

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*euklidischer Abstand*)

6/1/1

Seien $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

$|\bar{a} - \bar{b}| \stackrel{\text{Def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$ heißt *euklidischer Abstand* zwischen \bar{a} und \bar{b} .

Definition. Der n -dimensionale Vektorraum \mathbb{R}^n zusammen mit dem euklidischen Abstand heißt *n -dimensionaler euklidischer Raum*.

6/1/3

Satz 6.2 Für alle $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

6/1/7

- (1) $|\bar{a}| \geq 0$, und $|\bar{a}| = 0 \iff \bar{a} = \bar{0}$.
- (2) $|r \cdot \bar{a}| = |r| \cdot |\bar{a}|$.
($\implies |- \bar{a}| = |\bar{a}|$ und $|\bar{a} - \bar{b}| = |\bar{b} - \bar{a}|$). (Symmetrie des Abstands)
- (3) $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$. (Dreiecksungleichung)
- (4) $|\bar{a} - \bar{b}| \leq |\bar{a} - \bar{c}| + |\bar{c} - \bar{b}|$,
- (5) $||\bar{a}| - |\bar{b}|| \leq |\bar{a} - \bar{b}|$. $\left. \vphantom{\begin{matrix} (4) \\ (5) \end{matrix}} \right\}$ (Formen der Dreiecksungleichung)

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Satz 6.8 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$ und $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:
 f ist in \bar{a} stetig gdw f_1, \dots, f_m in \bar{a} stetig sind.

6/2/5

(D.h., Stetigkeit bei Vektorfunktionen ist komponentenweise Stetigkeit.)

Beweis. Zunächst gilt für beliebige Vektoren $\bar{c} = (c_1, \dots, c_k)$:

6/2/6

$$|c_i| \leq |\bar{c}| \leq |c_1| + \dots + |c_k| \text{ für alle } i.$$

Denn

$$\begin{aligned} |c_i| &= \sqrt{c_i^2} \leq \sqrt{c_1^2 + \dots + c_k^2} = |\bar{c}| = \\ &|(c_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, c_i, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, c_k)| \leq \\ &|(c_1, 0, \dots, 0)| + \dots + |(0, \dots, 0, c_k)| = |c_1| + \dots + |c_k|. \end{aligned}$$

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis.

(\implies) Sei f in \bar{a} stetig. Dann gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $\bar{x} \in D(f)$:

Wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$, so $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon$.

Wegen $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| = \left| (f_1(\bar{x}) - f_1(\bar{a}), \dots, f_m(\bar{x}) - f_m(\bar{a})) \right|$ erhält man nach den obigen Ausführungen

$$|f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{a})| \leq |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon \text{ für } i = 1, \dots, m.$$

Also wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$, so $|f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{a})| < \varepsilon$ für $i = 1, \dots, m$.

(\leftarrow) Seien jetzt f_1, \dots, f_m in \bar{a} stetig. Dann gilt für $i = 1, \dots, m$:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_i > 0$, so daß für jedes $\bar{x} \in D(f_i)$:

Wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta_i$, so $|f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{a})| < \frac{\varepsilon}{m}$.

Wir wählen $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$; dann erhält man für $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$ sofort

$|f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{a})| < \frac{\varepsilon}{m}$, also

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| \leq |f_1(\bar{x}) - f_1(\bar{a})| + \dots + |f_m(\bar{x}) - f_m(\bar{a})| < m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Folglich ist f in \bar{a} stetig. \square