

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition. (*rechtsseitig bzw. linksseitig stetig*)

6/3/46

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *rechtsseitig* (bzw. *linksseitig*) *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \geq a$ (bzw. $x \leq a$) gilt:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definition. (*rechtsseitiger bzw. linksseitiger Grenzwert*)

6/3/48

Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a) := D(f) \cap \{x : x > a\}$

bzw. von $D_l(f, a) := D(f) \cap \{x : x < a\}$.

f besitzt an der Stelle a (oder in a) den *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen Grenzwert* c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D_r(f, a)$ bzw. für jedes $x \in D_l(f, a)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

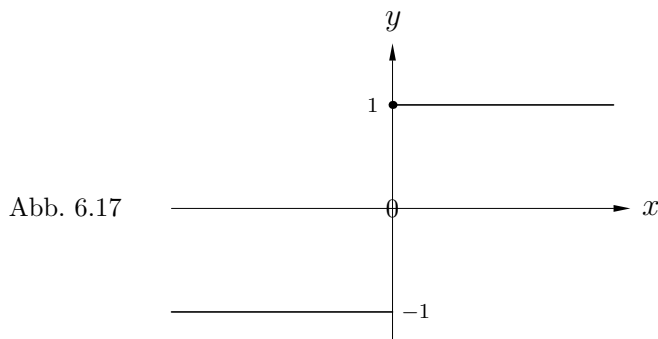
Bez.: $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = c$ bzw.

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = c$

Beispiel.

6/3/49

Sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \geq 0, \\ -1, & \text{für } x < 0. \end{cases}$



An der Stelle $a = 0$ ist f rechtsseitig, aber nicht linksseitig stetig.

Nach Definition ist $f(0) = 1$. Sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig und z.B. $\delta = \varepsilon$.

Dann gilt:

Für jedes $x \in D_r(f, 0)$ (also $x > 0$) mit der Eigenschaft $|x - 0| < \delta$ ist

$\underbrace{|f(x) - f(0)|}_{=1} = 0 < \varepsilon$.

Aber z.B. für $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig gilt:

Wenn $x \in D_l(f, 0)$ (also $x < 0$), so ist $\underbrace{|f(x)|}_{=-1} - \underbrace{|f(0)|}_{=1} = |-2| \geq \varepsilon$.

Andererseits besitzt f jedoch einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Grenzwert: 1 bzw. -1 , die voneinander verschieden sind, und außerdem ist der linksseitige Grenzwert von f an der Stelle 0 verschieden von dem Funktionswert $f(0)$.