

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*partielle Ableitung*)

8/1/4

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert. f ist in \bar{c} *partiell nach x_i differenzierbar* ($i = 1, \dots, n$)

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ Die Funktion $\varphi(x_i) := f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$ ist (als Funktion der einen Veränderlichen x_i) an der Stelle c_i differenzierbar.

Nach der früheren Differenzierbarkeitsdefinition bedeutet dies, daß die folgenden Limites existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(c_i + h) - \varphi(c_i)}{h}, \quad \text{für } h := x_i - c_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - f(\bar{c})}{x_i - c_i}. \end{aligned}$$

Der Limes selbst (falls er existiert) heißt *partielle Ableitung* von f nach x_i an der Stelle \bar{c} (oder kurz: in \bar{c}).

$$\text{Bez.: } \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = f_{x_i}(\bar{c}).$$

8.2 Partielle Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung

Es sei $f(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung eines Punktes nach allen Variablen partiell differenzierbar. Dann entstehen offenbar beim partiellen Differenzieren neue Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) := \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, die ebenfalls von \bar{x} abhängen. Diese partiellen Ableitungen können wieder nach gewissen Variablen partiell differenzierbar sein, etwa nach der Variablen x_j .

8/2/0

Bildet man $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \right)$, dann erhält man die *2. partielle Ableitung* von f nach x_i und x_j in \bar{x} .

$$\text{Bez.: } \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \right) := \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_i x_j}(\bar{x})$$

Satz 8.9 (*Satz von Schwarz*)

8/2/2

Es sei $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$.

Ist f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert und existieren in $U(\bar{c})$ die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xy} und ist f_{xy} in \bar{c} stetig, dann existiert auch f_{yx} in \bar{c} , und es ist $f_{xy}(\bar{c}) = f_{yx}(\bar{c})$.

(Unter den angegebenen Bedingungen sind die gemischten Ableitungen in \bar{c} gleich.)