

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.2 Partielle Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung

Es sei $f(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung eines Punktes nach allen Variablen partiell differenzierbar. Dann entstehen offenbar beim partiellen Differenzieren neue Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) := \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, die ebenfalls von \bar{x} abhängen. Diese partiellen Ableitungen können wieder nach gewissen Variablen partiell differenzierbar sein, etwa nach der Variablen x_j . 8/2/0

Bildet man $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \right)$, dann erhält man die 2. partielle Ableitung von f nach x_i und x_j in \bar{x} .

$$\text{Bez.: } \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \right) := \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_i x_j}(\bar{x})$$

Für $i = j$ schreibt man $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \right) := \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i^2} = f_{x_i x_i}(\bar{x})$. 8/2/1

Ist $i \neq j$, dann nennt man die 2. partiellen Ableitungen auch *gemischte partielle Ableitungen*.

Nach dem gleichen Muster definiert man induktiv die *n-ten partiellen Ableitungen*. Hierfür benutzt man die Bezeichnung

$$\frac{\partial^n f(\bar{x})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} = f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}(\bar{x}), \quad \text{wobei } i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}.$$

Satz 8.9 (Satz von Schwarz)

8/2/2

Es sei $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$.

Ist f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert und existieren in $U(\bar{c})$ die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xy} und ist f_{xy} in \bar{c} stetig, dann existiert auch f_{yx} in \bar{c} , und es ist $f_{xy}(\bar{c}) = f_{yx}(\bar{c})$.

(Unter den angegebenen Bedingungen sind die gemischten Ableitungen in \bar{c} gleich.)

Beweis. Es sei $\bar{c} = (a, b)$ und $\bar{x} = (x, y)$.

8/2/3

Wir zeigen, daß $f_{yx}(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_y(x, b) - f_y(a, b)}{x - a}$ existiert und gleich $f_{xy}(a, b)$ ist.

Nach Voraussetzung ist f in $U(\bar{c})$ partiell nach x differenzierbar. Folglich läßt sich auf f (bei festgehaltenem y) der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung bezüglich x anwenden. Damit erhält man für alle $(x, y) \in U(\bar{c})$ und $x \neq a, y \neq b$:

$$\frac{1}{x - a} \cdot (f_y(x, b) - f_y(a, b))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x-a} \cdot \left(\lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{y-b} \cdot \underbrace{(f(x,y) - f(x,b))}_{:= g(x,y)} - \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{y-b} \cdot \underbrace{(f(a,y) - f(a,b))}_{= g(a,y)} \right) \\
&= \frac{1}{x-a} \cdot \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{y-b} \cdot (g(x,y) - g(a,y)) \\
&= \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{y-b} \cdot \frac{g(x,y) - g(a,y)}{x-a} \\
&= \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{y-b} \cdot g_x(\underbrace{a + \vartheta(x-a)}_{:= u}, y) \quad (1. \text{ Mittelwertsatz, } y \text{ fest, } 0 < \vartheta < 1) \\
&= \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{y-b} \cdot (f_x(u,y) - f_x(u,b)) \\
&= f_{xy}(u,b). \quad (f_{xy} \text{ existiert in } U(\bar{c}))
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung f_{xy} in \bar{c} stetig ist, existieren die folgenden Limites und es gilt:

$$f_{yx}(a,b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \cdot (f_y(x,b) - f_y(a,b)) = \lim_{x \rightarrow a} f_{xy}(u,b) = f_{xy}(a,b). \quad \square$$

Bemerkung.

8/2/4

Ist $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ und existieren in einer Umgebung $U(\bar{c})$ die partiellen Ableitungen f_{x_i} , f_{x_j} und $f_{x_i x_j}$ und ist $f_{x_i x_j}$ in \bar{c} stetig, dann existiert auch $f_{x_j x_i}$ in \bar{c} , und es ist $f_{x_i x_j}(\bar{c}) = f_{x_j x_i}(\bar{c})$.

Den Beweis hierzu führt man leicht auf den vorhergehenden Satz zurück.

Wir befassen uns jetzt mit *Differentiellen höherer Ordnung*.

Dazu sei $f(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Das 1. Differential wurde als Funktion $df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die sich darstellen läßt in der Form

$$df := \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

wobei die dx_i als konstant anzusehen sind.

Wir berechnen (definieren) jetzt das 2. Differential von f wie folgt.

$$\begin{aligned}
d^2 f &:= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right) \\
&= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n \quad (dx_i \text{ konstant !}) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_n\right) dx_1 + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right) dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right) dx_n \right) dx_n \\
& = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) dx_n dx_1 + \dots \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right) dx_1 dx_n + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right) dx_n dx_n \\
& = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} dx_1 dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} dx_n dx_1 + \dots \\
& \quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} dx_1 dx_n + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} dx_n dx_n \\
& = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n^2 \quad (i \neq j).
\end{aligned}$$

Sind die gemischten Ableitungen gleich, dann gilt

$$d^2 f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i.$$

Analog definiert man induktiv

$$d^{n+1} f := d(d^n f).$$

(Hierbei ist der Satz von Schwarz sehr nützlich.)

Beispiel.

8/2/5

Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Folglich ist

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 2x dx + 2y dy.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
d^2 f &= d(df) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = \\
&= 2dx^2 + 2dy^2,
\end{aligned}$$

und schließlich

$$d^3 f = 0, \quad (\text{denn alle dritten partiellen Ableitungen sind null}).$$