

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung*)

8/1/1

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

f ist in \bar{c} differenzierbar (oder total differenzierbar)

$\stackrel{\text{Def}}{=} f$ ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert, und es existiert eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $o(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0}, \text{ so daß für jedes } \bar{x} \in U(\bar{c}) \text{ gilt: } f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x}).$$

Die Matrix A heißt dann 1. Ableitung von f an der Stelle \bar{c} .

Bez.: $A := f'(\bar{c})$.

Das Wesen der Differenzierbarkeit besteht auch hier in der linearen Approximierbarkeit einer Funktion f in einer Umgebung $U(\bar{c})$; d.h., f läßt sich in $U(\bar{c})$ darstellen als $f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ plus einem Rest $o(\bar{x})$, der in $U(\bar{c})$ „klein“ ist, wobei hier 'klein' bedeuten soll, daß $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0} \quad (\in \mathbb{R}^m)$.

8/1/3

Durch $\bar{y} = A(\bar{x} - \bar{c})$ wird eine Punktmenge in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ beschrieben.

Die durch $\bar{y} := t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ definierte Punktmenge heißt *Tangentialebene* von f an der Stelle \bar{c} , und $t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ heißt *Gleichung der Tangentialebene*.

Der Punkt $(\bar{c}, f(\bar{c}))$ erfüllt diese Gleichung, d.h., er liegt in der Tangentialebene.

Der Anteil $A(\bar{x} - \bar{c})$ von der Funktion $t(\bar{x})$ heißt *Differential* (oder 1. Differential) von f in \bar{c} .

Wir werden auf diese Begriffe noch einmal zurückkommen, insbesondere im Zusammenhang mit der Berechnung und Darstellung der Ableitung und damit auch der Tangentialebene und des Differentials.

Um die Analogie bei der Differenzierbarkeit von Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher besser zu veranschaulichen, betrachten wir die folgenden beiden Spezialfälle.

Für $n = m = 1$ (also $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$) definiert $t(x) = f(c) + \underbrace{A}_{:=b}(x - c)$ eine

Gerade in $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, die Tangente von f an der Stelle c .

Für $n = 2, m = 1$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$ wird durch $t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ eine Ebene in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ bestimmt, die offenbar den Punkt $(\bar{c}, f(\bar{c}))$ enthält. In diesem Fall ist der Begriff „Tangentialebene“ wörtlich zu nehmen.

Wir haben bereits die Ableitung einer Funktion mit mehreren Veränderlichen definiert, wir haben aber noch kein praktikables Verfahren, um die Ableitung einer konkreten Funktion zu berechnen. Dazu betrachten wir zunächst Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und definieren den Begriff der partiellen Ableitbarkeit.

Definition. (*partielle Ableitung*)

8/1/4

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert.
 f ist in \bar{c} *partiell nach x_i differenzierbar* ($i = 1, \dots, n$)

$\overline{\text{Df}}$ Die Funktion $\varphi(x_i) := f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$ ist (als Funktion der einen Veränderlichen x_i) an der Stelle c_i differenzierbar.

Nach der früheren Differenzierbarkeitsdefinition bedeutet dies, daß die folgenden Limites existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(c_i + h) - \varphi(c_i)}{h}, \quad \text{für } h := x_i - c_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - f(\bar{c})}{x_i - c_i}. \end{aligned}$$

Der Limes selbst (falls er existiert) heißt *partielle Ableitung* von f nach x_i an der Stelle \bar{c} (oder kurz: in \bar{c}).

$$\text{Bez.: } \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = f_{x_i}(\bar{c}).$$

Definition. (*Richtungsableitung*)

8/1/7

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert.

Weiterhin sei $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ und $|\bar{r}| = 1$.

f ist an der Stelle \bar{c} *in Richtung \bar{r} differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$ Die Funktion $\varphi(h) := f(\bar{c} + h \cdot \bar{r})$ ist (als Funktion der einen Veränderlichen h) an der Stelle 0 differenzierbar;

$$\text{d.h., es existiert } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{c} + h \cdot \bar{r}) - f(\bar{c})}{h}.$$

Der Limes heißt dann *Richtungsableitung* von f an der Stelle \bar{c} in Richtung \bar{r} .

$$\text{Bez.: } \frac{\partial f}{\partial \bar{r}}(\bar{c}) = f_{\bar{r}}(\bar{c}).$$

8.2 Partielle Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung

Bemerkung.

8/2/4

Ist $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ und existieren in einer Umgebung $U(\bar{c})$ die partiellen Ableitungen f_{x_i} , f_{x_j} und $f_{x_i x_j}$ und ist $f_{x_i x_j}$ in \bar{c} stetig, dann existiert auch $f_{x_j x_i}$ in \bar{c} , und es ist $f_{x_i x_j}(\bar{c}) = f_{x_j x_i}(\bar{c})$.

Den Beweis hierzu führt man leicht auf den vorhergehenden Satz zurück.

Wir befassen uns jetzt mit *Differentialen höherer Ordnung*.

Dazu sei $f(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Das 1. Differential wurde als Funktion $df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die sich darstellen läßt in der Form

$$df := \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

wobei die dx_i als konstant anzusehen sind.

Wir berechnen (definieren) jetzt das 2. *Differential* von f wie folgt.

$$\begin{aligned}
 d^2 f &:= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right) \\
 &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n \quad (dx_i \text{ konstant !}) \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_n\right) dx_1 + \dots \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n\right) dx_n \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_n dx_1 + \dots \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_1 dx_n + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n dx_n \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} dx_1 dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} dx_n dx_1 + \dots \\
 &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} dx_1 dx_n + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} dx_n dx_n \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n^2 \quad (i \neq j).
 \end{aligned}$$

Sind die gemischten Ableitungen gleich, dann gilt

$$d^2 f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i.$$

Analog definiert man induktiv

$$d^{n+1} f := d(d^n f).$$

(Hierbei ist der Satz von Schwarz sehr nützlich.)

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 8

- Definitionen: Ableitung, partielle Ableitung, Richtungsableitung, Tangentialebene (geometrische Veranschaulichung), Differential,

8/6/2
