

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.1 Konvergenz von Reihen

**Definition.** (*absolute Konvergenz*)

4/1/15

$\sum a_i$  ist *absolut konvergent*  $\stackrel{\text{Def}}{=} \sum |a_i|$  ist konvergent.

### 4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

**Satz 4.15** (*Großer Umordnungssatz*)

4/2/20

Es sei  $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$  eine Doppelreihe,  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  eine Bijektion, und für  $\varphi(\nu) = (i, j)$

sei  $b_\nu := a_{ij}$ . Weiterhin sei  $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$  absolut konvergent und  $\sum b_\nu = b$ . Dann gilt:

- (1) Jede Zeilenreihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} := Z_i$  konvergiert absolut.
- (2) Jede Spaltenreihe  $\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} := S_j$  konvergiert absolut.
- (3) Die Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} Z_i$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} S_j$  konvergieren absolut, und es ist
 
$$\sum_{i=0}^{\infty} Z_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j = b.$$

**Korollar.** Es sei  $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$  eine Doppelreihe,  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  eine Bijektion, und für

4/2/22

$\varphi(\nu) = (i, j)$  sei  $b_\nu := a_{ij}$ . Weiterhin sei jede Zeilenreihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$  absolut konvergent,

$\sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| := \alpha_i$ , und die Reihe  $\sum \alpha_i$  sei ebenfalls konvergent. Dann gilt:

- (1)  $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$  ist absolut konvergent.
- (2) Mit  $b := \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$  gelten auch die Behauptungen (2)–(4) aus dem vorhergehenden Satz 4.15.