

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Satz 6.6 *In metrischen Räumen gilt:*

6/1/29

- (1) *Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.*
- (2) *Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.*
- (3) *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*
- (4) *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

6.5 Einige wichtige Ergänzungen

Aus dem Korollar zu Satz 3.9 folgt, daß jede Cauchyfolge in \mathbb{R} konvergiert, d.h., sie besitzt dort einen Grenzwert. Das analoge Resultat gilt für Cauchyfolgen in \mathbb{R}^n . In \mathbb{Q} konvergieren Cauchyfolgen i.a. nicht, z.B. ist $(1 + \frac{1}{n})^n$ eine Cauchyfolge in \mathbb{Q} , die in \mathbb{Q} aber keinen Grenzwert besitzt.

6/5/11

Es gibt also metrische Räume, in denen Cauchyfolgen immer konvergieren und solche, in denen das nicht der Fall ist. Dies gibt Anlaß zu der folgenden Definition.

Definition. (*Vollständigkeit*)

6/5/12

Ein metrischer Raum (\mathbb{M}, ϱ) ist *vollständig*

$\overline{\text{Def}}$ Jede Cauchyfolge aus (\mathbb{M}, ϱ) konvergiert in (\mathbb{M}, ϱ) .