

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Geordnetes Paar

1/0/6

$$(a, b) \stackrel{\text{Df}}{=} \{\{a, b\}, \{b\}\}.$$

Der Sinn dieser Definition ist nicht unmittelbar einsichtig. Er besteht vorwiegend darin, daß nur mengentheoretische Grundbegriffe verwendet werden und daß sich die folgende grundlegende Eigenschaft für geordnete Paare recht leicht nachweisen läßt:

$$(a, b) = (c, d) \text{ genau dann, wenn } a = c \text{ und } b = d.$$

Sinngemäß definiert man den Begriff des Tripels und schließlich induktiv den des n -Tupels:

$$(a, b, c) \stackrel{\text{Df}}{=} ((a, b), c), \quad (\text{Tripel})$$

$$(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \stackrel{\text{Df}}{=} ((a_1, \dots, a_n), a_{n+1}). \quad ((n+1)\text{-Tupel})$$

Kartesisches Produkt

1/0/7

$$M \times N \stackrel{\text{Df}}{=} \{(x, y) : x \in M \text{ und } y \in N\}. \quad (\text{Produkt zweier Mengen})$$

$$M_1 \times \dots \times M_n \stackrel{\text{Df}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n\}.$$

(Produkt endlich vieler Mengen)

Definition. (*Funktion* oder *Abbildung*)

1/0/14

(1) f ist eine *Funktion* (oder *Abbildung*)

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ Es existieren Mengen M und N , so daß $f \subseteq M \times N$, und für jedes $a \in M$ gibt es höchstens ein $b \in N$, so daß $(a, b) \in f$.
(Eine Funktion ist also eine spezielle Relation.)

(2) f ist eine *Funktion aus* M *in* N

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ $f \subseteq M \times N$ und für jedes $a \in M$ gibt es höchstens ein $b \in N$, so daß $(a, b) \in f$.

Bez.: $f : M \rightarrow N$.

(3) f ist eine *Funktion von* M *in* N

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ $f \subseteq M \times N$ und für jedes $a \in M$ existiert genau ein $b \in N$, so daß $(a, b) \in f$. (Jedes $a \in M$ bestimmt eindeutig ein gewisses $b \in N$.)

Bez.: $f(a) = b$.

In diesem Falle heißt M *Definitionsbereich* (oder *domain*) von f und

$$f(M) := \{b \in N : \text{es existiert ein } a \in M, \text{ so da\ss } b = f(a)\}$$

Wertebereich oder *Bild* (oder *image*) von f .

$$\mathbf{Bez.}: M = D(f) = \text{dom}(f) \quad \text{und} \quad f(M) = W(f) = \text{im}(f).$$

Für Abbildungen $f : M \rightarrow N$ gilt also im allgemeinen nur $D(f) \subseteq M$ und $W(f) \subseteq N$. N hei\ss t auch *Zielbereich* (oder *range*) von f .