

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung*)

8/1/1

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

f ist in \bar{c} differenzierbar (oder total differenzierbar)

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert, und es existiert eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $o(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0}, \text{ so daß für jedes } \bar{x} \in U(\bar{c}) \text{ gilt: } f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x}).$$

Die Matrix A heißt dann 1. Ableitung von f an der Stelle \bar{c} .

Bez.: $A := f'(\bar{c})$.

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*polygonzusammenhängend; Gebiet*)

8/3/4

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) M ist *polygonzusammenhängend*

$\overline{\text{Df}}$ Zu je zwei Punkten $\bar{a}, \bar{b} \in M$ gibt es endlich viele Elemente $\bar{a}_0 = \bar{a}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{m+1} = \bar{b}$, so daß die Verbindungsstrecken $s(\bar{a}_i, \bar{a}_{i+1})$ zwischen \bar{a}_i und \bar{a}_{i+1} , $i = 1, \dots, m$, stets zu M gehören.

(Da durch Polygonzüge stetige Funktionen gegeben sind, sind polygonzusammenhängende Mengen auch bogenzusammenhängend.)

(2) M ist ein *Gebiet*

$\overline{\text{Df}}$ M ist polygonzusammenhängend und offen.

Satz 8.11 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ in M differenzierbar.

8/3/5

Dann gilt: f ist konstant in $M \iff f'(\bar{x}) = 0$ für alle $\bar{x} \in M$.