

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (*Umgebung*)

2/3/10

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

(1) U heißt ε -Umgebung von a

$$\stackrel{\text{Def}}{=} U = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\},$$

$$(\text{d.h., } U = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)).$$

$$\text{Bez.: } U = U_\varepsilon(a).$$

(2) U ist eine Umgebung von a

$$\stackrel{\text{Def}}{=} \text{Es gibt ein } \varepsilon > 0, \text{ so da\ss } U_\varepsilon(a) \subseteq U.$$

$$\text{Bez.: } U(a).$$

Satz 2.9 Ist a ein Häufungspunkt von M , dann liegen in jeder ε -Umgebung von a unendlich viele Elemente aus M . 2/3/12

Beweis. Sei a ein Häufungspunkt von M und $\varepsilon > 0$.

2/3/13

Annahme: In $U_\varepsilon(a)$ gibt es nur endlich viele Elemente $b \in M$ mit $b \neq a$; es seien dies b_1, \dots, b_n .

Wegen $b_i \neq a$, $i = 1, \dots, n$, ist $|b_i - a| > 0$.

Sei $\varepsilon' := \min\{|b_1 - a|, \dots, |b_n - a|\} > 0$.

Nach Definition des Hufungspunktes existiert ein $b \in M$, so da\ss $b \neq a$ und $b \in U'_\varepsilon(a)$; also $|b - a| < \varepsilon'$.

Wegen $b_i \in U_\varepsilon(a)$ ist $|b_i - a| < \varepsilon$ und damit $\varepsilon' \leq |b_i - a| < \varepsilon$. Folglich ist $U'_\varepsilon(a) \subseteq U_\varepsilon(a)$ und somit $b \in U_\varepsilon(a)$, also $b \in \{b_1, \dots, b_n\}$.

Sei $b = b_i$ fur ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist

$$|b - a| = |b_i - a| < \varepsilon' \leq |b_i - a|. \quad \text{N!}$$

Folglich ist unsere Annahme falsch. \square