

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Definition. (*natürlicher Logarithmus*)

5/3/27

Die Umkehrfunktion von e^x heißt *natürlicher Logarithmus*.

Bez.: $\ln(x)$ oder $\ln x$

Satz 5.13 \ln hat folgende Eigenschaften:

5/3/29

- (1) $\ln e = 1$, $\ln e^x = x$ und $e^{\ln x} = x$.
- (2) \ln ist stetig.
- (3) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ (Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus).
- (4) $\ln 1 = 0$, $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$;
für $0 < x < 1$ ist $\ln x < 0$, und für $1 < x$ ist $0 < \ln x$.
- (5) \ln ist streng monoton wachsend.
- (6) Für rationale r und reelle $x > 0$ gilt: $\ln(x^r) = r \cdot \ln x$
(für irrationale r ist x^r noch nicht definiert!).
- (7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.

Definition. (*Logarithmus zur Basis a*)

5/3/37

Sei $a > 0$ und $a \neq 1$. Die Umkehrfunktion von a^x heißt *Logarithmus zur Basis a*.

Satz 5.15 Sei $a > 0$ und $a \neq 1$. Dann gilt:

5/3/40

- (1) $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.
- (2) $\log_a x$ ist stetig.
- (3) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
- (4) Für $0 < a < 1$ ist $\log_a x$ streng monoton fallend,
für $1 < a$ ist $\log_a x$ streng monoton wachsend.
- (5) Für $b > 0$ ist $\log_a b^x = x \cdot \log_a b$ und $\log_b x = \frac{\ln a}{\ln b} \cdot \log_a x$.

Übungsaufgaben

20. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

5/5/20

- (a) $2^{3^x} = 3^{4^x}$,
- (b) $2(\log_5 x)^2 + \log_5(x^3) - 2 = 0$,
- (c) $15^x + 9^x = 25^x$ [Hinweis: Man dividiere durch 25^x .]