

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*monoton wachsend bzw. monoton fallend*)

3/1/31

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

- (1) (a_n) ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*)
 $\overline{\text{Df}}$ Für jedes n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$).
- (2) (a_n) ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*)
 $\overline{\text{Df}}$ Für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$).

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*Konvergenz von Reihen*)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\overline{\text{Df}}$ (S_n) konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann *Wert* oder *Limes der Reihe*.

Korollar 1. $\sum a_i$ konvergiert gdw für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für jedes $n \geq n_0$ und für jedes $k \geq 1$ gilt: $|a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$.

4/1/8

Satz 4.6 (*Leibniz-Kriterium*)

4/1/26

Ist $\sum a_i$ alternierend und $\lim a_i = 0$ und $(|a_i|)_{i=0,1,2,\dots}$ monoton fallend, dann ist $\sum a_i$ konvergent.

Beweis. Es sei o.B.d.A. $a_0 > 0$ (anderenfalls betrachten wir $a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ und $a_1 > 0$).

4/1/27

Weiterhin sei $|a_i| = \alpha_i$ (> 0). Dann ist $\lim \alpha_i = 0$ und $\sum a_i = \sum (-1)^i \cdot \alpha_i$.
 Folglich gilt:

$$\begin{aligned} |S_{n+k} - S_n| &= \left| (-1)^{n+1} \alpha_{n+1} + \dots + (-1)^{n+k} \cdot \alpha_{n+k} \right| \\ &= \left| (-1)^{n+1} (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} - \alpha_{n+4} \pm \dots + (-1)^{k-1} \alpha_{n+k}) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{|(-1)^{n+1}|}_{=1} \cdot |\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} - \alpha_{n+4} \pm \cdots + (-1)^{k-1} \alpha_{n+k}| \\
&= |\underbrace{\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}}_{\geq 0} + \underbrace{\alpha_{n+3} - \alpha_{n+4}}_{\geq 0} \pm \cdots + (-1)^{k-1} \alpha_{n+k}| := (\star)
\end{aligned}$$

In Abhängigkeit von k ist die Anzahl der Summanden α_i in (\star) gerade bzw. ungerade. Nach Voraussetzung ist die Folge (α_i) monoton fallend, also $\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} \geq 0, \dots$. Ist k gerade, dann kann man die Summanden in (\star) paarweise zusammenfassen, und es ist

$$(\star\star) := (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + (\alpha_{n+3} - \alpha_{n+4}) + \cdots + (\alpha_{n+k-1} - \alpha_{n+k}) \geq 0.$$

Ist k ungerade, dann bleibt bei der paarweisen Zusammenfassung α_{n+k} übrig, aber α_{n+k} ist offensichtlich nicht negativ. Folglich ist auch in diesem Fall $(\star\star) \geq 0$.

Andererseits ist

$$(\star\star) = \alpha_{n+1} - \underbrace{(\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3})}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(\quad)}_{\geq 0} \leq \alpha_{n+1}.$$

Insgesamt gilt also

$$0 \leq (\star\star) \leq \alpha_{n+1} \quad \text{und damit} \quad |S_{n+k} - S_n| = |(\star\star)| \leq \alpha_{n+1}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\alpha_n \rightarrow 0$ gibt es ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$:
 $|S_{n+k} - S_n| \leq \alpha_{n+1} < \varepsilon. \implies (S_n) = \sum a_i$ ist konvergent. \square