

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Satz 3.8 Eine monotone Folge ist konvergent gdw sie beschränkt ist.

3/1/33

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Korollar. Es sei $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ eine Doppelreihe, $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Bijektion, und für $4/2/22$

$\varphi(\nu) = (i, j)$ sei $b_{\nu} := a_{ij}$. Weiterhin sei jede Zeilenreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent,

$\sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| := \alpha_i$, und die Reihe $\sum \alpha_i$ sei ebenfalls konvergent. Dann gilt:

(1) $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}$ ist absolut konvergent.

(2) Mit $b := \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}$ gelten auch die Behauptungen (2)–(4) aus dem vorhergehenden Satz 4.15.

Beweis. Es sei $\sum_{\nu=0}^n |b_{\nu}|$ eine Partialsumme von $\sum b_{\nu}$. Dann gibt es eine Zahl k ,
so daß alle Paare $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ in der Menge $\{(i, j) : i \leq k, j \leq k\}$ vorkommen.
Folglich ist

4/2/23

$$\sum_{\nu=0}^n |b_{\nu}| \leq \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k |a_{ij}| \leq \sum_{i=0}^k \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}|}_{=\alpha_i} = \sum_{i=0}^k \alpha_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i.$$

Dann ist die (monoton wachsende) Folge der Partialsummen von $\sum |b_{\nu}|$ nach oben beschränkt und folglich absolut konvergent. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 4.15 erfüllt und das Korollar bewiesen. \square