

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.7 (*Dreiecksungleichungen*)

2/2/22

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) $|a + b| \leq |a| + |b|$.
- (2) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (*Umgebung*)

2/3/10

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

(1) U heißt ε -Umgebung von a

$$\stackrel{\text{Df}}{=} U = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\},$$

$$(\text{d.h., } U = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)).$$

$$\text{Bez.: } U = U_\varepsilon(a).$$

(2) U ist eine Umgebung von a

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es gibt ein } \varepsilon > 0, \text{ so daß } U_\varepsilon(a) \subseteq U.$$

$$\text{Bez.: } U(a).$$

Definition. (*Häufungspunkt*)

2/3/11

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

a ist ein Häufungspunkt von M

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{In jeder } \varepsilon\text{-Umgebung von } a \text{ liegt wenigstens ein von } a \text{ verschiedenes Element}$$

$$(\text{:= Punkt}) \text{ aus } M,$$

$$(\text{d.h., für jedes } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } x \in M \text{ mit } x \neq a \text{ und } x \in U_\varepsilon(a)).$$

Satz 2.10 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und M' die Menge aller Häufungspunkte von M .

2/3/14

Ist a ein Häufungspunkt von M' , dann ist a schon ein Häufungspunkt von M .

Beweis. Sei a ein Häufungspunkt von M' und $\varepsilon > 0$.

2/3/15

z.z.: In $U_\varepsilon(a)$ gibt es ein $c \in M$ mit $c \neq a$.

Da a ein Häufungspunkt von M' ist, existiert ein $b \in M$, so daß $b \neq a$ und $b \in U_\varepsilon(a)$. Folglich ist b ein Häufungspunkt von M . Dann existieren in jeder δ -Umgebung von a (mit $\delta > 0$) unendlich viele Elemente aus M . Insbesondere gibt es dann ein $c \in M$ mit $c \neq a$ und $c \in U_\delta(b)$.

Insgesamt haben wir: $b \in U_\varepsilon(a) \implies |a - b| < \varepsilon$ und

$$c \in U_\delta(b) \implies |b - c| < \delta.$$

Wir wählen speziell $\delta = \varepsilon - |a - b| > 0$, also $|a - b| + \delta = \varepsilon$. Folglich gilt

$$|a - c| = |a - b + b - c| \leq |a - b| + \underbrace{|b - c|}_{< \delta} < |a - b| + \delta = \varepsilon.$$

Also $c \in U_\varepsilon(a)$, $c \neq a$ und $c \in M$. \square