

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.8 Länge von Kurven

Beispiele. Wir geben jetzt einige wichtige Beispiele von Kurven an (vgl. auch die Abbildungen 6.9 und 6.10 aus dem Kapitel 6). 9/8/2

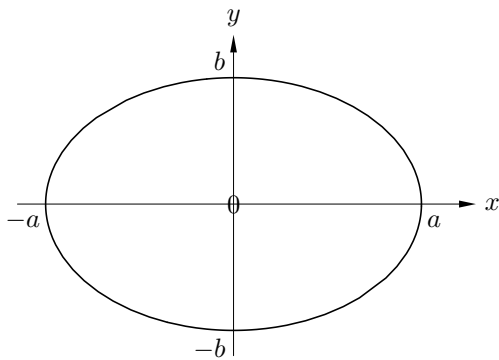


Abb. 9.20 Durch $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ist eine Ellipse definiert. Für $a = b$ entsteht ein Kreis.

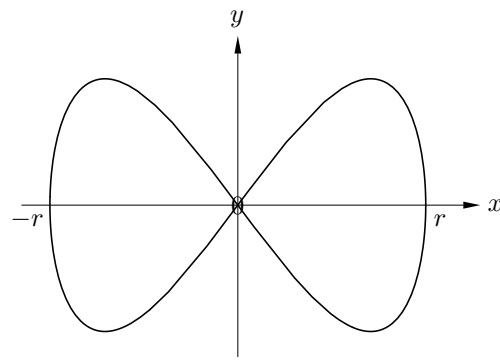


Abb. 9.21 Durch $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (r \cos t, r \sin 2t)$ ist eine Lemniskate definiert.

Die nächste Abbildung zeigt eine sog. *Schraubenlinie*.

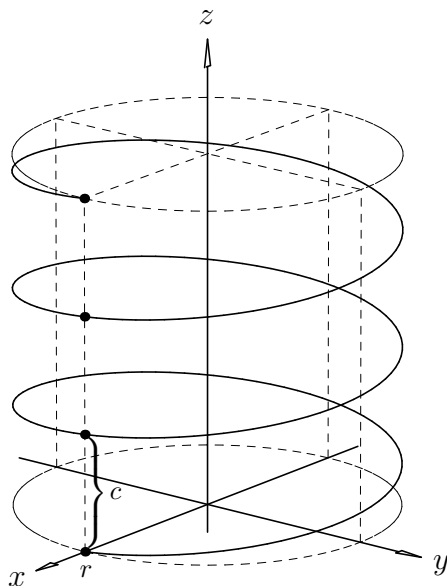


Abb. 9.22 Durch $f := [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$ ist eine Schraubenlinie mit der (positiven) Ganghöhe c definiert (Rechtsgewinde). Wenn t das Intervall $[2i\pi, 2(i+1)\pi]$ durchläuft ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$), dann durchläuft $f(t)$ genau einen Gewindegang. In der Abbildung sind drei Gewindegänge dargestellt. Für $c < 0$ entsteht eine „absteigende“ Schraubenlinie (Linksgewinde).

Satz 9.23 Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist \mathfrak{k} rektifizierbar, und es gilt

9/8/10

$$l(\mathfrak{k}) = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^k (f'_i(t))^2} dt.$$

Beispiele.

(2). Umfang eines Kreises mit dem Radius r .

9/8/15/2

Wir betrachten einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$ und dem Radius r (vgl. auch Abb. 9.20).

Für die Kreislinie \mathfrak{k} ist durch $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (r \cos t, r \sin t)$ eine Parameterdarstellung gegeben. Offenbar ist f in $[0, 2\pi]$ stetig differenzierbar und $f'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$. Folglich ist

$$|f'(t)| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r$$

und damit

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^{2\pi} |f'(t)| dt = \int_0^{2\pi} r dt = r2\pi.$$