

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.1 Konvergenz von Reihen

#### Beispiel. (Geometrische Reihe)

4/1/3

Sei  $|a| < 1$  und  $a \neq 0$ .

Dann konvergiert  $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$  gegen  $\frac{1}{1-a}$ ; ( $\sum a^i$  heißt *geometrische Reihe*).

**Beweis.** Für  $S_n = 1 + a + \cdots + a^n$  ist

$$\begin{aligned} S_n(1-a) &= (1 + \cdots + a^n)(1-a) = 1 + \cdots + a^n - (a + \cdots + a^{n+1}) \\ &= 1 - a^{n+1}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Damit ist der Wert der  $n$ -ten Partialsumme berechnet.

Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$  erhält man aus den Eigenschaften konvergenter Folgen (vgl. Beispiel 2 in Kapitel 3, vor dem Satz 3.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a^{n+1})}_{=1} = \frac{1}{1 - a}.$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1 - a}.$$

#### Beispiele.

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist nicht konvergent. (**Harmonische Reihe**)

4/1/30/3

Diese Reihe dient gleichzeitig als Beispiel dafür, daß eine konvergente Reihe nicht absolut konvergent sein muß. (vgl. Beispiel 1.)

Es sei  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ . Wir betrachten jetzt die  $2^n$ -te Partialsumme

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

und bilden

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}} - S_{2^n} &= \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^n + 2^n} \\ &\quad (\text{jeder dieser } 2^n \text{ Summanden ist größer oder gleich } \frac{1}{2^{n+1}}) \\ &\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{für beliebiges } n. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 S_{2^n} &= S_{2^0} - S_{2^0} + S_{2^1} - S_{2^1} + \cdots + S_{2^{n-1}} - S_{2^{n-1}} + S_{2^n} \\
 &= \underbrace{S_{2^0}}_{=1} + \underbrace{S_{2^1} - S_{2^0}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{S_{2^2} - S_{2^1}}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{S_{2^n} - S_{2^{n-1}}}_{\geq \frac{1}{2}} \\
 &\geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Die Teilfolge  $(S_{2^i})$  von  $(S_n)$  ist also unbeschränkt, und somit ist  $(S_n) = \sum \frac{1}{n}$  nicht konvergent.

Da  $(S_n)$  monoton wächst, ist  $\sum \frac{1}{n}$  bestimmt divergent gegen  $+\infty$ .

### Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 4

- Beispiele von konvergenten und divergenten Reihen, insbesondere geometrische und harmonische Reihe;

4/7/7
-------