

## Kapitel 8

# Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

## 8.1 Differenzierbarkeit

### Beispiel.

8/1/23

Es sei  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Gesucht ist die Gleichung der Tangentialebene von  $f$  an der Stelle  $\bar{c} = (1, 1)$ .

(vgl. Abb. 8.5; ein weiteres Beispiel für die Darstellung einer Funktion und der Tangentialebene an einer Stelle ist in den Abb. 8.6 a und 8.6 b gegeben.)

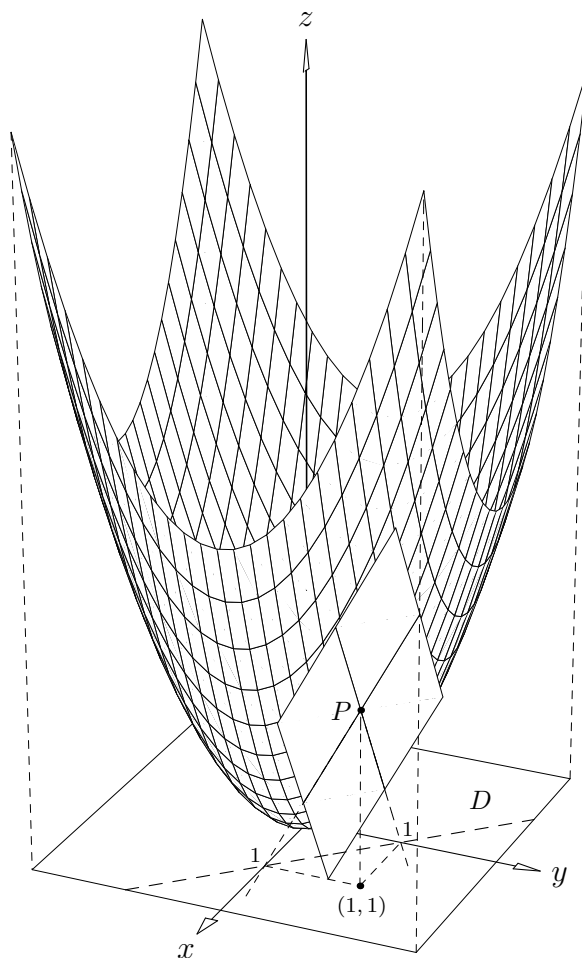


Abb. 8.5 Die Abbildung zeigt die Funktion  $f(x, y) = x^2 + y^2$  mit dem Definitionsbereich  $D := [-2, 2] \times [-2, 2]$  und der Tangentialebene an der Stelle  $(1, 1)$  bzw. im Punkt  $P := (1, 1, 2)$ . Das „Kreuz“ in der Tangentialebene entsteht durch die Tangenten an den entsprechenden Kurven im Punkt  $P$  in Richtung der Achsen. Die dicker gestrichelte Linie symbolisiert den Schnitt der Tangentialebene mit der durch  $D$  gegebenen Ebene.

Es ist

$$f(1, 1) = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} z = t(x, y) &= f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \cdot (x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \cdot (y - 1) \\ &= 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1). \end{aligned}$$

Die Ebene geht durch die drei Punkte  $(1, 1, 2), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ , wodurch die Ebene schon eindeutig bestimmt ist.

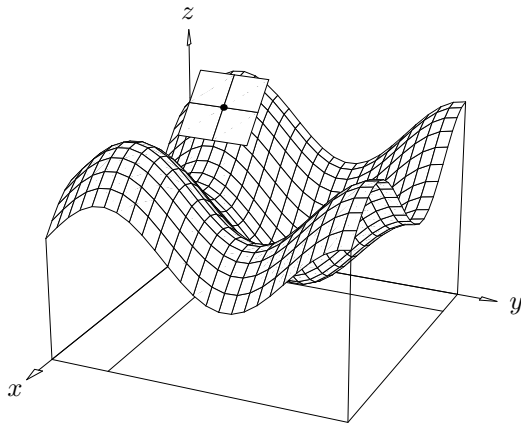


Abb. 8.6 a

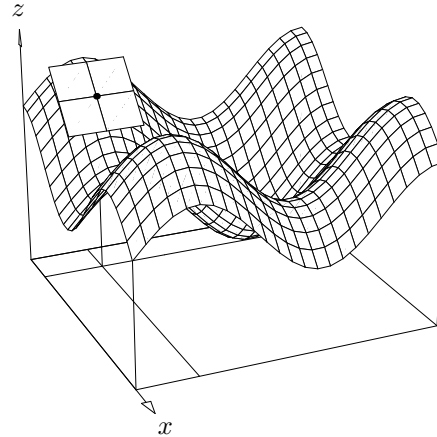


Abb. 8.6 b

In den Abbildungen ist die Funktion  $f(x, y) = \cos x + \sin y + 3$  mit dem Definitionsbereich  $D := [0, \frac{5}{2}\pi] \times [0, \frac{5}{2}\pi]$  aus zwei verschiedenen Perspektiven dargestellt. Die Tangentialebene wird an der Stelle  $(\frac{3}{8}\pi, \frac{1}{2}\pi)$  betrachtet.

## Beispiele.

### (2) Transformation in Polarkoordinaten

8/1/35/2

Bei der Lösung mathematischer Probleme, insbesondere in der Physik, der Technik und den Naturwissenschaften überhaupt, ist es oft vorteilhaft, die zu behandelnden Probleme mit Hilfe besonders geeigneter Koordinatensysteme zu beschreiben oder vom kartesischen Koordinatensystem zu einem anderen überzugehen. Da dieser Übergang häufig mit der Verkettung von Funktionen und die Lösung der anstehenden Probleme oft mit der Differenzierbarkeit der Verkettung verbunden ist, wollen wir hier einige wichtige nicht-kartesische Koordinatensysteme behandeln. Zunächst betrachten wir die sog. *Polarkoordinaten*, die schon bei der Behandlung der trigonometrischen Funktionen in Kapitel 5 (vgl. Abb. 5.21) eine gewisse Rolle spielten.

Es sei  $P = (a, b) \neq (0, 0)$  ein Punkt in der euklidischen Ebene, die mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen ist, dessen Achsen mit  $x$  bzw.  $y$  bezeichnet werden. Offenbar läßt sich der Punkt  $(a, b)$  auch eindeutig durch das Paar  $(r, \varphi)$  beschreiben,

wobei  $r$  der Abstand von  $(a, b)$  zum Nullpunkt ist und  $\varphi$  den Winkel zwischen der  $x$ -Achse und der Verbindungsstrecke von  $(0, 0)$  nach  $(a, b)$  angibt ( $\varphi$  in Bogenmaß gemessen). Damit ist der gleiche Punkt  $P$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  durch unterschiedliche Koordinatensysteme eindeutig beschrieben worden (vgl. Abb. 8.7).

$a, b$  sind die kartesischen Koordinaten von  $P$ , und  $r, \varphi$  heißen *Polarkoordinaten*.

(Der Nullpunkt ist mit Hilfe der Polarkoordinaten nicht eindeutig darstellbar, da der Winkel  $\varphi$  hierfür beliebig sein könnte.)

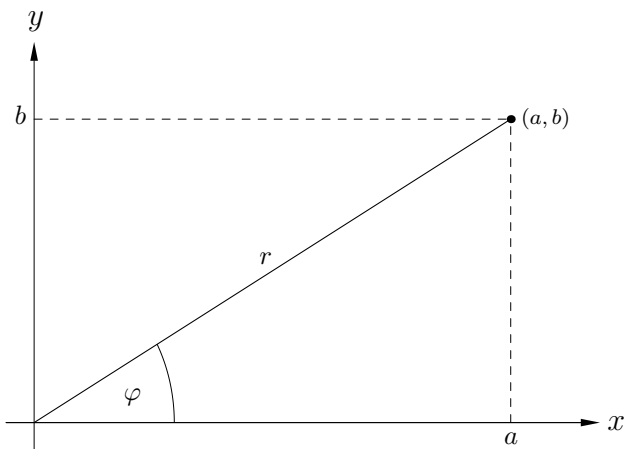


Abb. 8.7 Der Punkt  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  ist mit Hilfe von Polarkoordinaten dargestellt.  $r$  bezeichnet den Abstand zwischen  $(0, 0)$  und  $(a, b)$ .

Nach Voraussetzung gilt also

$$a = r \cdot \cos \varphi := g_1(r, \varphi)$$

und

$$b = r \cdot \sin \varphi := g_2(r, \varphi).$$

Betrachtet man den Punkt  $P$  als variabel,  $(a, b) := (x, y)$ , dann erhält man eine Abbildung

$$g(r, \varphi) := (g_1(r, \varphi), g_2(r, \varphi)) = (x, y),$$

also

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \text{und} \quad 0 \leq r < \infty.$$

Wir betrachten jetzt ein Beispiel einer Funktion in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten.

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , wobei der Definitionsbereich von  $f$  ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $(0, 0)$  und dem Radius  $R$  sein soll, also  $D(f) := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .

Wir stellen jetzt  $f$  in Polarkoordinaten dar. Für

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

und

$$x = r \cdot \cos \varphi := g_1(r, \varphi), \quad y = r \cdot \sin \varphi := g_2(r, \varphi)$$

ist

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(g_1(r, \varphi), g_2(r, \varphi)) = \left(g_1(r, \varphi)\right)^2 + \left(g_2(r, \varphi)\right)^2 = \\ &= r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} = r^2. \end{aligned}$$

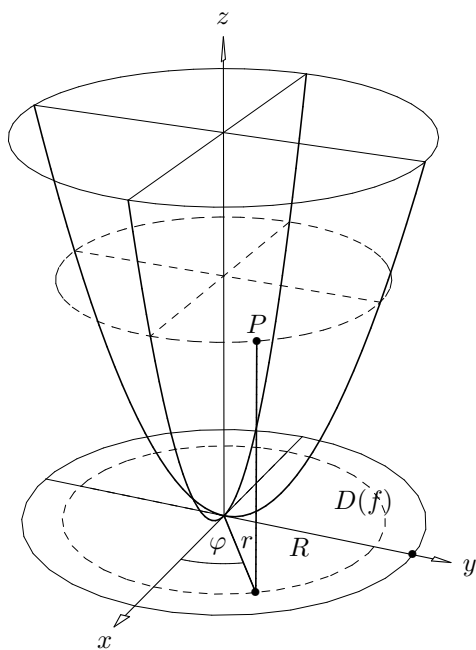


Abb. 8.8 a

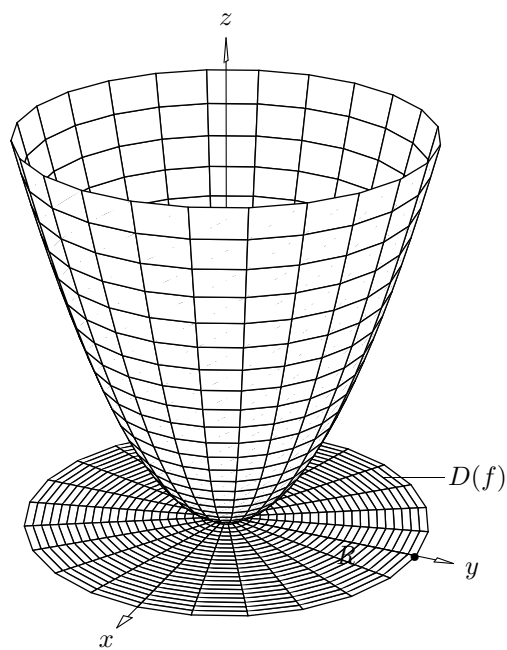


Abb. 8.8 b

In der Abb. 8.8 a ist der Punkt  $P = (x, y, f(x, y))$  mit Hilfe von Polarkoordinaten dargestellt. In diesem Koordinatensystem ist  $P$  durch  $(r, \varphi, r^2)$  gegeben.

Abb. 8.8 b verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Definitionsbereich und Graph der Funktion  $z = f(x, y)$  in Polarkoordinaten. In beiden Fällen wurde als Definitionsbereich ein Kreis mit dem Radius  $R$  gewählt.

Man vergleiche auch Abb. 8.5, in der dieselbe Funktion dargestellt wird, wobei jedoch der Definitionsbereich ein Rechteck ist.

Insgesamt haben wir

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \implies f \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Also

$$(f \circ g)(r, \varphi) = f(g(r, \varphi)) = f(g_1(r, \varphi), g_2(r, \varphi)) = r^2.$$

Die Ableitung der verketteten Funktion ergibt sich wie folgt:

$$(f \circ g)'(r, \varphi) = f'(g(r, \varphi)) \cdot g'(r, \varphi),$$

$$f'(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = (2x, 2y),$$

$$g'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} (r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Folglich gilt

$$(f \circ g)'(r, \varphi) = f'(g(r, \varphi)) \cdot g'(r, \varphi) =$$

$$(2r \cos \varphi, 2r \sin \varphi) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} =$$

$$(2r \cos \varphi \cdot \cos \varphi + 2r \sin \varphi \cdot \sin \varphi, -2r \sin \varphi \cdot r \sin \varphi + 2r \sin \varphi \cdot r \cos \varphi) =$$

$$(2r, 0).$$

Wir berechnen jetzt die Determinante der Funktionalmatrix von  $g(r, \varphi)$ .

$$\det \left( \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(r, \varphi)}(r, \varphi) \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

### 8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

**Beispiel.**

8/3/20

Sei  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Wir berechnen die kritischen Stellen von  $f$ . Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x = 0 \implies x = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y = 0 \implies y = 0.$$

Die einzige kritische Stelle ist  $(0, 0)$ . Höchstens dort kann  $f$  ein lokales Extremum besitzen.

**Satz 8.14** (Hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums)

8/3/22

Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$  und  $f$  sei in einer Umgebung von  $\bar{c}$  zweimal stetig differenzierbar.

Weiterhin sei  $\bar{c}$  ein kritischer Punkt von  $f$  und  $D = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{c}) & f_{xy}(\bar{c}) \\ f_{xy}(\bar{c}) & f_{yy}(\bar{c}) \end{vmatrix}$ .

Dann gilt:

- (1) Ist  $D > 0$ , dann besitzt  $f$  in  $\bar{c}$  ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Minimum, falls  $f_{xx}(\bar{c}) > 0$  und ein lokales Maximum, falls  $f_{xx}(\bar{c}) < 0$ .
- (2) Ist  $D < 0$ , dann besitzt  $f$  in  $\bar{c}$  einen sog. Sattelpunkt (das ist ein kritischer Punkt, in dem die betrachtete Funktion weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum besitzt; vgl. Abb. 8.11).
- (3) Ist  $D = 0$ , dann läßt sich (allein mit Hilfe der zweiten partiellen Ableitungen) noch keine Aussage treffen.

Wir fahren jetzt fort mit der Untersuchung unseres Beispiels. Hierzu benutzen wir das oben erhaltene Kriterium.

8/3/25

Offenbar sind die zweiten partiellen Ableitungen an der kritischen Stelle  $(0, 0)$  stetig. Denn es ist

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 2,$$

und damit gilt

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{0}) & f_{xy}(\bar{0}) \\ f_{xy}(\bar{0}) & f_{yy}(\bar{0}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Wegen  $f_{xx}(\bar{0}) = 2 > 0$  besitzt  $f$  in  $\bar{0}$  ein lokales Extremum (vgl. auch Abb. 8.5 und Abb. 8.8b).