

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

#### 5.2 Stetigkeit

**Satz 5.2** Sei  $a \in D(f)$  und  $a$  ein Häufungspunkt von  $D(f)$ . Dann gilt:  
 $f$  ist in  $a$  stetig gdw  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existiert und  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

5/2/12

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

**Satz 9.16** (Erweiterter 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

9/5/4

Sei  $a < b$ , seien  $f, g$  in  $I = [a, b]$  integrierbar, und  $g$  wechsele in  $I$  nicht das Vorzeichen (d.h.,  $g(x) \geq 0$  für alle  $x \in I$  oder  $g(x) \leq 0$  für alle  $x \in I$ ).  
 Dann gibt es ein  $\mu \in \mathbb{R}$  mit  $\inf_{x \in I} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in I} f(x)$ , so daß

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \mu \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

**Satz 9.17** Ist  $f$  in  $I$  integrierbar und  $x \in I$ , dann ist die durch

9/5/9

$F(x) := \int_a^x f(t) dt$  definierte Funktion  $F$  in  $I$  stetig.

**Beweis.** Wir haben zu zeigen, daß  $f$  in jedem Punkt  $c \in I$  stetig ist, d.h., wenn  $x \rightarrow c$ , so  $F(x) \rightarrow F(c)$ . Es ist

9/5/10

$$\begin{aligned} F(x) - F(c) &= \int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_c^a f(t) dt \\ &= \int_c^x f(t) dt \\ &= \mu_{x,c} \cdot (x - c). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus dem erweiterten 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung, wobei  $\mu_{x,c}$  zwischen dem Infimum und dem Supremum der Funktion  $f$  in dem Intervall  $[c, x]$  bzw. in  $[x, c]$  liegt. Nach Voraussetzung ist  $f$  in  $I$  integrierbar, also auch beschränkt, folglich muß auch  $\mu_{x,c}$  in  $I$  beschränkt sein.

Wenn nun  $x \rightarrow c$ , so gilt auch  $\mu_{x,c} \cdot (x - c) \rightarrow 0$ , und damit auch  $F(x) - F(c) \rightarrow 0$ .  
 Folglich ist  $F$  in  $I$  stetig.  $\square$