

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition. (*Kurve*)

6/3/1

\mathfrak{k} ist eine *Kurve* in \mathbb{R}^n

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ und eine stetige Vektorfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, so daß $\mathfrak{k} := \{f(t) : a \leq t \leq b\}$.

(D.h., es gibt stetige Funktionen $f_1, \dots, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ und \mathfrak{k} das Bild der Funktion f in \mathbb{R}^n ist.)

Definition. (*bogenzusammenhängend*)

6/3/5

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M ist *bogenzusammenhängend*

$\overline{\text{Df}}$ Zu je zwei Punkten $\bar{a}, \bar{b} \in M$ gibt es eine Kurve \mathfrak{k} , die ganz zu M gehört und die Punkte \bar{a}, \bar{b} miteinander verbindet. (vgl. Abb. 6.11 a)

Definition. (*gleichmäßige Stetigkeit*)

6/3/25

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $M \subseteq \mathbb{M}_1$.

f ist in M *gleichmäßig stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $M \subseteq D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x, y \in M$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, y) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Definition. (*Lipschitz-Stetigkeit*)

6/3/36

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

f ist in M *Lipschitz-stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $M \subseteq D(f)$ und es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq c \cdot |\bar{x} - \bar{y}|$.

6.5 Einige wichtige Ergänzungen

Definition. (*kompakt*)

6/5/3

Es sei (\mathbb{M}, ϱ) ein metrischer Raum und $M \subseteq \mathbb{M}$.

(1) M ist *kompakt*

$\overline{\text{Df}}$ Jede offene Überdeckung von M enthält eine endliche Teilüberdeckung von M (d.h., ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M , dann existiert ein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0 := \{U_1, \dots, U_m\} \subseteq \mathcal{U}$, so daß schon \mathcal{U}_0 die Menge M überdeckt).

(2) (\mathbb{M}, ϱ) ist *kompakt*

$\overline{\text{Df}}$ $M = \mathbb{M}$ ist kompakt.

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 6

- Definitionen: Kurve, bogenzusammenhängend, kompakte Menge, gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit;

6/7/14