

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

#### 5.2 Stetigkeit

**Korollar** (*Zwischenwertsatz*)

5/2/23

Ist  $f$  in  $[a, b]$  stetig,  $d \in \mathbb{R}$  beliebig und  $f(a) < d < f(b)$  oder  $f(a) > d > f(b)$ , dann existiert ein  $c \in (a, b)$ , so daß  $f(c) = d$ .

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$

**Definition.** (*Beschränktheit*)

6/1/18

Es sei  $M \subseteq \mathbb{M}$ .

$M$  ist *beschränkt* (in  $\mathbb{M}$ )

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in \mathbb{M}$  und ein  $\varepsilon > 0$ , so daß  $M \subseteq U_\varepsilon(a)$

(d.h.,  $M$  ist in einer Kugel – mit endlichem Radius  $\varepsilon$  – enthalten; also für jedes  $x \in M$  gilt:

$\varrho(x, a) < \varepsilon$ ; vgl. Abb. 6.3)

**Definition.** (*abgeschlossene Menge*)

6/1/26

Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{M}$  ist *abgeschlossen*

$\overline{\text{Df}}$  Jeder Häufungspunkt von  $M$  gehört zu  $M$ .

#### 6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Satz 6.12** (*Zwischenwertsatz*)

6/3/7

Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $M \subseteq D(f)$ . Dann gilt:

Ist  $M$  bogenzusammenhängend und  $f$  stetig in  $M$  und sind  $\bar{a}, \bar{b} \in M$ , so daß  $f(\bar{a}) < d < f(\bar{b})$ , dann gibt es ein  $\bar{c} \in M$ , so daß  $f(\bar{c}) = d$ . (vgl. Abb. 6.12)

**Satz 6.13** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\bar{a} \in \mathbb{R}$ .

6/3/11

Ist  $f$  in  $\bar{a}$  stetig und  $f(\bar{a}) > 0$  (bzw.  $f(\bar{a}) < 0$ ), dann gibt es eine Umgebung  $U(\bar{a})$ , so daß  $f(\bar{x}) > 0$  (bzw.  $f(\bar{x}) < 0$ ) für alle  $\bar{x} \in U(\bar{a}) \cap D(f)$ .

**Satz 6.14** Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ist  $f$  in  $M$  stetig, und ist  $M$  beschränkt und abgeschlossen, dann ist auch  $f(M)$  beschränkt und abgeschlossen.

6/3/16

**Korollar.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

6/3/18

Ist  $f$  in  $[a, b]$  stetig, dann ist  $f$  in  $[a, b]$  beschränkt (und  $f([a, b])$  ist abgeschlossen.)

**Satz 6.15** (Satz von Weierstraß)

6/3/21

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $M \neq \emptyset$ . Dann gilt:

Ist  $f$  in  $M$  stetig und  $M$  beschränkt und abgeschlossen, dann existieren Minimum und Maximum von  $f$  in  $M$  (d.h., es gibt Elemente  $\bar{a}, \bar{b} \in M$ , so daß  $f(\bar{a}) = \min f(M)$  und  $f(\bar{b}) = \max f(M)$ ).

**Korollar.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a < b$ .

6/3/23

Ist  $f$  in  $[a, b]$  stetig, dann gilt:

- (1)  $f$  besitzt in  $[a, b]$  ein Minimum und ein Maximum  
(d.h., es existieren  $a', b' \in [a, b]$ , so daß  $f(a') = \max f([a, b])$  und  $f(b') = \min f([a, b])$ ).
- (2)  $f([a, b]) = [\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x)]$ .

**Satz 6.17** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $M \subseteq D(f)$ .

6/3/30

Ist  $f$  in  $M$  stetig und  $M$  beschränkt und abgeschlossen, dann ist  $f$  in  $M$  gleichmäßig stetig.

**Korollar.** Ist  $f$  in  $[a, b]$  stetig, dann ist  $f$  in  $[a, b]$  gleichmäßig stetig.

6/3/32

**Bemerkung.** Lipschitz-Stetigkeit  $\implies$  gleichmäßige Stetigkeit  $\implies$  Stetigkeit.

6/3/43

Die Umkehrung gilt in all diesen Fällen nicht.

**Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

6/3/44

Zunächst führen wir eine neue Bezeichnung ein: Eine in  $\mathbb{R}^n$  abgeschlossene und beschränkte Menge nennen wir auch *kompakt*.

Wir werden den Kompaktheitsbegriff später noch präzisieren und zeigen, daß er in  $\mathbb{R}^n$  genau mit der obigen Bezeichnung zusammenfällt.

- (1) In bogenzusammenhängenden Mengen haben stetige Funktionen die Zwischenwerteigenschaft.
- (2) Ist eine stetige Funktion  $f$  an einer Stelle  $a$  positiv bzw. negativ, dann gibt es eine ganze Umgebung  $U(a)$ , so daß  $f$  in  $U(a) \cap D(f)$  positiv bzw. negativ ist.
- (3) Ist  $M$  kompakt und  $f$  stetig in  $M$ , dann ist auch  $f(M)$  kompakt.
- (4) Stetige Funktionen besitzen in kompakten Mengen ( $\neq \emptyset$ ) ein Minimum und ein Maximum.
- (5) Funktionen, die in kompakten Mengen stetig sind, sind dort auch gleichmäßig stetig.
- (6) Lipschitz-Stetigkeit  $\implies$  gleichmäßige Stetigkeit  $\implies$  Stetigkeit.  
 $\Leftarrow$   $\Leftarrow$
- (7) Als wichtige Spezialfälle treten die entsprechenden Korollare für Funktionen einer Veränderlichen auf.