

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

**Definition.** (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von  $f$  in  $I$ , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.: } \int_{\frac{a}{-}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\frac{b}{-}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von  $f$  in  $I$  gleich, dann heißt  $f$  in  $I$  (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

#### 9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

**Satz 9.14** Ist  $f$  in  $[a, b]$  integrierbar und  $a < c < b$ , dann ist  $f$  in  $[a, c]$  und in  $[c, b]$  integrierbar, und es ist

9/4/10

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Korollar.** Sei  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$  und  $f$  in  $I = [a, b]$  integrierbar, dann ist  $f$  in jedem Teilintervall  $[a_i, a_{i+1}] \subseteq I$  integrierbar, und es ist

9/4/12

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx.$$