

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

#### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Beispiel.** (Definition der *Eulerschen Zahl*  $e$ )

3/1/35

Sei  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Behauptung:  $(a_n)$  ist streng monoton wachsend und beschränkt. (Dann ist  $(a_n)$  nach Satz 3.8 konvergent.)

z.z.: 1.  $a_n < a_{n+1}$  für jedes  $n$  und  
2.  $(a_n)$  ist beschränkt.

Zu 1. g.z.z.:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  (denn alle  $a_n$  sind positiv).

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n}_{\geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}} \\ &\geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \quad (\text{nach der Bernoullischen Ungleichung}) \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1, \quad \text{denn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1 &\iff (n+2)(n^2 + n + 1) > (n+1)(n^2 + 2n + 1) \\ &\iff n^3 + 3n^2 + 3n + 2 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

(und die letzte Ungleichung gilt offensichtlich).

Also  $a_n < a_{n+1}$  für jedes  $n$ , und damit ist  $(a_n)$  streng monoton wachsend.

Zu 2.  $(a_n)$  ist beschränkt.

Offenbar ist  $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \leq a_n$  für jedes  $n$ .

Weiterhin ist

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} := b_n.$$

Es genügt zu zeigen, daß die Folge  $(b_n)$  streng monoton fällt.

g.z.z.:  $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$  (denn alle  $b_n$  sind positiv).

Der Beweis hierzu verläuft ähnlich wie für  $(a_n)$ , er wird als Übungsaufgabe gestellt.

Damit haben wir

$$b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4 \geq b_n \text{ für jedes } n.$$

Also

$$2 \leq a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \leq 4.$$

Dann ist  $(a_n)$  monoton wachsend und beschränkt, also konvergent und  $(b_n)$  monoton fallend und beschränkt, und somit auch konvergent.

Folglich existieren Zahlen  $e$  und  $e'$ , so daß

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{und} \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e'.$$

Behauptung:  $e = e'$ .

Annahme:  $e \neq e'$ .

Dann ist  $\varepsilon := |e - e'| > 0$ , und folglich gilt für hinreichend große  $n$

$$\begin{aligned} |e - e'| &= |e - a_n + a_n - b_n + b_n - e'| \leq \underbrace{|e - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + |a_n - b_n| + \underbrace{|b_n - e'|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + |a_n - b_n|. \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\leq 4} \cdot \frac{1}{n} \leq 4 \cdot \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{falls } \frac{12}{\varepsilon} < n. \end{aligned}$$

Folglich ist  $\varepsilon = |e - e'| < \varepsilon$  **!!!**

Also  $e = e'$ .

**Definition.** (*Cauchyfolge* oder *Fundamentalfolge*)

3/1/39

$(a_n)$  ist eine *Cauchyfolge* (oder *Fundamentalfolge*)

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n, m \geq n_0$  gilt:  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .

## 3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Ein Mengensystem  $S = \{M_i : i \in I\}$  mit einer Indexmenge  $I$  heißt *Klasseneinteilung* oder *Partition* oder *Zerlegung* von  $M$  3/2/6

- $\overline{\text{Df}}$  (1)  $M_i \subseteq M$  und  $M_i \neq \emptyset$  für alle  $i \in I$ .  
 (2)  $\bigcup_{i \in I} M_i = M$ , und für jedes  $i, j \in I$  mit  $i \neq j$  ist  $M_i \cap M_j = \emptyset$ .

(vgl. z.B. Literaturangabe [4], Teil I, Seiten 43 – 44.)

Eine Äquivalenzrelation  $\sim$  in  $M$  zieht eine Klasseneinteilung von  $M$  nach sich; jeweils äquivalente Elemente gehören der gleichen Klasse an (dies müßte natürlich bewiesen werden). Die so entstehenden Klassen heißen auch *Äquivalenzklassen*.

Ist  $M$  die Menge aller Cauchyfolgen von rationalen Zahlen und  $\sim$  die Grenzwertgleichheit in  $M$ , dann wird  $M$  in Äquivalenzklassen grenzwertgleicher Cauchyfolgen zerlegt. Damit sind neue mathematische Objekte entstanden, die (wie Dedekindsche Schnitte) ebenfalls als reelle Zahlen interpretiert werden können.

**Definition.** (*reelle Zahlen*)

3/2/7

$a$  ist eine reelle Zahl

$\overline{\text{Df}}$  Es gibt eine Cauchyfolge  $(a_n)$  von rationalen Zahlen, so daß  $a$  die Äquivalenzklasse aller Cauchyfolgen von rationalen Zahlen ist, die mit  $(a_n)$  grenzwertgleich sind.

**Bez.:**  $a = \langle a_n \rangle = \{(b_n) : b_n \in \mathbb{Q} \text{ und } (a_n - b_n) \text{ ist eine Nullfolge}\}.$

Jede Cauchyfolge  $(b_n)$  mit  $(b_n) \in a = \langle a_n \rangle$  ist ein *Repräsentant* der Klasse  $a$ . Die Menge der betrachteten Äquivalenzklassen heißt *Menge der reellen Zahlen* und wird mit  $\mathbb{R}$  bezeichnet.

3/2/8

Beispielsweise ist  $e = \{(b_n) : b_n \in \mathbb{Q} \text{ und } (b_n) \text{ ist mit } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ grenzwertgleich}\}.$

Damit  $\mathbb{R}$  ein geordneter Körper wird, benötigen wir noch Rechenoperationen  $+$  und  $\cdot$  und eine Ordnungsrelation  $<$  in  $\mathbb{R}$ . Die Definitionen der Operationen und der Relation erfolgen mit Hilfe von Repräsentanten.