

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Wir geben jetzt Regeln für die Verneinung zusammengesetzter Aussagen an. Durch schrittweise Anwendung dieser Regeln lassen sich beliebige mathematische Aussagen verneinen. 1/0/21

$$\begin{aligned}\neg(\neg A) &\equiv A, & (\neg(\neg A) \leftrightarrow A \text{ ist also immer wahr.}) \\ \neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B, \\ \neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B, \\ \neg(A \rightarrow B) &\equiv A \wedge \neg B, \\ \neg(A \leftrightarrow B) &\equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B), \\ \neg \forall x A(x) &\equiv \exists x \neg A(x), \\ \neg \exists x A(x) &\equiv \forall x \neg A(x).\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich sofort die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}A \rightarrow B &\equiv \neg A \vee B, \\ A \leftrightarrow B &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).\end{aligned}$$

Es werden jetzt einige wahre Aussagen betrachtet, die aufgrund ihrer logischen Struktur häufig als *Beweisprinzipien* auftreten. (In der Regel benutzt man diese Prinzipien schon rein intuitiv richtig.) 1/0/22

$$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B \quad (\text{Modus ponens oder Abtrennungsregel})$$

Aus der Gültigkeit der Aussagen A und $A \rightarrow B$, schließt man auf die Gültigkeit der Aussage B .

Analog interpretiert man auch die folgenden Prinzipien:

$$\begin{aligned}(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) &\rightarrow (A \rightarrow C) \quad (\text{Kettenschluß}) \\ A \rightarrow B &\leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A \quad (\text{Kontraposition})\end{aligned}$$

Die Kontraposition besagt, daß die Aussagen $A \rightarrow B$ und $\neg B \rightarrow \neg A$ stets den gleichen Wahrheitswert besitzen. Dies darf allerdings nicht verwechselt werden mit der Umkehrung $B \rightarrow A$ der Implikation $A \rightarrow B$. Die Aussagen $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ sind im allgemeinen nicht äquivalent.

$$(\neg A \rightarrow F) \rightarrow A \quad (\text{indirekter Beweis; } F \text{ steht für eine beliebige falsche Aussage})$$

Praktisch geht man beim indirekten Beweis folgendermaßen vor:

Man nimmt an, daß die Aussage A falsch ist, also die Negation $\neg A$ gilt. Dann leitet man aus dieser Annahme etwas Falsches her, d.h., man erzeugt einen *Widerspruch*. (Dies wird häufig einfach durch das Symbol ⌵! ausgedrückt). Daraus schließt man, daß die Aussage

$\neg A$ nicht richtig sein kann; also gilt die Aussage A . (Hierbei wird ganz wesentlich das Prinzip der Zweiwertigkeit benutzt.)

Übungsaufgaben

8. Man gebe zu folgenden Aussagen je eine logisch äquivalente Alternative an und beweise die Gleichwertigkeit:

1/1/8

(a) $\neg(\neg A \wedge \neg B)$, (b) $A \rightarrow B$, (c) $\neg(A \rightarrow B)$.