

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.8 Länge von Kurven

Zur Erinnerung:  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  ist eine Kurve in  $\mathbb{R}^k$ , falls  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine stetige Vektorfunktion ist. 9/8/0

#### Definition.

9/8/4

Sei  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  eine Kurve mit der Parameterdarstellung  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

- (1)  $\mathfrak{k}$  ist *stetig differenzierbar* in  $[a, b]$   
 $\overline{\text{Df}}$   $f$  ist stetig differenzierbar in  $[a, b]$ .
- (2)  $\mathfrak{k}$  ist *glatt* in  $[a, b]$   
 $\overline{\text{Df}}$   $f$  ist stetig differenzierbar in  $[a, b]$  und  $f'(t) \neq 0$  für jedes  $t \in [a, b]$ .
- (3)  $\mathfrak{k}$  ist *stückweise glatt* in  $[a, b]$   
 $\overline{\text{Df}}$  Es existiert eine Zerlegung  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  von  $[a, b]$ , so daß  $\mathfrak{k}$  in jedem Teilintervall  $[a_i, a_{i+1}]$  glatt ist.

#### Definition. (*Länge einer Kurve*)

9/8/6

Sei  $\mathfrak{k}$  eine Kurve mit der Parameterdarstellung  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ .

$\mathfrak{k}$  ist *rektifizierbar* (d.h.  $\mathfrak{k}$  besitzt eine Länge)

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert  $\sup\{l(P_{\mathfrak{z}}) : \mathfrak{z} \text{ beliebige Zerlegung von } [a, b]\}$ .  
 Das Supremum heißt, falls es existiert, *Länge der Kurve* und wird mit  $l(\mathfrak{k})$  bezeichnet.

Es sei jetzt  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  eine stetig differenzierbare Kurve in  $\mathbb{R}^k$ . Insbesondere ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $f = (f_1, \dots, f_k)$  und  $f_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar für jedes  $j = 1, \dots, k$ . Weiterhin sei  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ , und der Einfachheit halber sei  $u := a_i$  und  $v := a_{i+1}$ . Der Abstand zwischen den auf der Kurve liegenden Punkten  $f(u)$  und  $f(v)$  beträgt 9/8/7

$$\begin{aligned} |f(v) - f(u)| &= \left| (f_1(v), \dots, f_k(v)) - (f_1(u), \dots, f_k(u)) \right| \\ &= \left| (f_1(v) - f_1(u), \dots, f_k(v) - f_k(u)) \right| = (\star). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind  $f_1, \dots, f_k$  differenzierbar in  $[u, v]$ . Folglich gibt es nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung für jedes  $f_j$  ein  $\xi_{ij} \in [u, v]$ , so daß

$$f_j(v) - f_j(u) = f'_j(\xi_{ij})(v - u). \quad (\xi_{ij} \text{ hängt von } [a_i, a_{i+1}] = [u, v] \text{ und } f_j \text{ ab.})$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} |f(v) - f(u)| &= (\star) = \left| (f'_1(\xi_{i1}) \cdot (v - u), \dots, f'_k(\xi_{ik}) \cdot (v - u)) \right| \\ &= \left| (f'_1(\xi_{i1}), \dots, f'_k(\xi_{ik})) \cdot (v - u) \right| \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_{ij})\right)^2} \cdot (v - u).$$

Also

$$|f(a_{i+1}) - f(a_i)| = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_{ij})\right)^2} \cdot (a_{i+1} - a_i).$$

Die Länge des einbeschriebenen Polygonzuges ist somit

$$\begin{aligned} l(P_{\mathfrak{z}}) &= \sum_{i=0}^n |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \\ &= \sum_{i=0}^n \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_{ij})\right)^2} \cdot (a_{i+1} - a_i). \end{aligned}$$

Die letzte Summe sieht einer Zwischensumme bezüglich der Funktion

$$g(t) = |f'(t)| = |(f'_1(t), \dots, f'_k(t))| = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(t)\right)^2}$$

ähnlich. Offenbar ist für  $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, n$  und  $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ ,

$$\begin{aligned} S_g(\mathfrak{z}, \tau) &= \sum_{i=0}^n g(\xi_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_i)\right)^2} \cdot (a_{i+1} - a_i) \end{aligned}$$

eine Zwischensumme. Wir werden jetzt zeigen, daß sich  $l(P_{\mathfrak{z}})$  und  $S_g(\mathfrak{z}, \tau)$  bei geeigneten Zerlegungen um beliebig wenig unterscheiden.

**Lemma.** *Es sei  $\mathfrak{k}$  eine durch  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  definierte und stetig differenzierbare Kurve. Weiterhin sei  $(\mathfrak{z}_\nu)$  eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von  $[a, b]$ , und  $(\tau_\nu)$  sei eine Folge zugehöriger Zwischenstellensysteme von  $(\mathfrak{z}_\nu)$ . Dann folgt:* 9/8/8

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\nu_0$ , so daß für jedes  $\nu \geq \nu_0$  gilt:

$$|l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)| < \varepsilon, \text{ wobei } g(t) = |f'(t)| = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(t)\right)^2}.$$

**Satz 9.23** *Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist  $\mathfrak{k}$  rektifizierbar, und es gilt* 9/8/10

$$l(\mathfrak{k}) = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(f'_i(t)\right)^2} dt.$$

## Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 9

- Parameterdarstellung von Kurven, Definition der Rektifizierbarkeit (inhaltliche Erläuterung der Länge von Kurven).

9/11/17