

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Satz 4.8 (Majorantenkriterium)

4/1/32

Es seien $\sum a_i, \sum b_i$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei $\sum b_i$ eine Majorante von $\sum a_i$. Dann gilt:

- (1) Ist $\sum b_i$ konvergent, so ist auch $\sum a_i$ konvergent.
- (2) Ist $\sum a_i$ divergent, so ist auch $\sum b_i$ divergent.

4.4 Potenzreihen

Definition. (Konvergenzradius)

4/4/5

Es sei ϱ eine nicht-negative reelle Zahl oder $\varrho = \infty$.

ϱ heißt Konvergenzradius von $\sum a_n(x-a)^n$

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes x gilt: Wenn $|x-a| < \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent, und wenn $|x-a| > \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ divergent.

(Hierbei soll immer gelten: $\{x : |x-a| < \infty\} = \mathbb{R}$ bzw. $= \mathbb{C}$ und $\{x : |x-a| > \infty\} = \emptyset$.)

4.5 Rechnen mit Potenzreihen

Satz 4.24 (Umordnen von Potenzreihen)

4/5/4

Voraussetzungen:

- (1) Es sei $\sum a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$.
- (2) Weiterhin sei $b \neq a$, $|b-a| < \varrho$ und $\varrho - |b-a| = \varrho' (> 0)$.

Behauptung:

Es gibt eine Potenzreihe $\sum b_n(x-b)^n$ mit einem Konvergenzradius $\geq \varrho'$, so daß für jedes x mit $|x-b| < \varrho'$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-b)^n, \text{ wobei } b_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m \binom{m}{n} (b-a)^{m-n}.$$

(Bez.: $\sum b_n(x-b)^n$ entsteht aus $\sum a_n(x-a)^n$ durch Umordnung nach Potenzen von $(x-b)$.)

Lemma. Es sei $\sum c_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$, und sei (x_ν) eine Folge mit $x_\nu \neq a$, $|x_\nu - a| < \varrho$ und $\lim x_\nu = a$.

4/5/7/2

Dann ist $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0$.

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Korollar. (Reelle) Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzintervalls stetig.

5/4/12

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient)

7/1/3

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) differenzierbar

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in a .

Bez. $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

7.4 Differenzierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Satz 7.23 (Differentiation einer Potenzreihe)

7/4/3

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine (reelle) Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$.
Dann gilt:

(1) f ist in $(a - \varrho, a + \varrho)$ differenzierbar und $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-a)^{n-1}$.

(f kann gliedweise differenziert werden)

(2) Der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-a)^{n-1}$ ist ebenfalls ϱ .

Beweis. (1). Wir zeigen zunächst, daß f an der Stelle a differenzierbar ist. Es gilt

7/4/4

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^{n-1}.$$

Da durch Potenzreihen stetige Funktionen dargestellt werden, ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = a_1 = f'(a).$$

(Siehe Korollar zu Satz 5.21 und das Lemma zum Identitätssatz für Potenzreihen.)

Um die Differenzierbarkeit von f an einer beliebigen Stelle $b \in (a - \varrho, a + \varrho)$ mit $b \neq a$ nachweisen zu können, benutzen wir den Umordnungssatz für Potenzreihen (Satz 4.24), indem wir die Ausgangsreihe nach Potenzen von $x - b$ umordnen.

Es sei $\varrho' := \varrho - |b - a|$ (> 0). Für jedes $x \in (b - \varrho', b + \varrho')$ gilt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - b)^n}_{:= g(x)}, \quad \text{wobei} \quad b_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m \binom{m}{n} (b - a)^{m-n}.$$

Nach den vorhergehenden Überlegungen ist $g(x)$ wenigstens an der Stelle b differenzierbar, und es ist

$$g'(b) = b_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \binom{m}{1} (b - a)^{m-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b - a)^{n-1}.$$

Wegen $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (b - \varrho', b + \varrho')$ ist $g'(b) = f'(b)$.

(2). Offenbar ist die (formal gliedweise) differenzierte Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1}$ an jeder Stelle $b \in (a - \varrho, a + \varrho)$ konvergent, folglich ist ihr Konvergenzradius $\geq \varrho$. Wäre er $> \varrho$, dann gäbe es ein c mit $|c - a| > \varrho$, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (c - a)^{n-1}$ und somit auch $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (c - a)^n$ absolut konvergieren. Für $n \geq 1$ gilt offenbar

$$|a_n(c - a)|^n \leq |n a_n (c - a)|^n.$$

Mit Hilfe des Majorantenkriteriums erhält man die Konvergenz von $\sum a_n(x - a)^n$ an der Stelle c . $\nexists!$

Folglich haben $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ und $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - a)^{n-1}$ den gleichen Konvergenzradius. \square