

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Grenzwert bei Funktionen*)

5/2/6

Es sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$ (a muß nicht selbst zu $D(f)$ gehören).

f besitzt an der Stelle a den Grenzwert c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$

Kapitel 7 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.8 (*Satz von Rolle*)

7/2/0

Ist $a < b$ und f in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar und ist $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $c \in (a, b)$, so daß $f'(c) = 0$.

Satz 7.10 (*2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung*)

7/2/6

Ist $a < b$ und sind f und g in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar und ist $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so daß $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

(Das bedeutet, daß der Quotient des Anstiegs der Sekanten beider Funktionen in dem Intervall $[a, b]$ gleich dem Quotienten des Anstiegs der Tangenten an einer geeigneten Zwischenstelle ist.)

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Satz 7.12 (*Regel von de l'Hospital für „ $\frac{0}{0}$ “*)

7/3/0

Voraussetzung:

- (1) Sei $a < b$ und seien f, g in (a, b) differenzierbar und in a (rechtsseitig) stetig.
- (2) Sei $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Behauptung:

Existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis. (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des 2. Mittelwertsatzes.)

7/3/1

Es sei $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a^*$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes x

mit $a < x < a + \delta$ gilt: $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - a^* \right| < \varepsilon$.

z.z.: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes x mit $a < x < a + \delta$ gilt:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - a^* \right| < \varepsilon.$$

Zunächst gilt: $g(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Angenommen, es existiert ein $x \in (a, b)$ mit $g(x) = 0$.

Dann gibt es nach dem Satz von Rolle ein $c \in (a, x)$, so daß $g'(c) = 0$. $\nexists!$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$ und δ entsprechend der Existenz von $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a^*$ gewählt.

Nach dem 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt dann für $a < x < a + \delta$:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - a^* \right| = \left| \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - a^* \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - a^* \right| < \varepsilon,$$

für ein c_x mit $a < c_x < x < a + \delta$. \square