

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Satz 3.10 (*Eigenschaften konvergenter Folgen*)

3/1/43

Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen und c, d seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1) $(c \cdot a_n)$ ist konvergent und $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$.
- (2) $(a_n + b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
- (3) $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.
- (4) Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ konvergent und $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}$.
- (4') Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent und $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$.
- (5) $(|a_n|)$ ist konvergent und $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.
- (6) Ist $a_n \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq \lim b_n$.
Ist insbesondere $a_n \leq d$ bzw. $d \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq d$ bzw. $d \leq \lim b_n$.

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Satz 5.16 \sin und \cos haben folgende Eigenschaften:

5/3/47

- (1) \sin und \cos sind in \mathbb{R} definiert, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.
- (2) \sin ist ungerade und \cos ist gerade.
- (3) $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ ($\implies \sin 2x = 2 \sin x \cos x$).
- (4) $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ ($\implies \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$).
- (5) $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x - y}{2} \cdot \cos \frac{x + y}{2}$.
- (6) $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x - y}{2} \cdot \sin \frac{x + y}{2}$.
- (7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ($\implies |\sin x|, |\cos x| \leq 1$).
- (8) \sin und \cos sind stetig.

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*Stetigkeit in metrischen Räumen*)

6/2/2

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in \mathbb{M}_1$.

f ist in a stetig

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$

gilt: Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

(Andere Formulierung: Wenn $x \in U_\delta(a)$, so $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.)

Satz 6.10 (*Folgenstetigkeit*)

6/2/13

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in D(f)$.

f ist in a stetig gdw für jede Folge (x_i) in \mathbb{M}_1 mit $x_i \in D(f)$ gilt:

Wenn $x_i \rightarrow a$, so $f(x_i) \rightarrow f(a)$.

Satz 6.11 *In euklidischen Räumen sind Summe, Differenz, Produkt, Quotient und die Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig.* (Beim Produkt bzw. beim Quotienten werden nur solche Funktionen zugelassen, die aus \mathbb{R}^n in \mathbb{R} abbilden!)

6/2/16

Übungsaufgaben

3. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

6/6/3

$$(a) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$$

ist in $(0, 0)$ nicht stetig.

$$(b) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin(xy) & \text{für } x \neq 0, \\ y & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist in jedem Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ stetig.

[Man benutze die Ungleichung: $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ für „kleine“ x .]