

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. (*monoton, streng monoton*)

5/1/11

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

(1) f ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 \leq x_2$, so $f(x_1) \leq f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

(2) f ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_1) < f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

Kapitel 9 Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 9.12 Ist f in I definiert und monoton, dann ist f in I integrierbar.

9/4/4

Beispiele.

1. Mit dem letzten Satz lassen sich Beispiele für Funktionen angeben, die in einem

9/4/6/1

Intervall sogar unendlich viele Unstetigkeitsstellen besitzen und trotzdem integrierbar sind (vgl. Abb. 9.10).

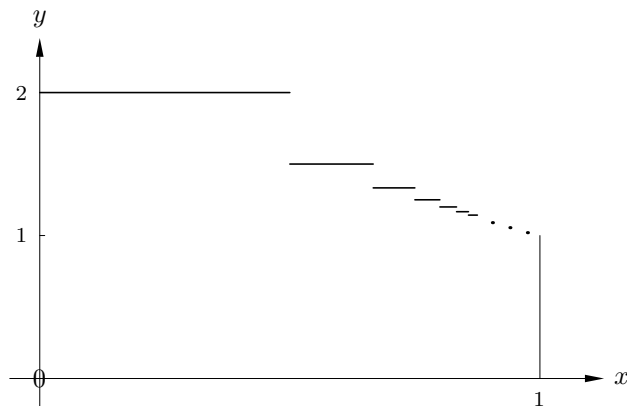


Abb. 9.10 Die Abbildung zeigt eine monoton fallende „Treppenfunktion“, wie sie in der Bemerkung betrachtet wird.

Sei $I = [0, 1]$, (c_n) eine streng monoton wachsende Folge mit $c_0 = 0$ und $c_n \rightarrow 1$ (z.B. $c_n = \frac{n}{n+1}$), und $f(x)$ sei wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - c_n, & \text{für } c_n \leq x < c_{n+1} \\ 1, & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

f ist offenbar in jedem Punkt c_n unstetig, aber in I monoton fallend und daher integrierbar.