

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. f ist eine *reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen*
 $\overline{\text{Df}}$ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $b \in \mathbb{R}$, so daß $(a, b) \in f$.

5/1/7

Bez.: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Stetigkeit*)

5/2/1

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *stetig*
 $\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$
 gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
 (d.h., für jede ε -Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ -Umgebung von a , so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

Definition. (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) f ist *stetig in* M

$\overline{\text{Df}}$ f ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.

(2) f ist *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ f ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

Beispiele.

3. Es sei $f(x) = x^2$, $D(f) = \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

5/2/4/3

Um die Stetigkeit von $f(x)$ in a nachweisen zu können, haben wir (entsprechend der Definition) für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit den geforderten Eigenschaften zu finden. Es ist

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x + a| \cdot |x - a| := (\star)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Erste Näherung für δ : $0 < \delta \leq 1$.

Dann ist $|x + a| = |x - a + 2a| \leq \underbrace{|x - a|}_{< \delta \leq 1} + |2a| \leq 1 + |2a|$.

Folglich ist

$$|f(x) - f(a)| = (\star) \leq |x + a| \cdot |x - a| \leq (1 + |2a|) \cdot |x - a|.$$

Wählt man jetzt $\delta \leq \frac{\varepsilon}{1 + |2a|}$, dann ist für $|x - a| < \delta$ auch $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.