

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.2 Dreifachintegrale

Einfache Bereiche in \mathbb{R}^3

10/2/12

Es sei $[a_1, b_1]$ ein Intervall in \mathbb{R} , $\varphi_1, \psi_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ seien in $[a_1, b_1]$ stetig, und es sei $\varphi_1(x) \leq \psi_1(x)$ für alle $x \in [a_1, b_1]$. Dann ist

$$B' := \{(x, y) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)\}$$

ein x -einfacher Bereich in \mathbb{R}^2 (d.h. in der (x, y) -Ebene). Weiterhin seien φ_2, ψ_2 stetige Funktionen von B' in \mathbb{R} , und für alle $(x, y) \in B'$ gelte stets $\varphi_2(x, y) \leq \psi_2(x, y)$. Dann heißt

$$B := \{(x, y, z) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x), \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

einfacher Bereich in \mathbb{R}^3 .

Da die Variablen x, y, z hierbei gleichberechtigt sind, hätte man auch mit y oder z beginnen können. Die Entscheidung darüber, mit welcher der Variablen man beginnt, wird vernünftigerweise so getroffen, daß sich die anschließende Integration am einfachsten gestaltet.

Betrachtet man zunächst einen y -einfachen Bereich B' , dann startet man mit einem Intervall $[a_2, b_2]$ und entsprechenden stetigen Funktionen $\varphi_1, \psi_1 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $\varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y)$ für alle $y \in [a_2, b_2]$. Dann ist

$$B' = \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y), a_2 \leq y \leq b_2\} \quad \text{und} \\ B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

In der folgenden Abbildung ist B' ein y -einfacher Bereich und B ein einfacher dreidimensionaler Bereich.

Wir werden jetzt Dreifachintegrale auf einfachen Bereichen definieren.

10/2/14

Dazu sei $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Quader und $B \subseteq D$ ein einfacher Bereich; o.B.d.A. gehen wir von einem x -einfachen Bereich B' über $[a_1, b_1]$ aus.

Sei $f(x, y, z) := f(\bar{x})$ in B definiert und stetig und

$$f^*(\bar{x}) \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{für } \bar{x} \in B, \\ 0, & \text{für } \bar{x} \in D \setminus B. \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $x \in [a_1, b_1]$:

$$\begin{aligned} &\text{wenn } a_2 \leq y < \varphi_1(x), \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0, \\ &\text{wenn } \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x), \text{ so } f^*(\bar{x}) = f(\bar{x}), \\ &\text{wenn } \psi_1(x) < y \leq b_2, \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Für jedes $y \in [a_2, b_2]$ erhält man:

wenn $a_3 \leq z < \varphi_2(x, y)$, so $f^*(\bar{x}) = 0$,
wenn $\varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$, so $f^*(\bar{x}) = f(\bar{x})$,
wenn $\psi_2(x, y) < z \leq b_3$, so $f^*(\bar{x}) = 0$.

Definition. (*Dreifachintegral über einfachen Bereichen*)

10/2/18

Es sei B ein einfacher Bereich und D ein Quader, so daß $B \subseteq D$.

$f(x, y, z) : B \rightarrow \mathbb{R}$ sei in B stetig und f^* wie oben definiert.

f ist in B integrierbar $\stackrel{\text{Def}}{=} f^*$ ist in D integrierbar, und

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz \stackrel{\text{Def}}{=} \iiint_D f^*(x, y, z) dx dy dz.$$

$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz$ heißt dann *Dreifachintegral* (oder kurz *Integral*) von f über B .

Bemerkung. Völlig analog lassen sich auch *n-fache Integrale* definieren.

Satz 10.9 (*iterierte Integrale über einfachen Bereichen*)

10/2/19

Es sei B ein einfacher Bereich (in \mathbb{R}^3) und $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ seien wie oben definiert. Ist $f(x, y, z)$ in B stetig, dann ist f in B integrierbar, und es gilt:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$