

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*absolute Konvergenz*)

4/1/15

$\sum a_i$ ist *absolut konvergent* $\stackrel{\text{Df}}{=} \sum |a_i|$ ist konvergent.

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Satz 4.14 (*Multiplikation unendlicher Reihen*)

4/2/13

Voraussetzungen:

(1) Es seien $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $\sum a_m = a$, $\sum b_n = b$.

(2) f sei eine Bijektion zwischen \mathbb{N} und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(Die Existenz einer solchen Bijektion weist man mit dem 1. Cantorschen Diagonalverfahren nach).

(3) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $f(i) = (m_i, n_i)$ und $c_i = a_{m_i} b_{n_i}$.

Behauptung:

$\sum_{i=0}^{\infty} c_i$ ist absolut konvergent, und es ist $\sum_{i=0}^{\infty} c_i = \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = a \cdot b$.

Definition. (*Cauchyprodukt*)

4/2/16

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist das *Cauchyprodukt* der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$

$\stackrel{\text{Df}}{=} c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$.

4.5 Rechnen mit Potenzreihen

Satz 4.23 (*Produkt von Potenzreihen*)

4/5/2

Es seien $\sum a_n(x-a)^n$ und $\sum b_n(x-a)^n$ Potenzreihen mit den Konvergenzradien

ϱ_1 bzw. ϱ_2 , und es sei $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ ($= \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} b_{n-\nu}$). Dann gilt:

(1) Die Potenzreihe $\sum c_n(x-a)^n$ hat einen Konvergenzradius $\varrho \geq \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$.

(2) Für $|x-a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ ist

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Beweis. Für $|x - a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ konvergieren beide Potenzreihen absolut; folglich läßt sich ihr Cauchyprodukt bilden (vgl. Satz 4.14), das auch wenigstens dort absolut konvergiert. Also $\varrho \geq \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ und

4/5/3

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} (x-a)^{\nu} \cdot b_{n-\nu} (x-a)^{n-\nu} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} b_{n-\nu} \cdot (x-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^n \cdot \underbrace{\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} b_{n-\nu}}_{=c_n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n. \end{aligned}$$

Für $|x-a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ konvergiert $\sum c_n (x-a)^n$ absolut (vgl. Satz 4.14). \square