

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Definition. (*Stammfunktion*)

9/1/1

Es seien f, F in einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ definiert.

F ist eine *Stammfunktion* von f in M

$\stackrel{\text{Df}}{=} F$ ist in M differenzierbar, und es gilt $F'(x) = f(x)$ für jedes $x \in M$.

Satz 9.1 Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f in einem Intervall I , dann unterscheiden sich F_1 und F_2 höchstens um eine additive Konstante.

9/1/2

(D.h., es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $F_1(x) = F_2(x) + c$ für jedes $x \in I$).

Bemerkung.

9/1/4

- (1) Ist F_1 eine Stammfunktion von f in I und ist $F_2(x) = F_1(x) + c$ für jedes $x \in I$, dann ist offenbar auch F_2 eine Stammfunktion von f in I .
- (2) Besitzt f überhaupt eine Stammfunktion in I und ist $x_0 \in I$, dann gibt es genau eine Stammfunktion F von f in I , so daß $F(x_0) = 0$.

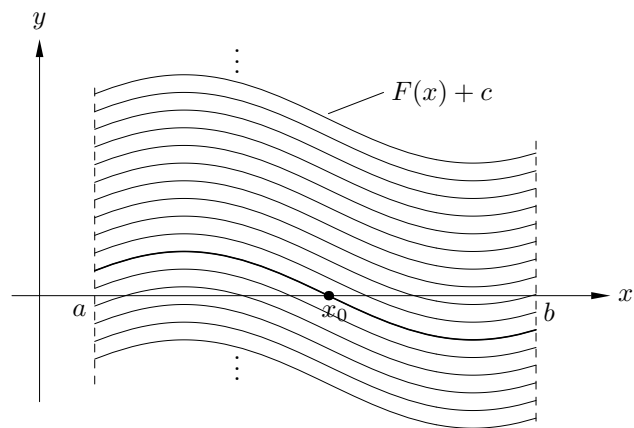


Abb. 9.3 Die Abbildung zeigt eine Schaar von Funktionen, die sich von F jeweils nur um eine additive Konstante unterscheiden. Ist F differenzierbar in $I = [a, b]$ und $F' = f$, dann symbolisiert diese Schaar die Menge aller Stammfunktionen von f in I , unter denen es für $x_0 \in I$ genau eine gibt, welche an der Stelle x_0 null wird.

Beweis zu (2). Ist F_1 eine beliebige Stammfunktion von f und $F_1(x_0) := c$, dann ist auch $F(x) = F_1(x) - c$ eine Stammfunktion, und es gilt $F(x_0) = F_1(x_0) - c = 0$. Ist F^* ebenfalls eine Stammfunktion von f mit $F^*(x_0) = 0$, dann unterscheiden sich F^* und F nur um eine additive Konstante, also $F^* - F = c'$. Folglich ist $F^*(x_0) - F(x_0) = 0 = c'$.

9/1/5

Für diese – durch $x_0 \in I$ eindeutig bestimmte – Stammfunktion F benutzen wir folgende Bezeichnungen:

$$\text{Bez.: } F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt := \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Aus drucktechnischen Gründen schreiben wir für $\int_{x_0}^x \dots$ auch $\int_{x_0}^x \dots$.

Offenbar gilt $F'(x) = \left(\int_{x_0}^x f(x) \, dx \right)' = f(x)$.