

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.7 (*Dreiecksungleichungen*)

2/2/22

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) $|a + b| \leq |a| + |b|.$
- (2) $||a| - |b|| \leq |a - b|.$

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Konvergenz*)

3/1/0

Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

(a_n) ist *konvergent gegen* a

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

In diesem Falle heißt a *Grenzwert* oder *Limes* von (a_n) .

Bez.: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $a = \lim a_n$ oder auch einfach
 $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ oder $a_n \rightarrow a$.

Definition. (*Beschränktheit bei Folgen*)

3/1/11

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

- (1) (a_n) ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c$ (bzw. $c \leq a_n$) für jedes n .

- (2) (a_n) ist *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$ (a_n) ist nach oben und nach unten beschränkt.

Satz 3.4 *Jede beschränkte Folge besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.*

3/1/17

Satz 3.6 *Ist a ein Häufungspunkt der Folge (a_n) , dann existiert eine Teilfolge von (a_n) , die gegen a konvergiert.*

3/1/23

Korollar. *Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.*

3/1/25

Satz 3.9 (*Cauchysches Konvergenzkriterium*)

3/1/37

Eine Folge (a_n) ist konvergent (in \mathbb{R}) gdw

für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für jedes $m, n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Beweis. (\longrightarrow) Sei (a_n) konvergent, $a_n \rightarrow a$.

3/1/38

Nach Definition existiert für $\varepsilon > 0$ ein n_0 , so daß für $n \geq n_0$ stets gilt: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Folglich ist

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a - a_m|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad \text{für } m, n \geq n_0.$$

(\longleftarrow) Wir zeigen zunächst, daß (a_n) beschränkt ist.

Es sei $\varepsilon = 1$. Dann existiert ein n_0 , so daß $|a_n - a_m| < 1$ für jedes $m, n \geq n_0$.

Für $m = n_0$ ist insbesondere $|a_n - a_{n_0}| < 1$.

Wir wählen $d = \max\{|a_i - a_{n_0}| : i = 0, \dots, n_0 - 1\}$.

Dann gilt für beliebige n

$$|a_n| \leq |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + d + |a_{n_0}| := c.$$

Folglich ist (a_n) beschränkt. Damit besitzt (a_n) einen Häufungspunkt a und eine konvergierende Teilfolge (a_{n_i}) mit $a_{n_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} a$. (Korollar zu Satz 3.6; Satz 3.4)

Nach Definition gilt dann:

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein m_0 , so daß für jedes $n_i \geq m_0$ gilt: $|a_{n_i} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nach Voraussetzung existiert ein m'_0 , so daß für jedes $m, n \geq m'_0$ gilt: $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Für $n, n_i \geq m_0, m'_0$ gilt dann

$$|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_i}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_i} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Also $a_n \rightarrow a$. \square