

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.3 Mengen von reellen Zahlen

**Definition.** (*Schranke*)

2/3/1

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $M \neq \emptyset$ .

- (1)  $a \in \mathbb{R}$  ist eine *obere Schranke* von  $M$   
 $\overline{\text{Df}} \quad x \leq a \text{ für jedes } x \in M.$
- (2)  $a \in \mathbb{R}$  ist eine *untere Schranke* von  $M$   
 $\overline{\text{Df}} \quad a \leq x \text{ für jedes } x \in M.$
- (3)  $M$  ist *nach oben* (bzw. *unten*) *beschränkt*  
 $\overline{\text{Df}} \quad M$  besitzt eine obere (bzw. untere) Schranke.
- (4)  $M$  ist *beschränkt*  
 $\overline{\text{Df}} \quad M$  ist nach oben und nach unten beschränkt.

**Definition.** (*Grenze*)

2/3/2

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $M \neq \emptyset$ .

- (1) Sei  $M$  nach oben beschränkt.  $a$  ist *obere Grenze* von  $M$   
 $\overline{\text{Df}} \quad a$  ist die kleinste obere Schranke von  $M$ .  
**Bez.:**  $a = \sup M$  (*Supremum von  $M$* ).
- (2) Sei  $M$  nach unten beschränkt.  $a$  ist *untere Grenze* von  $M$   
 $\overline{\text{Df}} \quad a$  ist die größte untere Schranke von  $M$ .  
**Bez.:**  $a = \inf M$  (*Infimum von  $M$* ).

**Satz 2.8**

2/3/4

- (1) Jede nicht leere und nach oben beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere Grenze.
- (2) Jede nicht leere und nach unten beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine untere Grenze.
- (3) Jede nicht leere und beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere und eine untere Grenze.

**Definition.** (*Maximum, Minimum*)

2/3/8

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $M \neq \emptyset$ .

- (1)  $M$  besitzt ein *Maximum*

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in M$ , so daß  $x \leq a$  für jedes  $x \in M$ .

**Bez.:**  $a = \max M$  ( $a$  heißt Maximum von  $M$ ).

(2)  $M$  besitzt ein *Minimum*

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in M$ , so daß  $a \leq x$  für jedes  $x \in M$ .

**Bez.:**  $a = \min M$  ( $a$  heißt Minimum von  $M$ ).

**Folgerung.**

2/3/9

(1) Besitzt  $M$  ein Maximum (bzw. Minimum), so ist

$$\max M = \sup M \quad (\text{bzw. } \min M = \inf M).$$

(2) Gehören  $\sup M$  (bzw.  $\inf M$ ) zu  $M$ , dann gilt stets

$$\max M = \sup M \quad (\text{bzw. } \min M = \inf M).$$

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Definition.** (*Beschränktheit bei Funktionen*)

6/3/13

Sei  $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$  und  $M \subseteq D(f)$ .

(1)  $f$  ist in  $M$  *beschränkt*

$$\overline{\text{Df}} \quad f(M) = \{f(a) : a \in M\} \text{ ist beschränkt.}$$

(2)  $f$  ist *beschränkt*

$$\overline{\text{Df}} \quad f \text{ ist in } D(f) \text{ beschränkt.}$$

**Bemerkung.** Für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $f(M)$  eine Menge von reellen Zahlen. Folglich gilt:

6/3/14

$$f(M) \text{ ist beschränkt} \iff$$

$$f(M) \text{ ist nach oben und nach unten beschränkt} \iff$$

$$\text{es existiert ein } c \in \mathbb{R}, \text{ so daß } |f(\bar{x})| \leq c \text{ für jedes } \bar{x} \in M.$$

Dann existieren  $\sup f(M) := \sup_{\bar{x} \in M} f(\bar{x})$  und  $\inf f(M) := \inf_{\bar{x} \in M} f(\bar{x})$ .

Wenn  $\sup f(M) \in f(M)$  bzw.  $\inf f(M) \in f(M)$ , dann sind  $\sup f(M)$  bzw.  $\inf f(M)$  das Maximum bzw. das Minimum von  $f(M)$ .