

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Definition. (*gleichmächtig*)

2/2/14

Zwei Mengen M und N sind *gleichmächtig* (**Bez.:** $M \sim N$)

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine Bijektion zwischen M und N .

Wenn $M \sim \mathbb{N}$, dann heißt M auch *abzählbar* (*unendlich*).

2/2/15

Ist M unendlich aber nicht gleichmächtig mit der Menge der natürlichen Zahlen, dann heißt M *überabzählbar*.

Satz 2.5

2/2/16

- (1) Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar,
d.h., es gibt genauso viele rationale wie natürliche Zahlen.
(Die Menge der rationalen Zahlen kann also mit Hilfe der natürlichen Zahlen „durchnumeriert“ werden.)
- (2) Die Menge der reellen Zahlen in dem Intervall $(0, 1)$ ist überabzählbar.
Folglich ist auch die Menge \mathbb{R} überabzählbar.
(Das Intervall $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ wird auch als *Kontinuum* bezeichnet.)

Beweis. (1). Der Beweis erfolgt mit dem *ersten Cantorschen Diagonalverfahren*.

2/2/17

Wir setzen hierbei voraus, daß man jede positive rationale Zahl als Bruch zweier positiver natürlicher Zahlen darstellen kann. Offenbar kommt jede positive rationale Zahl in dem folgenden unendlichen Schema wenigstens einmal (sogar unendlich oft) vor.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & \rightarrow & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & \cdots \\
 \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \cdots \\
 \frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \cdots \\
 \frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & \cdots \\
 \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \cdots \\
 \frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & \cdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
 \end{array}$$

Entsprechend der Pfeilrichtungen (diagonal) werden alle Brüche aufgelistet:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \dots$$

Wir lassen jetzt alle die rationalen Zahlen weg, die in der Auflistung zuvor schon einmal aufgetreten sind; es sind dies $\frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \dots$. Damit entsteht eine neue Auflistung r_0, r_1, r_2, \dots , in der jede positive rationale Zahl genau einmal vorkommt. Folglich ist

$$\mathbb{Q} = \{0, -r_0, r_0, -r_1, r_1, -r_2, r_2, \dots\}.$$

Definiert man eine Abbildung f wie folgt:

$$f(0) := 0, \quad f(2n-1) := -r_{n-1} \quad \text{und} \quad f(2n) := r_{n-1} \quad \text{für jedes } n \geq 1,$$

dann ist f offenbar eine Bijektion zwischen \mathbb{N} und \mathbb{Q} , und folglich ist \mathbb{Q} abzählbar.

(2). Der Beweis erfolgt mit dem *zweiten Cantorschen Diagonalverfahren*.

Angenommen, das Intervall $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ ist abzählbar.

Wir setzen hierbei voraus, daß jede reelle Zahl aus $(0, 1)$ eine eindeutige Darstellung als unendlicher Dezimalbruch der Form $0, n_1 n_2 n_3 \dots$ besitzt, wobei $0 \leq n_i \leq 9$ ist und 9-Periode ausgeschlossen wird. Denn ist $a = 0, n_1 \dots n_k 999\dots$ und $n_k < 9$, dann ist $a = 0, n_1 \dots n_{k-1} (n_k + 1) 000\dots$ eine weitere Darstellung von a . Damit wäre die Eindeutigkeit der Darstellbarkeit verletzt.

Nach der obigen Annahme ist $(0, 1) \sim \mathbb{N}$. Folglich gibt es eine Aufzählung der reellen Zahlen in $(0, 1)$ (eindeutige Numerierung mit natürlichen Zahlen):

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, n_{11} n_{12} n_{13} \dots \\ a_1 &= 0, n_{21} n_{22} n_{23} \dots \\ a_2 &= 0, n_{31} n_{32} n_{33} \dots \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

wobei $0 \leq n_{ij} \leq 9$ und 9-Periode nicht auftritt. Nach Voraussetzung erscheint in dieser Aufzählung jede reelle Zahl aus $(0, 1)$ genau einmal.

Wir konstruieren jetzt ein $b \in (0, 1)$, das in dieser Aufzählung nicht vorkommt und erhalten somit einen Widerspruch.

Sei $b = 0, m_1 m_2 m_3 \dots$ mit $0 < m_i < 9$ und $m_i \neq n_{ii}$ für alle i . Dann ist insbesondere $0 < b < 1$, und b unterscheidet sich von jedem a_i wenigstens an der $(i+1)$ -ten Stelle. **W!** \square