

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen ist die *vollständige Induktion*. Sie beruht auf dem

Induktionsaxiom:

Es sei E eine Eigenschaft für natürliche Zahlen n . Dann gilt

$$E(0) \wedge \forall n (E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m E(m).$$

Um die Aussage $\forall m E(m)$ zu beweisen, genügt es:

1. $E(0)$ zu zeigen (*Anfangsschritt*) und
2. $\forall n (E(n) \rightarrow E(n+1))$ nachzuweisen (*Induktionsschritt*).

Bei der Eigenschaft 2. betrachtet man ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und zeigt:

Wenn $E(n)$, so $E(n+1)$.

$E(n)$ heißt *Induktionsvoraussetzung*, $E(n+1)$ *Induktionsbehauptung*.

Eigentlich müßte beim Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Fall (a): $E(n)$ ist falsch.

Dann ist die Implikation $E(n) \rightarrow E(n+1)$ aber trivialerweise richtig. Daher läßt man diesen Fall im Induktionsbeweis in der Regel weg und betrachtet nur noch

Fall (b): $E(n)$ ist richtig.

Unter dieser Voraussetzung ist dann die Gültigkeit von $E(n+1)$ zu zeigen.

Achtung: Häufig findet man bei „Anfängern“ die folgende falsche Formulierung im Induktionsschritt:

„Für beliebiges n wird vorausgesetzt, daß $E(n)$ schon gilt.“

Wer dies so formuliert, hat die Behauptung bereits vorausgesetzt.

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Satz 6.4 (*Satz von Bolzano-Weierstraß*)

6/1/24

Jede unendliche und beschränkte Menge von Elementen aus \mathbb{R}^n besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

Beweis. (Der Beweis erfolgt mit einer sog. Würfelschachtelung, die analog zu einer Intervallschachtelung induktiv konstruiert wird).

6/1/25

Beweisidee: Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und M unendlich und beschränkt. Dann läßt sich M in eine Kugel und damit auch in einen n -dimensionalen Würfel $W_0 := [a_1^0, b_1^0] \times \cdots \times [a_n^0, b_n^0]$ mit endlicher Kantenlänge einschließen, wobei $a_i^0, b_i^0 \in \mathbb{R}$, $a_i^0 < b_i^0$ und $b_i^0 - a_i^0 = b_j^0 - a_j^0$ für $i, j = 1, \dots, n$. Es gilt also $M \subseteq W_0$.

Die Kanten des Würfels werden durch die Intervalle $[a_i^0, b_i^0]$ auf den Koordinatenachsen repräsentiert (vgl. Abb. 6.4).

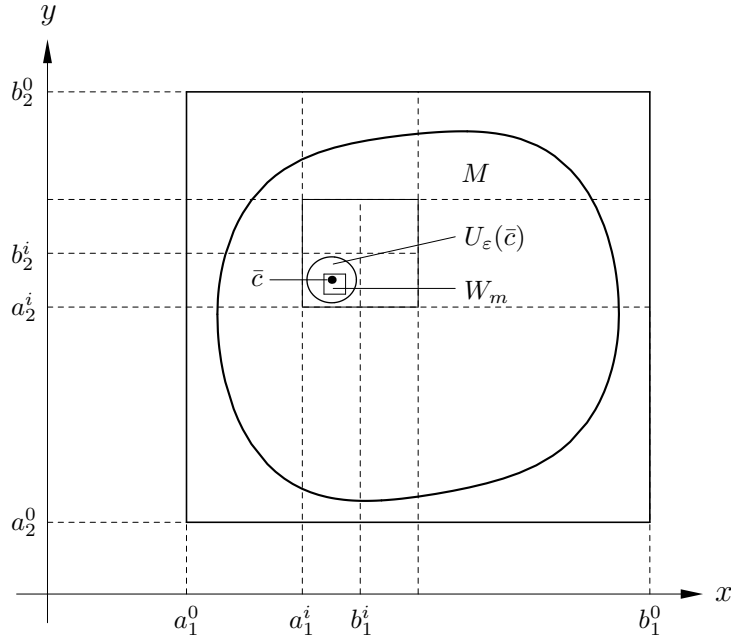


Abb. 6.4 In der Abbildung wird der Fall $n = 2$ dargestellt. Aufgrund der betrachteten Zerlegung gibt es bei jedem Schritt wenigstens einen Teilwürfel, in dem unendlich viele Elemente aus M enthalten sind; einen solchen Teilwürfel wählt man jeweils aus und zerlegt ihn weiter. Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es dann einen Teilwürfel W_m , so daß $W_m \subseteq U_\varepsilon(\bar{c})$.

Durch Halbierung der Würfelkanten entsteht eine Zerlegung von W_0 in endlich viele Teilwürfel W_0^1, \dots, W_0^k , (in unserem Fall ist $k = 2^n$) und $W_0 = \bigcup_{i=1}^k W_0^i$.

Dann ist

$$M \cap W_0 = M \cap \left(\bigcup_{i=1}^k W_0^i \right) = \bigcup_{i=1}^k (M \cap W_0^i)$$

unendlich. Folglich gibt es einen Teilwürfel W_0^i , so daß schon $M \cap W_0^i$ unendlich ist. Wir wählen einen solchen Teilwürfel W_0^i aus und nennen ihn W_1 .

Es sei jetzt W_m schon definiert mit den folgenden Eigenschaften:

Die Kantenlänge von W_m ist $l(W_m) = \frac{1}{2^m} \cdot l(W_0)$ und $M \cap W_m$ ist unendlich.

Analog wie bei W_0 halbieren wir jetzt die Kanten von W_m und erhalten eine Zerlegung von W_m in k Teilwürfel W_m^1, \dots, W_m^k , so daß

$$W_m = \bigcup_{i=1}^k W_m^i \quad \text{und} \quad M \cap W_m = \bigcup_{i=1}^k (M \cap W_m^i).$$

Da nach Voraussetzung $M \cap W_m$ unendlich ist, existiert ein W_m^i , so daß $M \cap W_m^i$ unendlich ist; sei $W_{m+1} := W_m^i$.

Auf diese Weise entsteht eine Folge $W_0 \supseteq W_1 \supseteq \cdots \supseteq W_m \supseteq \cdots$ von ineinander geschachtelten Würfeln. Für den Würfel W_m sei die j -te Würfelkante ($j = 1, \dots, n$)

durch das Intervall $[a_j^m, b_j^m]$ gegeben. Offenbar ist $([a_j^m, b_j^m])_{m=0,1,2,\dots}$ dann eine Intervallschachtelung in \mathbf{R} . Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es ein c_j , so daß $c_j \in [a_j^m, b_j^m]$ für fixiertes j mit $j \in \{1, \dots, n\}$ und $m = 0, 1, 2, \dots$.

Behauptung: $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$ ist ein Häufungspunkt von M .

Offenbar ist $\bar{c} \in \bigcap_{m=0}^{\infty} W_m$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $l(W_m) = \frac{1}{2^m} \cdot l(W_0)$ kann mit wachsendem m die Kantenlänge des m -ten Würfels so klein gemacht werden, daß für hinreichend große m der ganze Würfel W_m zu $U_\varepsilon(\bar{c})$ gehört: $W_m \subseteq U_\varepsilon(\bar{c})$. Da $M \cap W_m \subseteq W_m$ und $M \cap W_m$ unendlich ist, liegen in $U_\varepsilon(\bar{c})$ unendlich viele Elemente aus M ; folglich ist \bar{c} ein Häufungspunkt von M . \square