

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

**Satz 7.12** (Regel von de l'Hospital für „ $\frac{0}{0}$ “)

7/3/0

Voraussetzung:

- (1) Sei  $a < b$  und seien  $f, g$  in  $(a, b)$  differenzierbar und in  $a$  (rechtsseitig) stetig.
- (2) Sei  $f(a) = g(a) = 0$  und  $g'(x) \neq 0$  für jedes  $x \in (a, b)$ .

Behauptung:

Existiert  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$ , dann existiert  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , und es ist  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**Bemerkung.**

7/3/6

(1) Der Beweis läßt sich nicht unmittelbar auf den Fall „ $\frac{0}{0}$ “ zurückführen, denn differenziert man in  $\left(\frac{1}{g}\right)/\left(\frac{1}{f}\right)$  Zähler und Nenner, dann kommen in der jeweiligen Ableitung  $f^2$  bzw.  $g^2$  vor, und über das Grenzverhalten des entsprechenden Quotienten dieser Funktionen weiß man nicht Bescheid.

(2) Satz 7.12 und die Korollare 1 und 2 können analog auf die folgenden Fälle übertragen werden:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \pm\infty.$$

(3) Häufig läßt sich der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  leichter bestimmen als  $\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{g(x)}$ .  
Daher sind die oben angegebenen Regeln oft sehr hilfreich bei der Berechnung solcher Limites.

(4) Einen Ausdruck der Form „ $0 \cdot \infty$ “ kann man in eine der Formen „ $\frac{0}{0}$ “ oder „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ überführen.

Denn wenn  $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \dots} g(x) = \infty$ , so ist

$$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

falls diese Limites existieren.

(5) Ausdrücke der Form „ $0^0$ “, „ $\infty^0$ “ und „ $1^\infty$ “ lassen sich auf die vorhergehenden Fälle zurückführen, indem man die Definition der Potenzfunktion mit Hilfe des natürlichen Logarithmus ausnutzt:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Wenn  $f(x) \searrow 0$ , so  $\ln f(x) \rightarrow -\infty$ ,

wenn  $f(x) \rightarrow \infty$ , so  $\ln f(x) \rightarrow \infty$ ,

wenn  $f(x) \rightarrow 1$ , so  $\ln f(x) \rightarrow 0$ .

Man versucht zunächst, den Grenzwert des Exponenten in  $e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$  zu bestimmen. Mit diesem Wert erhält man dann wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion den Grenzwert von  $f(x)^{g(x)}$ .

## Beispiele.

2. Es sei  $f(x) = (e^x - 1)^2$  und  $g(x) = x^2$ .

7/3/7/2

Man berechne  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

Es ist

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\left((e^x - 1)^2\right)'}{(x^2)'} = \frac{(e^x - 1) \cdot e^x}{x}.$$

Den Grenzwert dieses Quotienten kann man noch nicht unmittelbar auswerten, da Zähler und Nenner wieder gegen null streben. Daher versuchen wir, die Regel auf den neu entstandenen Quotienten noch einmal anzuwenden, da er die Voraussetzungen der Regel von de l'Hospital erfüllt.

$$\frac{\left((e^x - 1) \cdot e^x\right)'}{(x)'} = \frac{e^x \cdot e^x + (e^x - 1) \cdot e^x}{1} = 2e^{2x} - e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2 - 1 = 1.$$

Also

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**Achtung!** Die Regeln dürfen nicht „formal“ angewendet werden, man hat immer zu überprüfen, ob die Voraussetzungen zur Anwendung einer Regel erfüllt sind.

Betrachtet man z.B. die Funktionen  $f(x) = e^x - 1$  und  $g(x) = x^2$  und geht man formal vor bei der Bestimmung des Grenzwertes  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$ , dann berechnet man zunächst die Ableitungen der Zähler- und Nennerfunktion und erhält  $f'(x) = e^x$  und  $g'(x) = 2x$ . Der Nenner strebt wieder gegen null, aber nicht der Zähler. Wenn man jetzt die Regel abermals (aber falsch) anwendet, also Zähler- und Nennerfunktion noch einmal differenziert, dann erhält man  $f''(x) = e^x$  und  $g''(x) = 2$ . Damit existiert  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{2}$ ,

aber da die Voraussetzungen für  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  nicht erfüllt waren, gilt nicht

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$