

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in M definiert.

8/3/9

(1) f heißt in M *stetig differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$ f ist in M differenzierbar und f' ist in M stetig.

(Dies ist nach dem Satz 8.2 genau dann der Fall, wenn alle partiellen Ableitungen von f in M vorhanden und stetig sind.)

(2) f ist in M $(k+1)$ -mal *stetig differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$ $f^{(k)}$ ist in M stetig differenzierbar.

Bez.: $f \in C^{k+1}(M)$.

Definition. (*lokales Extremum*)

8/3/17

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und \bar{c} ein innerer Punkt von $D(f)$.

f besitzt an der Stelle \bar{c} ein *relatives* oder *lokales Extremum* ($:=$ *lokales Minimum* bzw. *lokales Maximum*)

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine Umgebung $U(\bar{c})$, so daß für jedes $\bar{x} \in U(\bar{c})$ mit $\bar{x} \neq \bar{c}$ gilt:

$f(\bar{x}) > f(\bar{c})$ für ein lokales Minimum und

$f(\bar{x}) < f(\bar{c})$ für ein lokales Maximum.

Im eindimensionalen Fall haben wir eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums mit Hilfe des Taylorschen Satzes bewiesen. Analoge Überlegungen führen auch bei Funktionen mit mehreren Veränderlichen zum Ziel. Wir beschränken uns hier auf Funktionen mit zwei Veränderlichen, da der technische Aufwand für den n -dimensionalen Fall nicht unerheblich ist.

8/3/21

Ist $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$, U eine Umgebung von $\bar{c} = (a, b)$, f zweimal stetig differenzierbar in U und $\bar{x} = (x, y)$ hinreichend dicht bei \bar{c} , dann gilt nach dem Satz von Taylor (für $m = 1$, $n = 2$, $\bar{h} = \bar{x} - \bar{a} = (x - a, y - b) := (h, k)$ und $\bar{u} := \bar{a} + \vartheta \bar{h}$)

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = f_x(\bar{c}) \cdot h + f_y(\bar{c}) \cdot k + \frac{1}{2} \left(f_{xx}(\bar{u}) \cdot h^2 + 2f_{xy}(\bar{u}) \cdot hk + f_{yy}(\bar{u}) \cdot k^2 \right). \quad (\star)$$

Sind die notwendigen Bedingungen für das Vorliegen eines lokalen Extremums erfüllt, d.h., $f_x(\bar{c}) = f_y(\bar{c}) = 0$, dann erhält man

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{1}{2} \left(h^2 \cdot f_{xx}(\bar{u}) + 2hk \cdot f_{xy}(\bar{u}) + k^2 \cdot f_{yy}(\bar{u}) \right) = R_1(\bar{x}).$$

Ob f an der Stelle \bar{c} ein lokales Extremum besitzt, hängt allein von dem Restglied ab. Aufgrund der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen in U wechseln diese in

einer hinreichend kleinen Umgebung von \bar{c} ihr Vorzeichen nicht, falls sie an der Stelle \bar{c} von null verschieden sind. Dies nutzen wir aus, um ein handhabbares Kriterium zur Verfügung zu haben.

Satz 8.14 (Hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums)

8/3/22

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$ und f sei in einer Umgebung von \bar{c} zweimal stetig differenzierbar.

Weiterhin sei \bar{c} ein kritischer Punkt von f und $D = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{c}) & f_{xy}(\bar{c}) \\ f_{xy}(\bar{c}) & f_{yy}(\bar{c}) \end{vmatrix}$.

Dann gilt:

- (1) Ist $D > 0$, dann besitzt f in \bar{c} ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Minimum, falls $f_{xx}(\bar{c}) > 0$ und ein lokales Maximum, falls $f_{xx}(\bar{c}) < 0$.
- (2) Ist $D < 0$, dann besitzt f in \bar{c} einen sog. Sattelpunkt (das ist ein kritischer Punkt, in dem die betrachtete Funktion weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum besitzt; vgl. Abb. 8.11).
- (3) Ist $D = 0$, dann läßt sich (allein mit Hilfe der zweiten partiellen Ableitungen) noch keine Aussage treffen.

Beweis. Wir benutzen die gleichen Bezeichnungen wie in der obigen Formel (\star). Da nach Voraussetzung $f_x(\bar{c})$ und $f_y(\bar{c})$ null sind, erhält man aus (\star)

8/3/23

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{1}{2} \left(h^2 \cdot f_{xx}(\bar{u}) + 2hk \cdot f_{xy}(\bar{c}) + k^2 \cdot f_{yy}(\bar{u}) \right) = R_1(\bar{x}).$$

(1). Nach Voraussetzung ist

$$D := D(\bar{c}) = f_{xx}(\bar{c}) \cdot f_{yy}(\bar{c}) - f_{xy}^2(\bar{c}) > 0.$$

Betrachtet man $D(\bar{u})$ als Funktion von $\bar{u} = \bar{c} + \vartheta(\bar{x} - \bar{c})$, dann ist wegen $f \in C^2(U)$ die Funktion $D(\bar{u})$ in U stetig und somit $D(\bar{u}) > 0$, falls \bar{x} hinreichend nahe bei \bar{c} liegt.

Analog gilt für $f_{xx}(\bar{c}) \lesssim 0$ auch $f_{xx}(\bar{u}) \lesssim 0$.

Im folgenden schreiben wir für $f_{xx}(\bar{u})$, $f_{xy}(\bar{u})$, $f_{yy}(\bar{u})$ kurz f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} .

Da f_{xx} nicht null ist, erhält man

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f(\bar{c}) &= \frac{1}{2f_{xx}} \cdot \left[h^2 f_{xx}^2 + hk f_{xx} f_{xy} + k^2 f_{xx} f_{yy} \right] \\ &= \frac{1}{2f_{xx}} \left[\underbrace{(h f_{xx} + k f_{yy})^2}_{\geq 0} + k^2 \underbrace{(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)}_{> 0} \right]. \end{aligned}$$

Da der Ausdruck in den eckigen Klammern für $k \neq 0$ positiv ist, hängt das Vorzeichen von $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$ nur von $f_{xx}(\bar{c})$ ab. (Für $k = 0$ gilt nach (\star) schon $f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot f_{xx}(\bar{c})$.)

Also für $f_{xx}(\bar{c}) > 0$ besitzt f an der Stelle \bar{c} ein lokales Minimum und für $f_{xx}(\bar{c}) < 0$ ein lokales Maximum.

(2). Sei $D < 0$. Setzt man $h = k$ bzw. $h = -k$, dann erhält man

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot (f_{xx} + 2f_{xy} + f_{yy}) \quad \text{bzw.}$$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot (f_{xx} - 2f_{xy} + f_{yy}).$$

Es sei zunächst $f_{xx}(\bar{c}) = f_{yy}(\bar{c}) = 0$.

Wegen $D(\bar{c}) < 0$ ist dann $f_{xy}(\bar{c}) \neq 0$ und somit

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 2f_{xy}(\bar{c}), \quad \text{falls } h = k \quad \text{und}$$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} -2f_{xy}(\bar{c}), \quad \text{falls } h = -k.$$

Dies bedeutet, daß in jeder Umgebung von \bar{c} sowohl positive als auch negative Werte von $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$ auftreten. Folglich besitzt f in \bar{c} kein lokales Extremum.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, daß $f_{xx}(\bar{c}) \neq 0$ oder $f_{yy}(\bar{c}) \neq 0$.

Sei o.B.d.A. $f_{xx}(\bar{c}) \neq 0$. Dann erhält man für $k = 0$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot f_{xx}.$$

Für hinreichend nahe bei \bar{c} gelegene \bar{x} haben $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$ und $f_{xx}(\bar{c})$ das gleiche Vorzeichen.

Sei jetzt $h = -s \cdot f_{xy}(\bar{c})$ und $k = s \cdot f_{xx}(\bar{c})$ für „kleine“ $s \neq 0$. Dann gilt

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{s^2}{2} \left(f_{xy}^2(\bar{c}) \cdot f_{xx} - 2f_{xy}(\bar{c}) \cdot f_{xx}(\bar{c}) \cdot f_{xy} + f_{xx}^2(\bar{c}) \cdot f_{yy} \right).$$

Wegen $f \in C^2(U)$ gilt

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f(\bar{c}) &\xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{s^2}{2} \left(f_{xy}^2(\bar{c}) \cdot f_{xx}(\bar{c}) - 2f_{xy}^2(\bar{c}) \cdot f_{xx}(\bar{c}) + f_{xx}^2(\bar{c}) \cdot f_{yy}(\bar{c}) \right) \\ &= \frac{s^2}{2} \cdot f_{xx}(\bar{c}) \cdot \underbrace{\left(f_{xx}(\bar{c}) \cdot f_{yy}(\bar{c}) - f_{xy}^2(\bar{c}) \right)}_{< 0}. \end{aligned}$$

Folglich haben $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$ und $f_{xx}(\bar{c})$ unterschiedliches Vorzeichen, und damit besitzt f in \bar{c} kein lokales Extremum.

Den Fall $f_{yy}(\bar{c}) \neq 0$ beweist man durch ähnliche Überlegungen. \square

Die folgende Abbildung zeigt eine Funktion mit Sattelpunkt.

8/3/24

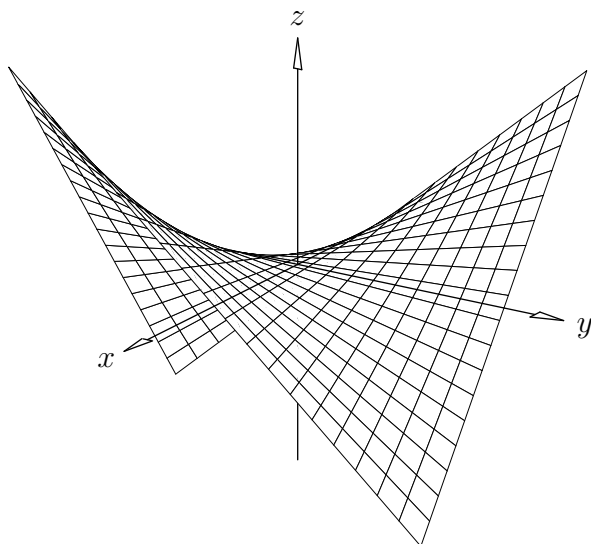


Abb. 8.11

In der Abbildung ist die Funktion $f(x, y) = -xy$ dargestellt. f besitzt in $(0, 0)$ einen Sattelpunkt. Der Graph der Funktion erzeugt eine sog. *Sattelfläche*.

In den Quadranten, in denen x und y jeweils nur positive bzw. nur negative Werte annehmen, ist die Funktion $f(x, y)$ stets negativ, in den Quadranten, wo jeweils ein Wert positiv und ein Wert negativ ist, ist die Funktion positiv. Entlang der x -Achse und der y -Achse ist die Funktion stets null.

Die dargestellte Fläche läßt sich offenbar allein durch Geraden erzeugen.

Wir fahren jetzt fort mit der Untersuchung unseres Beispiels. Hierzu benutzen wir das oben erhaltene Kriterium. 8/3/25

Offenbar sind die zweiten partiellen Ableitungen an der kritischen Stelle $(0, 0)$ stetig. Denn es ist

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 2,$$

und damit gilt

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{0}) & f_{xy}(\bar{0}) \\ f_{xy}(\bar{0}) & f_{yy}(\bar{0}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Wegen $f_{xx}(\bar{0}) = 2 > 0$ besitzt f in $\bar{0}$ ein lokales Extremum (vgl. auch Abb. 8.5 und Abb. 8.8 b).

Wir betrachten jetzt das Beispiel $f(x, y) = x^2 - y^2$. 8/3/26

Die folgende Abbildung zeigt diese Funktion; sie stellt ebenfalls eine Sattelfläche dar, die an der Stelle $(0, 0)$ einen Sattelpunkt besitzt.

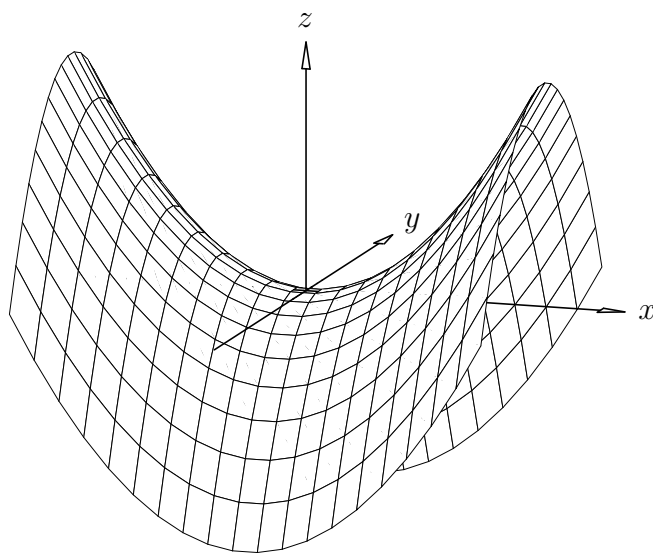


Abb. 8.12

Die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ besitzt an der Stelle $(0, 0)$ einen Sattelpunkt. Der Graph von f stellt eine Sattelfläche dar.

Es ist

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = -2y,$$

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = -2.$$

Dann ist $\bar{0}$ wieder ein kritischer Punkt von f , aber

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

folglich besitzt f in $\bar{0}$ einen Sattelpunkt.