

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

IV. \mathbb{R} genügt dem Intervallschachtelungsaxiom:

2/1/6

Es sei $([a_n, b_n])_{n=0,1,2,\dots}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in \mathbb{R} , so daß für jede natürliche Zahl n gilt: $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c \leq b_n$, für jede natürliche Zahl n .

Anschauliche Deutung des Axioms: Wie die Intervalle auch beschaffen sind, sie können sich nicht auf eine „Lücke zusammenziehen“; sie schachteln stets wenigstens eine reelle Zahl ein.

I – IV können als Axiome für die reellen Zahlen aufgefaßt werden. Nur diese Eigenschaften von reellen Zahlen werden bei späteren Beweisen wirklich benutzt.

Definiert man die reellen Zahlen (mit einer der bekannten Methoden) aus der Menge der rationalen Zahlen, dann werden die Eigenschaften I – IV natürlich beweisbare Sätze.

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition.

3/1/2

- (1) (a_n) konvergiert (oder ist konvergent) in \mathbb{R}
 $\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so daß (a_n) gegen a konvergiert.
- (2) (a_n) divergiert (oder ist divergent) in \mathbb{R}
 $\overline{\text{Df}}$ (a_n) ist nicht konvergent in \mathbb{R} .

Satz 3.10 (Eigenschaften konvergenter Folgen)

3/1/43

Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen und c, d seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1) $(c \cdot a_n)$ ist konvergent und $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$.
- (2) $(a_n + b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
- (3) $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.
- (4) Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $(\frac{1}{b_n})$ konvergent und

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}.$$
- (4') Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergent
und
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

- (5) $(|a_n|)$ ist konvergent und $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.
- (6) Ist $a_n \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq \lim b_n$.
 Ist insbesondere $a_n \leq d$ bzw. $d \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq d$
 bzw. $d \leq \lim b_n$.

Übungsaufgaben

3. Zeigen Sie: Zu jeder reellen Zahl a existiert eine Folge (r_n) rationaler Zahlen, die gegen a konvergiert.

3/3/3
