

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert in M gleichmäßig gegen f

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } n_0, \text{ so daß für jedes } n \geq n_0 \text{ und für alle } x \in M \text{ gilt: } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Die folgende Abbildung veranschaulicht, daß sich bei der gleichmäßigen Konvergenz für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Funktionen $f_n(x)$ von $f(x)$ an jeder Stelle $x \in M = [a, b]$ um weniger als ε unterscheiden, falls n hinreichend groß ist; man sagt dafür auch, daß die Funktionen $f_n(x)$ in dem ε -Streifen von $f(x)$ liegen.

3/2/13

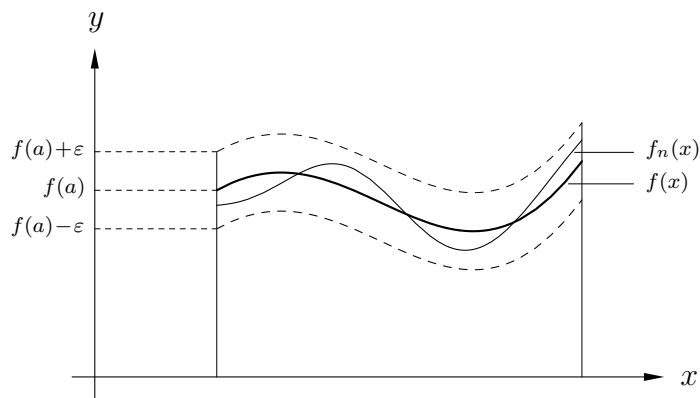


Abb. 3.1 veranschaulicht die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen. Der ε -Streifen von $f(x)$ ist durch die gestrichelten Kurven dargestellt.

Die im vorhergehenden Beispiel betrachtete Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ ist nicht gleichmäßig konvergent in $[0, 1]$.

Angenommen doch, dann gibt es für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und für alle $x \in [0, 1]$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$. Dies gilt insbesondere für $m = n_0$ und für alle $x \in [0, 1]$; hier ist zusätzlich $f(x) = 0$. Also $|f_m(x)| < \frac{1}{2}$ für alle x mit $0 \leq x < 1$. Wir wählen jetzt x „hinreichend dicht“ bei 1; $x := 1 - \delta$ mit $\delta > 0$. Dann gilt nach der Bernoullischen Ungleichung: $x^m = (1 - \delta)^m \geq 1 - m\delta$ (m fixiert). Sei δ so klein, daß $m\delta < \frac{1}{2}$, dann ist $\frac{1}{2} < x^m = |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$ **N!**

In den späteren Abschnitten über Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von Funktionen werden wir uns ausführlicher mit den Eigenschaften der Grenzfunktion befassen.