

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Abschließend betrachten wir noch Funktionenfolgen. Dazu sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine in M definierte Funktion. Weiterhin sei auch $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in M definiert. 3/2/10

Definition. (*Konvergenz von Funktionenfolgen*)

(1) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert an der Stelle $a \in M$ gegen b

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = b.$$

(2) (f_n) konvergiert in M gegen die Funktion f

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } a \in M \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a),$$

(d.h., für jedes fixierte $a \in M$ konvergiert die Zahlenfolge $(f_n(a))$ gegen die Zahl $f(a)$; diese Art Konvergenz nennen wir auch *punktweise Konvergenz*).

$$\text{Bez.: } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

(3) (f_n) konvergiert in M

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert eine Funktion } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ so daß } (f_n) \text{ in } M \text{ gegen } f \text{ konvergiert.}$

Definition. (*gleichmäßige Konvergenz*)

3/2/12

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert in M gleichmäßig gegen f

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } n_0, \text{ so daß für jedes } n \geq n_0 \text{ und für alle } x \in M \text{ gilt: } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*absolute Konvergenz*)

4/1/15

$\sum a_i$ ist absolut konvergent $\stackrel{\text{Df}}{=} \sum |a_i|$ ist konvergent.

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Definition. (*Funktionenreihe*)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine Folge von Funktionen, die alle in M definiert sind, und es sei

$F_n := \sum_{i=0}^n f_i$ (die F_n sind also ebenfalls in M definierte Funktionen).

(1) Die Folge (F_n) heißt *Funktionenreihe*.

Bez.: $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ bzw. $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$ oder einfach $\sum f_i$ bzw. $\sum f_i(x)$

(2) $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M *konvergent* (bzw. *gleichmäßig konvergent*) gegen f

$\stackrel{\text{Df}}{=} (F_n)$ ist in M konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen f .

(3) $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M *absolut konvergent* gegen f

$\stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$ ist in M konvergent gegen f .