

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen ist die *vollständige Induktion*. Sie beruht auf dem

Induktionsaxiom:

Es sei E eine Eigenschaft für natürliche Zahlen n . Dann gilt

$$E(0) \wedge \forall n (E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m E(m).$$

Um die Aussage $\forall m E(m)$ zu beweisen, genügt es:

1. $E(0)$ zu zeigen (*Anfangsschritt*) und
2. $\forall n (E(n) \rightarrow E(n+1))$ nachzuweisen (*Induktionsschritt*).

Bei der Eigenschaft 2. betrachtet man ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und zeigt:

Wenn $E(n)$, so $E(n+1)$.

$E(n)$ heißt *Induktionsvoraussetzung*, $E(n+1)$ *Induktionsbehauptung*.

Eigentlich müßte beim Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Fall (a): $E(n)$ ist falsch.

Dann ist die Implikation $E(n) \rightarrow E(n+1)$ aber trivialerweise richtig. Daher läßt man diesen Fall im Induktionsbeweis in der Regel weg und betrachtet nur noch

Fall (b): $E(n)$ ist richtig.

Unter dieser Voraussetzung ist dann die Gültigkeit von $E(n+1)$ zu zeigen.

Achtung: Häufig findet man bei „Anfängern“ die folgende falsche Formulierung im Induktionsschritt:

„Für beliebiges n wird vorausgesetzt, daß $E(n)$ schon gilt.“

Wer dies so formuliert, hat die Behauptung bereits vorausgesetzt.

Modifikationen des Induktionsaxioms

1/0/24

- (1) Es sei k eine natürliche Zahl.

$$E(k) \wedge \forall n (k \leq n \wedge E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m (k \leq m \rightarrow E(m)).$$

- (2) Es seien k, l natürliche Zahlen mit $k < l$.

$$E(k) \wedge \forall n (k \leq n < l \wedge E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m (k \leq m \leq l \rightarrow E(m)).$$

- (1) liefert das Beweisprinzip von $E(n)$ für alle $n \geq k$ und (2) das von $E(n)$ für alle n mit $k \leq n \leq l$.