

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.2 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

2/2/3

- (0) $0 < 1$.
- (1) *nicht* $(a < a)$. (Irreflexivität)
- (2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$. (Transitivität)
- (3) Für jedes a, b gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$. (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Trichotomie)
- (4) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$,
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.
- (6) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, so $a + c \leq b + d$.
Ist zusätzlich $a < b$ oder $c < d$, so ist $a + c < b + d$.
- (7) Es gilt: $a < b \iff -b < -a$.
- (8) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$,
Wenn $0 < a$ und $b < 0$, so $a \cdot b < 0$,
Wenn $a < 0$ und $b < 0$, so $0 < a \cdot b$.
- (9) Wenn $0 < a$, so $0 < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0$, so $\frac{1}{a} < 0$.
- (10) Wenn $0 < a < b$, so $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0 < b$, so $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$,
Wenn $a < b < 0$, so $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.
- (11) Wenn $0 < a$, dann gibt es natürliche Zahlen m und n , so daß $0 < a < m$ und $0 < \frac{1}{n} < a$.
- (12) Wenn $a < b$, so $a < \frac{a+b}{2} < b$.

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (Grenze)

2/3/2

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

(1) Sei M nach oben beschränkt. a ist *obere Grenze* von M

$\stackrel{\text{Def}}{=} a$ ist die kleinste obere Schranke von M .

Bez.: $a = \sup M$ (*Supremum von M*).

(2) Sei M nach unten beschränkt. a ist *untere Grenze* von M

$\stackrel{\text{Def}}{=} a$ ist die größte untere Schranke von M .

Bez.: $a = \inf M$ (*Infimum von M*).

Übungsaufgaben

10. Geben Sie (falls existent) Infimum und Supremum folgender Mengen an:

2/4/10

(a) $\{x \in \mathbb{R} : x^4 - 3x^2 - 2x \leq 0\},$

(b) $\{n : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\},$

(c) $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0 \right\},$

(d) $\left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0 \right\},$

(e) $\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0 \right\}.$