

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.3 Elementare Funktionen

**Definition.**  $(\cos, \sin)$

5/3/45

$$\cos x \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

**Satz 5.16**  $\sin$  und  $\cos$  haben folgende Eigenschaften:

5/3/47

- (1)  $\sin$  und  $\cos$  sind in  $\mathbb{R}$  definiert,  $\sin 0 = 0$ ,  $\cos 0 = 1$ .
- (2)  $\sin$  ist ungerade und  $\cos$  ist gerade.
- (3)  $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$  ( $\implies \sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ).
- (4)  $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$  ( $\implies \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ).
- (5)  $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$ .
- (6)  $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}$ .
- (7)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  ( $\implies |\sin x|, |\cos x| \leq 1$ ).
- (8)  $\sin$  und  $\cos$  sind stetig.

**Bemerkung.** Mit Hilfe der Additionstheoreme lassen sich weitere Eigenschaften für  $\sin$  und  $\cos$  herleiten.

5/3/58

- (1) Es gilt  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  speziell für  $x = \frac{\pi}{2}$ . Wegen  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  ist  $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$ .

Weiterhin ist  $\sin x > 0$  für  $x \in (0, 2)$ . Folglich ist  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ .

- (2)  $\cos \pi = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} = -1$  usw.