

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.1 Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

2/2/1

$$(1) \quad -(-a) = a, \quad -0 = 0, \quad (-1) \cdot a = -a.$$

$$(2) \quad \frac{a}{1} = a.$$

$$(3) \quad \frac{1}{\frac{1}{a}} = a, \quad \text{falls } a \neq 0.$$

$$(4) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc, \quad \text{falls } b, d \neq 0.$$

Beweis. (1). Nach Eigenschaft I(4) ist $(-a) + (-(-a)) = 0$. Weiterhin gilt $a + (-a) = 0 = (-a) + a$. Folglich sind $-(-a)$ und a inverse Elemente von $-a$. Da das Inverse eines Elements eindeutig bestimmt ist, muß $-(-a) = a$ sein.

2/2/2

Es ist stets $a + 0 = a$, speziell auch für $a = -0$. Folglich gilt nach I(2)

$$-0 = (-0) + 0 = 0 + (-0) = 0, \quad \text{also } -0 = 0.$$

Weiterhin ist $a + (-a) = 0$ und $a = a \cdot 1$. Dann gilt

$$a + (-1) \cdot a = a \cdot 1 + (-1) \cdot a = a \cdot 1 + a \cdot (-1) = a \cdot \underbrace{(1 + (-1))}_{=0} = a \cdot 0 = 0.$$

Folglich ist $(-1) \cdot a$ invers zu a . Andererseits ist auch $-a$ invers zu a . Da das inverse Element von a eindeutig bestimmt ist, gilt $(-1) \cdot a = -a$.

Die Behauptungen (2) – (4) bleiben als Übungsaufgaben. \square