

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Beispiele.

1. $f(x) = c.$

7/1/8/1

Man überlegt sich leicht, daß f für jedes $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(a) = 0$ ist.

2. $f(x) = x.$

7/1/8/2

Der Differenzenquotient an einer beliebigen Stelle $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1.$$

Folglich ist $f'(a) = 1$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.

3. $f(x) = x^2.$

7/1/8/3

Behauptung: $f'(x) = 2x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x \neq a$. Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a \xrightarrow{x \rightarrow a} 2a.$$

Folglich ist

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 2a.$$

Die Gleichung der Tangente berechnet sich wie folgt:

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = a^2 + 2a(x - a) = 2ax - a^2.$$

Speziell für $a = 1$ ergibt sich dann

$$y = t(x) = 2x - 1 \quad (\text{vgl. Abb. 7.3})$$

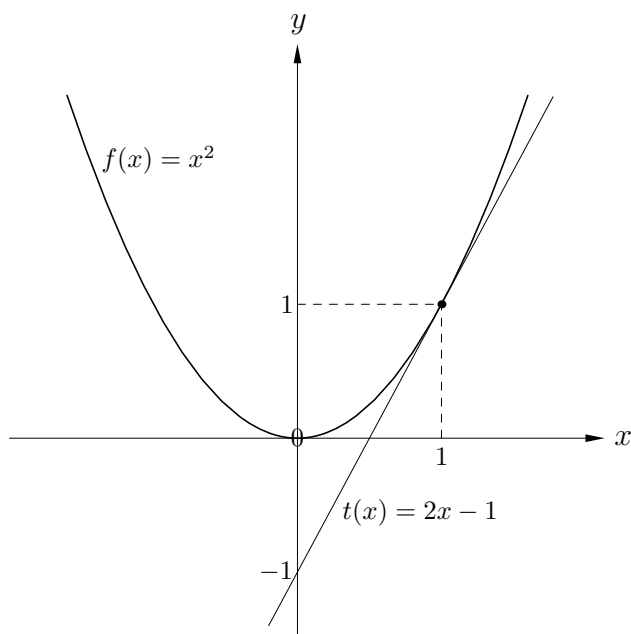


Abb. 7.3 Die Tangente an der Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt $(1,1)$ hat den Anstieg 2; sie schneidet die y -Achse im Punkt $(0, -1)$.

4. Es sei $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{für } x \geq 0 \\ |x|, & \text{für } x < 0. \end{cases}$

7/1/8/4

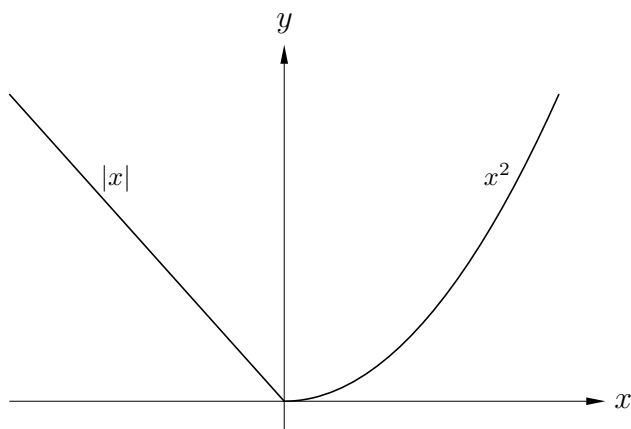


Abb. 7.4 Die Funktion hat an der Stelle $x = 0$ eine sog. Ecke, sie ist dort nicht differenzierbar.

Behauptung: f ist in $a = 0$ nicht differenzierbar.

Angenommen, es existiert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x},$$

dann liefert $\left(\frac{f(x_n)}{x_n} \right)$ für jede Nullfolge (x_n) mit $x_n \neq 0$ den gleichen Grenzwert.

(a) Es gelte zunächst $x_n > 0$ und $x_n \rightarrow 0$.

Dann ist $f(x_n) = x_n^2$ und damit $\frac{f(x_n)}{x_n} = x_n \rightarrow 0$.

(b) Es gelte jetzt $x_n < 0$ und $x_n \rightarrow 0$.

Dann ist $f(x_n) = |x_n|$ und damit $\frac{f(x_n)}{x_n} = \frac{|x_n|}{x_n} = -1$. $\mathcal{M}!$

Offenbar existieren rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten, aber beide sind verschieden.

5. Es sei $f(x) = e^x$.

7/1/8/5

Behauptung: $f'(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x \neq a$. Dann ist

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \cdot \frac{e^h - 1}{h}, \quad \text{für } h := x - a.$$

$$\text{g.z.z.: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Es ist

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}.$$

Diese Reihe ist für alle $h \in \mathbb{R}$ absolut konvergent. Nach dem Lemma zum Identitätssatz für Potenzreihen (Kapitel 4, 4/5/7/2) sind Potenzreihen in ihrem Mittelpunkt stetig.

Der Mittelpunkt ist hier 0, folglich gilt für jede Folge $h_\nu \rightarrow 0$

$$g(h_\nu) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_\nu^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_\nu^n}{(n+1)!} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 1,$$

Also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

6. Es sei $f(x) = \sin x$.

7/1/8/6

Behauptung: $f'(x) = \cos x$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x \neq a$. Dann ist

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = 2 \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} =$$

$$\cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin h}{h} \quad \text{für } h := \frac{x-a}{2}.$$

Für $x \rightarrow a$ gilt $h \rightarrow 0$ und umgekehrt.

\cos ist stetig, folglich ist $\lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = \cos \frac{a+a}{2} = \cos a$.

$$\text{g.z.z.: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Es ist

$$\frac{\sin h}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Analog wie im 5. Beispiel ist diese Potenzreihe ebenfalls in ihrem Mittelpunkt 0 stetig. Folglich ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{h^{2n}}{(2n+1)!} = 1.$$

Also

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a = \sin' a.$$