

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Nullfolge*)

3/1/7

Eine Folge (a_n) heißt *Nullfolge*
 $\stackrel{\text{Df}}{=} (a_n)$ konvergiert gegen 0.

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*Konvergenz von Reihen*)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$ konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann *Wert* oder *Limes der Reihe*.

Beispiel. (*Geometrische Reihe*)

4/1/3

Sei $|a| < 1$ und $a \neq 0$.

Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ gegen $\frac{1}{1-a}$; ($\sum a^i$ heißt *geometrische Reihe*).

Beweis. Für $S_n = 1 + a + \cdots + a^n$ ist

$$\begin{aligned} S_n(1-a) &= (1 + \cdots + a^n)(1-a) = 1 + \cdots + a^n - (a + \cdots + a^{n+1}) \\ &= 1 - a^{n+1}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Damit ist der Wert der n -ten Partialsumme berechnet.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$ erhält man aus den Eigenschaften konvergenter Folgen (vgl. Beispiel 2 in Kapitel 3, vor dem Satz 3.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a^{n+1})}_{=1} = \frac{1}{1 - a}.$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1 - a}.$$

Definition. (*absolute Konvergenz*)

4/1/15

$\sum a_i$ ist *absolut konvergent* $\iff \sum |a_i|$ ist konvergent.

Definition. (*Minorante, Majorante*)

4/1/31

Es seien $\sum a_i, \sum b_i$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern.

$\sum a_i$ heißt *Minorante von* $\sum b_i$ und gleichzeitig heißt $\sum b_i$ *Majorante von* $\sum a_i$ $\iff a_i \leq b_i$ für alle i .

Satz 4.8 (*Majorantenkriterium*)

4/1/32

Es seien $\sum a_i, \sum b_i$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei $\sum b_i$ eine Majorante von $\sum a_i$. Dann gilt:

- (1) Ist $\sum b_i$ konvergent, so ist auch $\sum a_i$ konvergent.
- (2) Ist $\sum a_i$ divergent, so ist auch $\sum b_i$ divergent.

4.4 Potenzreihen

Satz 4.19 Es seien $a_n, a \in \mathbb{C}$.

4/4/7

- (1) Ist $\sum a_n(x-a)^n$ an einer Stelle $x = x_0$ konvergent, dann ist $\sum a_n(x-a)^n$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-a| < |x_0-a|$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\sum a_n(x-a)^n$ an einer Stelle $x = x_1$ divergent, dann ist $\sum a_n(x-a)^n$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-a| > |x_1-a|$ divergent.

Beweis. (1). Ist $x_0 = a$, dann existiert kein x mit $|x-a| < |x_0-a|$. Damit ist die Behauptung trivialerweise erfüllt.

4/4/8

Es sei jetzt $x_0 \neq a$. Nach Voraussetzung ist die Reihe in x_0 konvergent. Folglich ist $(a_n(x_0-a)^n)$ eine Nullfolge, und somit ist $|a_n(x_0-a)^n| \leq 1$ für fast alle n .

Sei x jetzt beliebig aber fixiert mit der Eigenschaft $|x-a| < |x_0-a|$. Dann gilt

$$0 \leq \frac{|x-a|}{|x_0-a|} := q < 1.$$

Hieraus konstruieren wir eine konvergente Majorante für $\sum |a_n(x-a)^n|$. Es ist

$$|a_n(x-a)^n| = \left| a_n \cdot \frac{(x-a)^n}{(x_0-a)^n} \cdot (x_0-a)^n \right| =$$
$$\underbrace{|a_n(x_0-a)^n|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left| \frac{(x-a)^n}{(x_0-a)^n} \right|}_{=q^n} \leq q^n \quad \text{und} \quad 0 \leq q < 1.$$

$\sum q^n$ ist als geometrische Reihe für $|q| < 1$ konvergent, folglich ist $\sum q^n$ eine konvergente Majorante von $\sum |a_n(x-a)^n|$. Daher ist $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent für x .

(2). Sei $|x-a| > |x_1-a|$ und $\sum a_n(x_1-a)^n$ divergent. Wäre $\sum a_n(x-a)^n$ konvergent, dann wäre $\sum a_n(x_1-a)^n$ nach (1) absolut konvergent. ~~$\mathcal{N}!$~~ \square