

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.1 Ableitung

##### Beispiele.

5. Es sei  $f(x) = e^x$ .

7/1/8/5

Behauptung:  $f'(x) = e^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $x \neq a$ . Dann ist

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \cdot \frac{e^h - 1}{h}, \quad \text{für } h := x - a.$$

g.z.z.:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$

Es ist

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}.$$

Diese Reihe ist für alle  $h \in \mathbb{R}$  absolut konvergent. Nach dem Lemma zum Identitätssatz für Potenzreihen (Kapitel 4, 4/5/7/2) sind Potenzreihen in ihrem Mittelpunkt stetig.

Der Mittelpunkt ist hier 0, folglich gilt für jede Folge  $h_\nu \rightarrow 0$

$$g(h_\nu) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_\nu^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_\nu^n}{(n+1)!} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 1,$$

Also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

6. Es sei  $f(x) = \sin x$ .

7/1/8/6

Behauptung:  $f'(x) = \cos x$ .

Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $x \neq a$ . Dann ist

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = 2 \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} =$$

$$\cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin h}{h} \quad \text{für } h := \frac{x-a}{2}.$$

Für  $x \rightarrow a$  gilt  $h \rightarrow 0$  und umgekehrt.

$\cos$  ist stetig, folglich ist  $\lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = \cos \frac{a+a}{2} = \cos a$ .

g.z.z.:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$

Es ist

$$\frac{\sin h}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Analog wie im 5. Beispiel ist diese Potenzreihe ebenfalls in ihrem Mittelpunkt 0 stetig. Folglich ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{h^{2n}}{(2n+1)!} = 1.$$

Also

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a = \sin' a.$$

### 7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

**Satz 7.12** (Regel von de l'Hospital für „ $\frac{0}{0}$ “)

7/3/0

Voraussetzung:

- (1) Sei  $a < b$  und seien  $f, g$  in  $(a, b)$  differenzierbar und in  $a$  (rechtsseitig) stetig.
- (2) Sei  $f(a) = g(a) = 0$  und  $g'(x) \neq 0$  für jedes  $x \in (a, b)$ .

Behauptung:

Existiert  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , dann existiert  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$ , und es ist  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**Bemerkung.**

7/3/6

(1) Der Beweis läßt sich nicht unmittelbar auf den Fall „ $\frac{0}{0}$ “ zurückführen, denn differenziert man in  $\left(\frac{1}{g}\right)/\left(\frac{1}{f}\right)$  Zähler und Nenner, dann kommen in der jeweiligen Ableitung  $f^2$  bzw.  $g^2$  vor, und über das Grenzverhalten des entsprechenden Quotienten dieser Funktionen weiß man nicht Bescheid.

(2) Satz 7.12 und die Korollare 1 und 2 können analog auf die folgenden Fälle übertragen werden:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \pm\infty.$$

(3) Häufig läßt sich der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  leichter bestimmen als  $\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

Daher sind die oben angegebenen Regeln oft sehr hilfreich bei der Berechnung solcher Limites.

(4) Einen Ausdruck der Form „ $0 \cdot \infty$ “ kann man in eine der Formen „ $\frac{0}{0}$ “ oder „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ überführen.

Denn wenn  $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \dots} g(x) = \infty$ , so ist

$$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

falls diese Limites existieren.

(5) Ausdrücke der Form „ $0^0$ “, „ $\infty^0$ “ und „ $1^\infty$ “ lassen sich auf die vorhergehenden Fälle zurückführen, indem man die Definition der Potenzfunktion mit Hilfe des natürlichen Logarithmus ausnutzt:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Wenn  $f(x) \searrow 0$ , so  $\ln f(x) \rightarrow -\infty$ ,

wenn  $f(x) \rightarrow \infty$ , so  $\ln f(x) \rightarrow \infty$ ,

wenn  $f(x) \rightarrow 1$ , so  $\ln f(x) \rightarrow 0$ .

Man versucht zunächst, den Grenzwert des Exponenten in  $e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$  zu bestimmen. Mit diesem Wert erhält man dann wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion den Grenzwert von  $f(x)^{g(x)}$ .

**Bemerkung.** Die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$  ließen sich auch mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital bestimmen, aber um  $\sin x$  bzw.  $e^x$  überhaupt differenzieren zu können, benötigt man zuvor schon diese Limites.

7/3/8

## Kurvendiskussion

Bei der *Kurvendiskussion* geht es darum, mit Hilfe der Differentialrechnung wichtige Informationen über eine Funktion zu erhalten, die einerseits besonders interessante Stellen und andererseits den globalen Verlauf der entsprechenden Kurve betreffen.

Hierzu sollte man zunächst den Definitionsbereich bestimmen und die Nullstellen der Funktion berechnen (falls dies möglich ist).

**(a) Monotonie**