

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.1 Ableitung

**Definition.** (*Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient*)

7/1/3

$f$  ist an der Stelle  $a$  (oder kurz in  $a$ ) *differenzierbar*

$\overline{\text{Def}}$   $f$  ist in einer Umgebung  $U(a)$  definiert, und es existiert  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von  $f$  in  $a$ .

**Bez.**  $f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$

**Satz 7.4** Ist  $f$  in  $a$  differenzierbar und  $f(a) \neq 0$ , dann ist  $\frac{1}{f}$  in  $a$  differenzierbar, 7/1/19

und es ist  $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$

**Beweis.** Es ist

7/1/20

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{f}(x) - \frac{1}{f}(a)}{x - a} &= \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x - a} = \frac{\frac{f(a) - f(x)}{f(x) \cdot f(a)}}{x - a} = \\ &= -\underbrace{\frac{1}{f(x) \cdot f(a)}}_{\rightarrow \frac{1}{f^2(a)}} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\rightarrow f'(a)} \xrightarrow{x \rightarrow a} -\frac{f'(a)}{f^2(a)}. \quad \square \end{aligned}$$