

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Satz 6.13** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\bar{a} \in \mathbb{R}$ .

6/3/11

Ist  $f$  in  $\bar{a}$  stetig und  $f(\bar{a}) > 0$  (bzw.  $f(\bar{a}) < 0$ ), dann gibt es eine Umgebung  $U(\bar{a})$ , so daß  $f(\bar{x}) > 0$  (bzw.  $f(\bar{x}) < 0$ ) für alle  $\bar{x} \in U(\bar{a}) \cap D(f)$ .

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

**Definition.** (*Untersumme, Obersumme*)

9/2/3

Sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

(1)  $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$  heißt *Untersumme* von  $f$  in  $I$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$

$$\stackrel{\text{Df}}{\underline{S}_f(\mathfrak{z})} := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2)  $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$  heißt *Obersumme* von  $f$  in  $I$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$

$$\stackrel{\text{Df}}{\overline{S}_f(\mathfrak{z})} := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

**Definition.** (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von  $f$  in  $I$ , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von  $f$  in  $I$ .

$$\begin{aligned} \text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \underline{\int}_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \overline{\int}_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Sind Unter- und Oberintegral von  $f$  in  $I$  gleich, dann heißt  $f$  in  $I$  (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

## Übungsaufgaben

5. Beweisen Sie: Ist die Funktion  $f$  in dem Intervall  $[a, b]$  stetig und nicht negativ 9/10/5  
und ist  $\int_a^b f(x)dx = 0$ , so ist  $f(x) = 0$  für alle  $x \in [a, b]$ .  
[Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.]