

## Kapitel 9 Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

### 9.1 Das unbestimmte Integral

**Definition.** (*unbestimmtes Integral*)

9/1/6

Die Menge aller Stammfunktionen von  $f$  in einem Intervall  $I$  heißt *unbestimmtes Integral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.: } \int f(x) dx.$$

**Beispiele.**

4. Es soll nun  $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx$  berechnet werden.

9/1/21/4

Wir versuchen dies erneut mit der Partialbruchzerlegung. Hierzu machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Multipliziert man diese Gleichung (Gleichheit von Funktionen) mit der Nennerfunktion  $x^2(x^2+1)$ , dann entsteht eine Gleichung zwischen zwei Polynomen:

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x^2 \\ &= Ax^2 + A + Bx^3 + Bx + Cx^3 + Dx^2 \\ &= (B+C)x^3 + (A+D)x^2 + Bx + A. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man hieraus sofort:

$$A = 1, D = -A = -1, B = 0, C = 0.$$

Also

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx &= \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= -\frac{1}{x} - \arctan x + c. \end{aligned}$$