

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (Konvergenz von Reihen)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$ konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

Korollar 3. Ist (a_i) keine Nullfolge, so ist $\sum a_i$ divergent.

4/1/12

Satz 4.6 (Leibniz-Kriterium)

4/1/26

Ist $\sum a_i$ alternierend und $\lim a_i = 0$ und $(|a_i|)_{i=0,1,2,\dots}$ monoton fallend, dann ist $\sum a_i$ konvergent.

Beispiele.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent. (**Harmonische Reihe**)

4/1/30/3

Diese Reihe dient gleichzeitig als Beispiel dafür, daß eine konvergente Reihe nicht absolut konvergent sein muß. (vgl. Beispiel 1.)

Es sei $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Wir betrachten jetzt die 2^n -te Partialsumme

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

und bilden

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} = \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^n + 2^n}$$

(jeder dieser 2^n Summanden ist größer oder gleich $\frac{1}{2^{n+1}}$)

$$\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{für beliebiges } n.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= S_{2^0} - S_{2^0} + S_{2^1} - S_{2^1} + \dots + S_{2^{n-1}} - S_{2^{n-1}} + S_{2^n} \\ &= \underbrace{S_{2^0}}_{=1} + \underbrace{S_{2^1} - S_{2^0}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{S_{2^2} - S_{2^1}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{S_{2^n} - S_{2^{n-1}}}_{\geq \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

Die Teilfolge (S_{2^i}) von (S_n) ist also unbeschränkt, und somit ist $(S_n) = \sum \frac{1}{n}$ nicht konvergent.

Da (S_n) monoton wächst, ist $\sum \frac{1}{n}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

Satz 4.8 (Majorantenkriterium)

4/1/32

Es seien $\sum a_i, \sum b_i$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei $\sum b_i$ eine Majorante von $\sum a_i$. Dann gilt:

- (1) Ist $\sum b_i$ konvergent, so ist auch $\sum a_i$ konvergent.
- (2) Ist $\sum a_i$ divergent, so ist auch $\sum b_i$ divergent.

4. Wir betrachten $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

4/1/44

Die Konvergenz dieser Reihe kann man weder mit dem Wurzel- noch mit dem Quotientenkriterium nachweisen (bitte ausprobieren!). Für eine geeignete konvergente Majorante könnte man das Majorantenkriterium heranziehen.

Es ist $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent. Denn

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \implies$$

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Folglich ist $S_k \rightarrow 1$, und somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ eine konvergente Majorante von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Aus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ erhält man die Behauptung.

Übungsaufgaben

22. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium:

4/6/22

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!},$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2},$$

$$(c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+3},$$

$$(d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n+3}.$$