

## Kapitel 4

### Unendliche Reihen; Potenzreihen

#### 4.3 Komplexe Zahlen

**Satz 4.18**  $(z_n) = (a_n + ib_n)$  konvergiert gegen  $z = a + ib$  gdw  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ . 4/3/12  
(Konvergenz in  $\mathbb{C}$  bedeutet also komponentenweise Konvergenz.)

**Beweis.** Es ist  $|z_n - z| = |a_n + ib_n - (a + ib)| = |a_n - a + i(b_n - b)| \leq |a_n - a| + \underbrace{|i|}_{=1} \cdot |b_n - b|$ . 4/3/13

( $\longleftarrow$ ) Wenn  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ , dann gilt:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$ :  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Folglich ist

$$|z_n - z| < \varepsilon, \quad \text{also} \quad z_n \rightarrow z.$$

$$(\longrightarrow) \quad |z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon \quad (\text{für fast alle } n) \implies$$

$$(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 < \varepsilon^2 \implies$$

$$(a_n - a)^2, (b_n - b)^2 < \varepsilon^2 \implies$$

$$|a_n - a|, |b_n - b| < \varepsilon \implies$$

$$a_n \rightarrow a, \quad b_n \rightarrow b. \quad \square$$