

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Definition. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe.

4/2/1

$\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ entsteht aus $\sum a_n$ durch das *Setzen von Klammern*

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine streng monoton wachsende Folge $(n_i)_{i=0,1,2,\dots}$ von natürlichen Zahlen, so daß gilt:

$$b_0 = a_0 + \cdots + a_{n_0},$$

$$b_1 = a_{n_0+1} + \cdots + a_{n_1},$$

\vdots

$$b_{i+1} = a_{n_i+1} + \cdots + a_{n_{i+1}},$$

\vdots

Bemerkung. In der Ausgangsreihe werden gewisse aufeinanderfolgende Glieder durch Klammern zusammengefaßt.

4/2/2

Satz 4.11 In einer konvergenten Reihe können Klammern beliebig gesetzt werden, ohne das Konvergenzverhalten und den Wert der Reihe zu verändern.

4/2/3

(D.h., für konvergente Reihen gilt das allgemeinste Assoziativgesetz.)

Beweis. Sei $\sum a_n$ konvergent, $\sum a_n = a$, und sei $\sum b_i$ durch das Setzen von Klammern aus $\sum a_n$ entstanden. Weiterhin sei $S_m = \sum_{n=0}^m a_n$ und

4/2/4

$$S'_m = \sum_{i=0}^m b_i = \underbrace{a_0 + \cdots + a_{n_0}}_{:= b_0} + \cdots + \underbrace{a_{n_{m-1}+1} + \cdots + a_{n_m}}_{b_m} = S_{n_m}.$$

Offenbar ist $(S'_m) = (S_{n_m})$ eine Teilfolge von (S_m) . Wegen $S_m \rightarrow a$ konvergiert auch (S'_m) als Teilfolge von (S_m) gegen a ; also $S'_m \rightarrow a \implies \sum_{i=0}^{\infty} b_i = a$. \square

Bemerkung. In einer beliebigen Reihe dürfen Klammern nicht immer gesetzt oder weggelassen werden, ohne das Konvergenzverhalten zu verändern.

4/2/5

Beispiel. $\sum_{i=0}^{\infty} 0 = 0 + 0 + 0 + \cdots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$ ist konvergent.

4/2/6

Weglassen der Klammern in der letzten Reihe liefert $1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots$, also eine divergente Reihe.

Geht man von der divergenten Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots$ aus, dann dürfen hier nicht beliebig Klammern gesetzt werden, denn z.B. $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$ macht aus der ursprünglich divergenten Reihe eine konvergente.

Wir haben schon gezeigt, daß konvergente Reihen nicht beliebig umgeordnet werden dürfen (vgl. Beispiel 2 := 4/1/30/2). Mit Hilfe einer Definition sollen die Reihen hervorgehoben werden, bei denen dies erlaubt ist. 4/2/7

Definition. (*unbedingte Konvergenz*) 4/2/8

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion (oder auch *Permutation* von \mathbb{N}).

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ durch *Umordnung* aus $\sum a_n$ entstanden.

$\sum a_n$ heißt *unbedingt konvergent*

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Jede durch Umordnung aus } \sum a_n \text{ entstandene Reihe ist konvergent.}$

Satz 4.12 *Eine absolut konvergente Reihe konvergiert unbedingt und zwar immer gegen denselben Wert.* 4/2/9

(D.h., für absolut konvergente Reihen gilt das allgemeinste Kommutativgesetz.)

Beweis. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, $\sum a_n = a$ und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Permutation von \mathbb{N} . 4/2/10

Behauptung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ konvergiert gegen a .

z.z.: Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein n^* , so daß für jedes $n \geq n^*$ gilt: $|a_{f(0)} + \dots + a_{f(n)} - a| < \varepsilon$.

Es sei

$$S_m = \sum_{n=0}^m a_n, \quad S'_m = \sum_{n=0}^m a_{f(n)} \quad \text{und} \quad S''_m = \sum_{n=0}^m |a_n|.$$

Nach Voraussetzung ist (S''_m) konvergent. Folglich gilt nach dem Cauchy-Kriterium: Es existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und jedes $k \geq 1$:

$$|a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da k beliebig ist, erhält man daraus für je endlich viele n_1, \dots, n_l , die sämtlich größer als n_0 sind:

$$|a_{n_1}| + \dots + |a_{n_l}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Voraussetzung gilt weiterhin: Es existiert ein m_0 , so daß für jedes $n \geq m_0$:

$$|S_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $k_0 = \{n_0, m_0\}$. Da f eine Permutation von \mathbb{N} ist, kommen $0, 1, \dots, k_0$ unter den Elementen $f(0), f(1), f(2), \dots$ vor. Sei nun n^* so groß gewählt, daß $0, 1, \dots, k_0$ schon unter den Elementen $f(0), \dots, f(n^*)$ vorkommen.

g.z.z.: für $m \geq n^*$ gilt: $|S'_m - a| < \varepsilon$.

$$S'_m = a_{f(0)} + \dots + a_{f(m)} = a_0 + \dots + a_{k_0} + a_{f(i_1)} + \dots + a_{f(i_l)};$$

wobei $\{f(i_1), \dots, f(i_l)\} = \{f(0), \dots, f(m)\} \setminus \{0, \dots, k_0\}$; insbesondere ist $f(i_j) > k_0$ für $j = 1, \dots, l$.

Dann ist

$$\begin{aligned} |S'_m - a| &= |a_0 + \dots + a_{k_0} + a_{f(i_1)} + \dots + a_{f(i_l)} - a| \\ &\leq |a_0 + \dots + a_{k_0} - a| + |a_{f(i_1)} + \dots + a_{f(i_l)}| \\ &\leq \underbrace{|S_{k_0} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{f(i_1)}| + \dots + |a_{f(i_l)}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 4.13 (Umordnungssatz von Riemann)

4/2/11

Ist $\sum a_n$ konvergent und nicht absolut konvergent, dann existiert für jedes $c \in \mathbb{R}$ bzw. für $c = \pm\infty$ eine Umordnung $\sum b_i$ von $\sum a_n$, so daß $\sum b_i = c$.

Beweis. Die Konvergenz von $\sum a_n$ bewirkt, daß $a_n \rightarrow 0$.

4/2/12

Setzt man

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n & \text{für } a_n \geq 0, \\ 0 & \text{für } a_n < 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad a_n^- := \begin{cases} -a_n & \text{für } a_n \leq 0, \\ 0 & \text{für } a_n > 0, \end{cases}$$

dann ist offenbar

$$a_n = a_n^+ - a_n^- \quad \text{und} \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-.$$

Da $\sum a_n$ nicht absolut konvergiert, sind die beiden Reihen $\sum a_n^+$ und $\sum a_n^-$ divergent. Wären beide Reihen konvergent, so ist wegen $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ nach Satz 4.4 auch $\sum |a_n|$ konvergent. **!**

Wäre eine der beiden Reihen konvergent, etwa $\sum a_n^+$ und die andere divergent, so erhält man wiederum nach Satz 4.4 aus $a_n^- = a_n^+ - a_n$ die Konvergenz von $\sum a_n^-$; hieraus ergibt sich erneut ein Widerspruch.

Da a_n^+ und a_n^- stets nicht negativ sind, divergieren beide Reihen bestimmt gegen $+\infty$. Dies nutzen wir aus, um die Behauptung des Umordnungssatzes zu beweisen.

Es sei zunächst $c \in \mathbb{R}$ und $c \geq 0$ (den Fall $c < 0$ behandelt man analog). Induktiv definiert man Folgen (S_{n_ν}) , (S'_{m_ν}) , deren Glieder aus je endlich vielen ausgewählten Summanden von $\sum a_n^+$ bzw. $\sum a_n^-$ bestehen. Wir geben hier nur an, wie man vom nullten zum ersten Folgenglied kommt, der eigentliche Induktionsschritt ist daraus klar ersichtlich.

1. Es seien $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{i=0}^{n_0-1} a_i^+ \leq c < \sum_{i=0}^{n_0} a_i^+ := S_{n_0} \quad \text{und} \\ S_{n_0} - \sum_{i=0}^{m_0-1} a_i^- \geq c > S_{n_0} - \sum_{i=0}^{m_0} a_i^- := S'_{m_0}.$$

2. Für den nächsten Schritt seien $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$, so daß

$$S'_{m_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n_1-1} a_i^+ \leq c < S'_{m_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i^+ := S_{n_1} \quad \text{und} \\ S_{n_1} - \sum_{i=m_0+1}^{m_1-1} a_i^- \geq c > S_{n_1} - \sum_{i=m_0+1}^{m_1} a_i^- := S'_{m_1}.$$

Bei jedem Schritt wird wenigstens ein Glied aus jeder der beiden Reihen $\sum a_n^+$ und $\sum a_n^-$ verbraucht.

Wir betrachten jetzt die folgende Umordnung der Ausgangsreihe $\sum a_n$ (wobei die aufgrund der Definition von a_i^+ und a_i^- „künstlich“ eingeführten Nullen ersatzlos gestrichen werden können, ohne das Konvergenzverhalten und den Wert der Reihe zu verändern):

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i = a_0^+ + \cdots + a_{n_0}^+ - a_0^- - \cdots - a_{m_0}^- + \\ a_{n_0}^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_{m_0}^- - \cdots - a_{m_1}^- \pm \cdots$$

und beweisen, daß $\sum_{i=0}^{\infty} b_i = c$.

Aus der Definition von (S_{n_ν}) , (S'_{m_ν}) folgt unmittelbar, daß stets

$$0 < S_{n_\nu} - c < a_{n_\nu}^+ \quad \text{und} \quad 0 < c - S'_{m_\nu} < a_{m_\nu}^-.$$

Wegen $a_n \rightarrow 0$ ist $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_{n_\nu} = c = \lim_{\nu \rightarrow \infty} S'_{m_\nu}$.

Ist $S_n^* := \sum_{i=0}^n b_i$ eine beliebige Partialsumme von $\sum b_i$, dann gibt es offenbar ein $k \in \mathbb{N}$, so daß

$$S'_{m_k} \leq S_n^* \leq S_{n_k} \quad \text{oder} \quad S'_{m_k} \leq S_n^* \leq S_{n_{k+1}}.$$

Folglich ist $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* = c = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$.

Es sei jetzt $c = \infty$ (für $c = -\infty$ verläuft der Beweis analog).

Wegen $a_n \rightarrow 0$ ist $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ für fast alle n . Es genügt eine Umordnung $\sum b_i$ von $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ anzugeben, die bestimmt gegen ∞ divergiert; die fehlenden Summanden a_0, \dots, a_k können an den Anfang der Reihe gesetzt werden, ohne das Divergenzverhalten der Reihe zu beeinflussen. (Aus technischen Gründen werden auch hier wieder, wie im vorhergehenden Fall, Nullen eingefügt, die man ersatzlos streichen kann.)

Es ist $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_{n+k}}_{:=d_n} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$.

Sei n_0 die kleinste natürliche Zahl, so daß

$$U_0 := \sum_{i=0}^{n_0} d_i^+ \geq \frac{3}{2}$$

und n_1 die kleinste natürliche Zahl, so daß

$$U_1 := \sum_{i=n_0+1}^{n_1} d_i^+ \geq \frac{3}{2} \text{ usw.}$$

Solche Zahlen gibt es, da $\sum d_i^+$ bestimmt gegen ∞ divergiert.

Wegen $|d_i| \leq \frac{1}{2}$ für alle i ist stets $U_i - d_i^- \geq 1$.

Die Umordnung

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} b_i &:= d_0^+ + \dots + d_{n_0}^+ - d_0^- + d_{n_0+1}^+ \dots + d_{n_1}^+ - d_1^- \pm \dots \\ &= U_0 - d_0^- + U_1 - d_1^- \pm \dots \end{aligned}$$

leistet das Verlangte. Denn ist $S_m = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ eine beliebige Partialsumme von $\sum b_i$, dann gibt es offenbar ein maximales $k \in \mathbb{N}$, so daß

$$S_m = U_0 - d_0^- + \dots + U_k - d_k^- \text{ oder}$$

$$S_m = U_0 - d_0^- + \dots + U_k - d_k^- + d_{k+1}^+ + \dots + d_m^+.$$

Wegen $d_i^+ \geq 0$ ist $S_m \geq k + 1$. Hieraus folgt schließlich $S_m \rightarrow \infty$. \square

Satz 4.14 (Multiplikation unendlicher Reihen)

4/2/13

Voraussetzungen:

(1) Es seien $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $\sum a_m = a$, $\sum b_n = b$.

(2) f sei eine Bijektion zwischen \mathbb{N} und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(Die Existenz einer solchen Bijektion weist man mit dem 1. Cantorschen Diagonalverfahren nach).

(3) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $f(i) = (m_i, n_i)$ und $c_i = a_{m_i} b_{n_i}$.

Behauptung:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i \text{ ist absolut konvergent, und es ist } \sum_{i=0}^{\infty} c_i = \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = a \cdot b.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\sum c_i$ absolut konvergiert.

4/2/14

g.z.z.: Die Folge der Partialsummen von $\sum |c_i|$ ist nach oben beschränkt.

Nach Voraussetzung existiert für jedes $i \in \mathbb{N}$ genau ein Paar $(m_i, n_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so daß $f(i) = (m_i, n_i)$, also $c_i = a_{m_i} b_{n_i}$.

Wir bilden

$$S_k := \sum_{i=0}^k |c_i| = \sum_{i=0}^k |a_{m_i} b_{n_i}| := (\star).$$

Sei $l = \max\{m_0, \dots, m_k, n_0, \dots, n_k\}$. Die Summanden aus (\star) kommen unter den Summanden aus $|a_0 b_0| + \dots + |a_i b_j| + \dots + |a_l b_l|$ vor, wobei $i, j \leq l$.

Dann ist

$$\begin{aligned} S_k = (\star) &\leq |a_0 b_0| + \dots + |a_i b_j| + \dots + |a_l b_l| \\ &= \left(\underbrace{|a_0| + \dots + |a_l|}_{:= S'_l} \right) \cdot \left(\underbrace{|b_0| + \dots + |b_l|}_{:= S''_l} \right) = S'_l \cdot S''_l. \end{aligned}$$

Da $\sum |a_i|$, $\sum |b_i|$ nach Voraussetzung konvergieren, sind (S'_n) , (S''_n) beschränkt. Folglich ist $(S'_n \cdot S''_n)$ beschränkt und somit ist auch (S_k) beschränkt. Hieraus ergibt sich die Konvergenz von $\sum |c_i|$ und damit die absolute Konvergenz von $\sum c_i$.

Behauptung: $\sum c_i = a \cdot b$.

Da $\sum c_i$ absolut konvergiert, ist jede Umordnung von $\sum c_i$ ebenfalls konvergent und zwar gegen den gleichen Wert.

Wir betrachten eine spezielle Umordnung und Zusammenfassung bestimmter Summanden:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} c_i &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{m_i} b_{n_i} = \underbrace{a_0 b_0}_{:= c'_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_1 b_0)}_{:= c'_1} + \dots + \\ &\quad \underbrace{(a_0 b_i + a_1 b_i + \dots + a_i b_i + a_i b_{i-1} + \dots + a_i b_0)}_{:= c'_i} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} c'_i. \end{aligned}$$

Es seien

$$S_n^* = \sum_{i=0}^n c'_i, \quad S_n^{**} = \sum_{i=0}^n a_i \quad \text{und} \quad S_n^{***} = \sum_{i=0}^n b_i.$$

Dann gilt für die oben angegebene Umordnung: $S_n^* = S_n^{**} \cdot S_n^{***}$.
Wegen $S_n^{**} \rightarrow a$, $S_n^{***} \rightarrow b$ gilt $S_n^* = S_n^{**} \cdot S_n^{***} \rightarrow a \cdot b$, also

$$\sum c_i = a \cdot b = \left(\sum a_m \right) \cdot \left(\sum b_n \right). \quad \square$$

Bemerkung. Da bei absolut konvergenten Reihen die Reihenfolge der Glieder keine Rolle spielt, kann in der Produktreihe $\sum c_n = \left(\sum a_i \right) \cdot \left(\sum b_j \right)$ eine geeignete Reihenfolge ausgezeichnet werden. Dies führt zum sog. Cauchyprodukt. 4/2/15

Definition. (*Cauchyprodukt*) 4/2/16

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist das *Cauchyprodukt* der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$
 $\stackrel{\text{Df}}{=} c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$.

Es gilt also: 4/2/17

$$\begin{aligned} \sum c_n &= \left(\sum a_i \right) \cdot \left(\sum b_j \right) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \\ &\quad (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) \quad (\text{für } j = n - i). \end{aligned}$$

Beispiel. 4/2/18

Das Cauchyprodukt von absolut konvergenten Reihen ist wieder absolut konvergent.

Es sei $|a| < 1$. Dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ absolut konvergent und $\sum a^i = \frac{1}{1-a}$.

Folglich ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a^i}_{=\frac{1}{1-a}} \right) \cdot \left(\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a^j}_{=\frac{1}{1-a}} \right) = \frac{1}{(1-a)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} \underbrace{a^i a^j}_{a^n} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \underbrace{\left(\sum_{i+j=n} 1 \right)}_{=n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a^n.$$

Also

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a^n = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

Offenbar ist $|n \cdot a^n| \leq |(n+1) \cdot a^n|$. Folglich ist $\sum (n+1)|a|^n$ eine konvergente Majorante von $\sum n|a|^n$. Dann ist $\sum n \cdot a^n$ absolut konvergent, und damit gilt

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a^n}_{= \frac{1}{(1-a)^2}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a^n}_{= \frac{1}{1-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a^n.$$

Folglich ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a^n = \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{1-a} = \frac{1 - (1-a)}{(1-a)^2} = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

Auf diese Weise erhält man neue Beispiele für absolut konvergente Reihen.

Wir befassen uns jetzt noch kurz mit sogenannten *Doppelreihen*. Dazu sei

4/2/19

$$(a_{mn}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

eine „unendliche Matrix“. Eine Matrix dieser Art nennen wir auch *Doppelfolge*. Die *Doppelfolge* (a_{mn}) *konvergiert* gegen a , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für alle $m, n \geq n_0$ gilt: $|a_{mn} - a| < \varepsilon$. **Bez.:** $\lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{mn} = a$

Es sei jetzt

$$S_{mn} := \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} = (a_{00} + \dots + a_{0n}) + (a_{10} + \dots + a_{1n}) + \dots + (a_{m0} + \dots + a_{mn}).$$

Dann heißt (analog wie bei der Definition von Reihen) die Doppelfolge (S_{mn}) auch *Doppelreihe*.

$$\mathbf{Bez.:} \quad (S_{mn}) := \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$$

Die *Doppelreihe konvergiert* gegen a , wenn (S_{mn}) gegen a konvergiert.

$$\mathbf{Bez.:} \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = a$$

Es erhebt sich nun die Frage, ob man den Limes $\lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn}$ (falls er existiert) auch so berechnen kann, indem man zunächst die Zeilensummen $b_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ bildet und anschließend die unendliche Summe der b_i betrachtet (falls diese Reihen konvergieren; eine entsprechende Frage könnte auch für die Spaltensummen gestellt werden). Unter gewissen Voraussetzungen kann der Limes tatsächlich so bestimmt werden. Aufschluß darüber gibt der folgende Satz.

Satz 4.15 (Großer Umordnungssatz)

4/2/20

Es sei $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ eine Doppelreihe, $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Bijektion, und für $\varphi(\nu) = (i, j)$

sei $b_\nu := a_{ij}$. Weiterhin sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ absolut konvergent und $\sum b_\nu = b$. Dann gilt:

- (1) Jede Zeilenreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} := Z_i$ konvergiert absolut.
- (2) Jede Spaltenreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} := S_j$ konvergiert absolut.
- (3) Die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} Z_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} S_j$ konvergieren absolut, und es ist
$$\sum_{i=0}^{\infty} Z_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j = b.$$

Beweis. Sei $|b_\nu| = \beta_\nu$. Nach Voraussetzung konvergiert $\sum \beta_\nu$; es sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu = \beta$. 4/2/21

Wegen $\beta_\nu \geq 0$ ist die Summe je endlich vieler $\beta_{\nu_1}, \dots, \beta_{\nu_k}$ stets $\leq \beta$. Damit erhält man

- (1). $\sum_{j=0}^n \underbrace{|a_{ij}|}_{=\beta_\nu} \leq \beta$ für alle n . Folglich ist $Z_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent.
- (2). Weiterhin ist $\sum_{i=0}^m |a_{ij}| \leq \beta$ für alle m . Damit ist auch $S_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent.
- (3). Es ist auch $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n |a_{ij}| \leq \beta$ für alle m, n .

Nach Behauptung (1) existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |a_{ij}| := \alpha_i$. Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n |a_{ij}|}_{\leq \beta} = \sum_{i=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |a_{ij}| = \sum_{i=0}^m \alpha_i \leq \beta.$$

Weiterhin ist

$$|Z_i| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=0}^n a_{ij} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |a_{ij}| = \alpha_i.$$

Also gilt stets

$$\sum_{i=0}^m |Z_i| \leq \sum_{i=0}^m \alpha_i \leq \beta.$$

Folglich ist $\sum Z_i$ absolut konvergent.

Analog zeigt man die absolute Konvergenz von $\sum S_j$.

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existieren nach Voraussetzung bzw. nach den obigen Ausführungen natürliche Zahlen n_1, n_2 , so daß für alle $n \geq n_1$ und alle $k \geq 0$ gilt:

$$|b_1 + \cdots + b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \\ \beta_{n_2+1} + \cdots + \beta_{n_2+k} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\star)$$

Sei $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. In der Aufzählung $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n_0)$ kommen nur endlich viele Paare $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vor. Folglich existiert ein m_0 , so daß $\varphi(0), \dots, \varphi(n_0)$ schon in der Menge $\{(i, j) : i \leq m_0, j \leq m_0\}$ auftreten.

Wählt man $m, n \geq m_0$, dann ist

$$\left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} - b \right| = |b_1 + \cdots + b_{n_0} - b + r|,$$

wobei r eine endliche Summe ist, die aus gewissen Gliedern $a_{ij} := b_\nu$ besteht, deren Indizes ν größer als n_0 sind.

Wegen (\star) folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung $|r| < \frac{\varepsilon}{2}$. Also erhält man für alle $m, n \geq n_0$:

$$\left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} - b \right| \leq |b_1 + \cdots + b_{n_0} - b| + |r| < \varepsilon. \quad (\star\star)$$

Für $n \rightarrow \infty$ in $(\star\star)$ erhält man

$$\left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} - b \right| = \left| \sum_{i=0}^m Z_i - b \right| \leq \varepsilon.$$

(Die Konvergenz der inneren Reihe ist schon nachgewiesen.)

Für $m \rightarrow \infty$ entsteht

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} Z_i - b \right| \leq \varepsilon \quad \implies \quad \sum_{i=0}^{\infty} Z_i = b.$$

Wegen $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij}$ erhält man aus $(\star\star)$ analog

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} S_j - b \right| \leq \varepsilon \quad \implies \quad \sum_{j=0}^{\infty} S_j = b. \quad \square$$

Korollar. Es sei $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ eine Doppelreihe, $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Bijektion, und für 4/2/22

$\varphi(\nu) = (i, j)$ sei $b_{\nu} := a_{ij}$. Weiterhin sei jede Zeilenreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent,

$\sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| := \alpha_i$, und die Reihe $\sum \alpha_i$ sei ebenfalls konvergent. Dann gilt:

(1) $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}$ ist absolut konvergent.

(2) Mit $b := \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}$ gelten auch die Behauptungen (2)–(4) aus dem vorhergehenden Satz 4.15.

Beweis. Es sei $\sum_{\nu=0}^n |b_{\nu}|$ eine Partialsumme von $\sum b_{\nu}$. Dann gibt es eine Zahl k , 4/2/23
so daß alle Paare $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ in der Menge $\{(i, j) : i \leq k, j \leq k\}$ vorkommen. Folglich ist

$$\sum_{\nu=0}^n |b_{\nu}| \leq \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k |a_{ij}| \leq \sum_{i=0}^k \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}|}_{=\alpha_i} = \sum_{i=0}^k \alpha_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i.$$

Dann ist die (monoton wachsende) Folge der Partialsummen von $\sum |b_{\nu}|$ nach oben beschränkt und folglich absolut konvergent. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 4.15 erfüllt und das Korollar bewiesen. \square