

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

**Korollar.** Es sei  $I$  ein Intervall mit  $a \in I$ ,  $f$  sei in  $I$  beliebig oft differenzierbar, und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$ , wobei  $p_n(x)$  das Taylorpolynom und  $R_n(x)$  das Lagrange'sche Restglied in der Taylorschen Formel ist (siehe Satz 7.11). 7/2/12

Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  für jedes  $x \in I$ , dann konvergiert die Folge  $(p_n(x))$  der Partialsummen der Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$  gegen  $f(x)$ .

(Unter den angegebenen Voraussetzungen läßt sich  $f$  in eine sog. Taylorreihe entwickeln, d.h.,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i.)$$

**Bemerkung.**  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$  heißt Taylorreihe von  $f(x)$  in  $a$ . 7/2/14

Für  $a = 0$  heißt die Reihe auch Mac Laurin'sche Reihe.

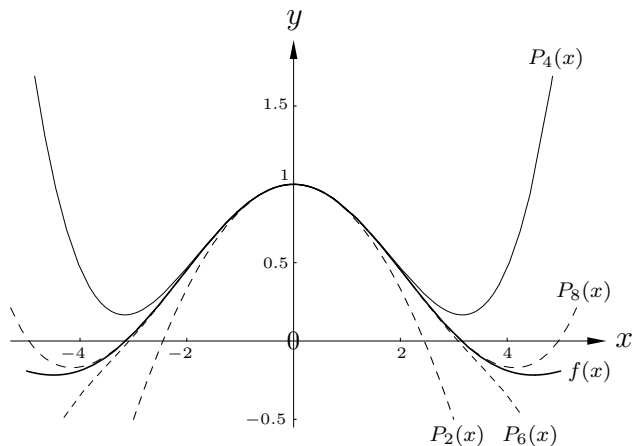


Abb. 7.8 Die Abbildung zeigt die Funktion  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  und ihre Taylorpolynome  $P_n(x)$  für  $n = 2, 4, 6, 8$ . Es ist deutlich zu erkennen, daß mit wachsendem  $n$  die Funktion  $f(x)$  durch  $P_n(x)$  immer besser angenähert wird. Es ist  $P_8(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!}$ . Man überlegt sich leicht, daß stets  $P_n(x) = P_{n-1}(x)$  ist.

Die Taylorreihe von  $f$  läßt sich (formal) schon immer dann bilden, wenn  $f$  in  $I$  beliebig oft differenzierbar ist. Aber nur wenn auch  $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  gilt, dann stellt die Taylorreihe die Funktion  $f$  dar.

Wir betrachten jetzt ein Beispiel, in dem  $f$  beliebig oft differenzierbar ist, aber

$$f(x) \neq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i.$$

**Beispiele.**

1. Es sei  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$

7/2/15/1

Man kann leicht zeigen, daß  $f$  in einer Umgebung von 0 beliebig oft differenzierbar ist. (Induktiv beweist man, daß die  $n$ -te Ableitung für  $x \neq 0$  immer die Gestalt  $e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot r(x)$  hat, wobei  $r(x)$  eine rationale Funktion ist, und die  $(n+1)$ -te Ableitung für  $x = 0$  existiert und 0 ist.) Folglich gilt stets  $f^{(n)}(0) = 0$ , und damit

$$\underbrace{f(x)}_{\neq 0} \neq \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(i)}(0)}{i!}}_{=0} \cdot (x-0)^i = 0.$$

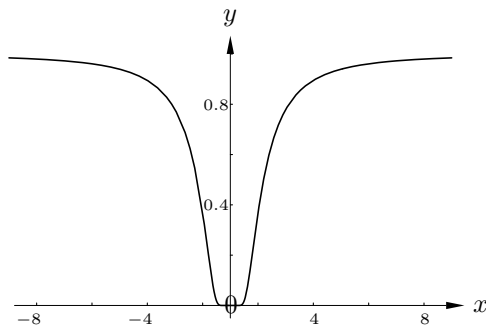


Abb. 7.9 a

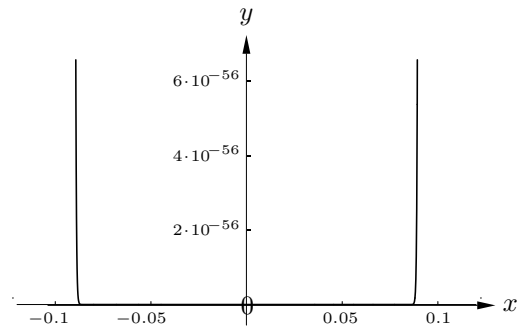


Abb. 7.9 b

Die Abbildung 7.9 a zeigt die Funktion  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ , für  $x \neq 0$ , und  $f(0) = 0$ . In einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 schmiegt sich diese Funktion der  $x$ -Achse so gut an, daß alle Ableitungen von  $f(x)$  in 0 stets null werden. Abb. 7.9 b zeigt die gleiche Funktion in einer solchen Umgebung.