

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

Zunächst betrachten wir ein geeignetes *Axiomensystem der reellen Zahlen*, das in vier Gruppen unterteilt ist. Dazu sei \mathbb{R} eine Menge (Menge der reellen Zahlen). In \mathbb{R} sind zwei 2-stellige *Operationen* $+$ und \cdot und eine 2-stellige Relation \leq definiert, so daß gilt:

I. \mathbb{R} ist ein Körper (d.h., in \mathbb{R} gelten folgende 10 Eigenschaften:) 2/1/1

- (1) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- (2) $x + y = y + x$,
- (3) Es existiert ein Element 0 in \mathbb{R} , so daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x + 0 = x$.

Bemerkung. Aus (2) und (3) folgt sofort, daß es genau ein solches Element 0 in \mathbb{R} gibt. Denn sind $0_1, 0_2$ Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

- (4) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $y \in \mathbb{R}$, so daß $x + y = 0$.

Bemerkung. Aus (1) – (4) folgt, daß es für jedes $x \in \mathbb{R}$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ gibt mit $x + y = 0$. Wir zeigen, daß y durch x tatsächlich eindeutig bestimmt ist.

Dazu sei x gegeben.

Angenommen, es gibt Elemente y, z , so daß $x + y = 0$ und $x + z = 0$. Dann gilt:

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = (x + y) + z = 0 + z = z + 0 = z.$$

Dieses durch x eindeutig bestimmte y wird mit $y := -x$ bezeichnet.

Die Eigenschaften (1) – (4) sind die Axiome für eine (*additive*) *abelsche Gruppe*.

- (5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
- (6) $x \cdot y = y \cdot x$,
- (7) Es existiert ein Element 1 in \mathbb{R} , so daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x \cdot 1 = x$.

Bemerkung. Analog wie bei (3) gibt es genau ein solches Element 1 . Denn wären $1_1, 1_2$ Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2.$$

- (8) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ existiert ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot y = 1$.

Bemerkung. Analog wie zu (4) zeigt man, daß y durch x eindeutig bestimmt ist; der Beweis bleibt als Übungsaufgabe.

Dieses durch x eindeutig bestimmte y wird mit $y := x^{-1} = \frac{1}{x}$ bezeichnet.

- (9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Bemerkung. Aus den obigen Axiomen erhält man: $x \cdot 0 = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Es ist $x = x \cdot 1 = x \cdot (\underbrace{1 + 0}_x) = x + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$. Nach den Axiomen (2) und (3) gibt es genau ein Element 0 , so daß $x = x + 0$. Da auch $x = x + x \cdot 0$ ist, muß dann $x \cdot 0$ dieses Element 0 sein.

(10) $0 \neq 1$.

II. \mathbb{R} ist ein geordneter Körper

2/1/2

(d.h., in \mathbb{R} gelten zusätzlich die folgenden 5 Eigenschaften:)

- (1) Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$, so $x \leq z$. (*Transitivität*)
- (2) Wenn $x \leq y$ und $y \leq x$, so $x = y$. (*Antisymmetrie*)
- (3) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$. (*Linearität*)
- (4) Wenn $x \leq y$, so $x + z \leq y + z$. (*Monotonie der Addition*)
- (5) Wenn $0 \leq x$ und $0 \leq y$, so $0 \leq x \cdot y$.

Bemerkung. Aus (3) folgt sofort die *Reflexivität*, d.h. für jedes x gilt: $x \leq x$.

Die Eigenschaften (1) – (3) sind die *Axiome der reflexiven Ordnung*.

(4) könnte auch abgeschwächt werden zu

(4') Wenn $0 \leq x$ und $0 \leq y$, so $0 \leq x + y$.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß $x \leq y \iff 0 \leq y - x$.

Wie üblich ist $y \geq x$ eine andere Schreibweise für $x \leq y$.

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.3 Komplexe Zahlen

Wir führen jetzt die *komplexen Zahlen* ein, um sie für die Behandlung von sog. Potenzreihen zur Verfügung zu haben. 4/3/0

Wir setzen als bekannt voraus, daß $\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \mathbb{R}^2$ einen zweidimensionalen Vektorraum mit den folgenden Operationen bildet:

$$(a, b) + (c, d) \stackrel{\text{Def}}{=} (a + c, b + d) \quad (\text{Addition von Elementen aus } \mathbb{R}^2), \quad 4/3/1$$

$$c \cdot (a, b) \stackrel{\text{Def}}{=} (ca, cb) \quad (\text{Multiplikation mit reellen Zahlen}).$$

Zur geometrischen Veranschaulichung der komplexen Zahlen betrachten wir in \mathbb{R}^2 die kanonische Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ und erhalten so ein rechtwinkliges Koordinatensystem für \mathbb{R}^2 , mit dessen Hilfe sich die Elemente aus \mathbb{R}^2 als Punkte in der Ebene darstellen lassen (*Gaußsche Zahlenebene*).

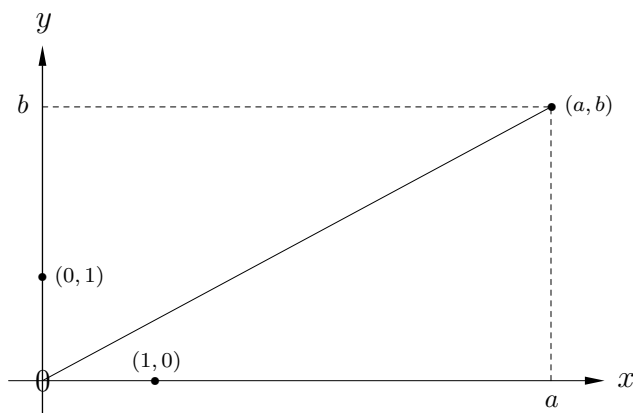


Abb. 4.1 Gaußsche Zahlenebene zur Darstellung der komplexen Zahlen

Jedes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ läßt sich eindeutig als Linearkombination der Basis darstellen. Die folgenden Teilmengen $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ und $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ bilden wichtige eindimensionale Teilräume, die mit den entsprechenden Koordinatenachsen identifiziert werden können.

Wir führen jetzt eine Multiplikation von Paaren in \mathbb{R}^2 ein.

4/3/2

Es sei $(a, b) \cdot (c, d) \stackrel{\text{Def}}{=} (ac - bd, ad + bc)$.

Damit erhält man das folgende Resultat.

Satz 4.16 *Mit den definierten Operationen (Addition und Multiplikation von Paaren) bildet \mathbb{R}^2 einen Körper \mathbb{C} (den Körper der komplexen Zahlen).*

4/3/3

Bemerkung. Man kann mit komplexen Zahlen im Prinzip rechnen wie mit reellen Zahlen, allerdings ist in \mathbb{C} keine Ordnung definiert.

4/3/5

Wir haben uns schon überlegt, daß $\{(1, 0), (0, 1)\}$ eine Basis für den Vektorraum \mathbb{R}^2 bildet. Der Teilraum $\{x \cdot (1, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ von \mathbb{R}^2 ist offenbar isomorph mit \mathbb{R} (als 1-dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R}). Daher identifizieren wir in Zukunft $(1, 0)$ mit 1. Für $(0, 1)$ schreibt man auch i (nicht zu verwechseln mit natürlichen Zahlen i), so daß durch $\{1, i\}$ eine Basis für \mathbb{R}^2 gegeben ist.

Mit dieser Vereinbarung gilt

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i.$$

Für $a \cdot 1$ bzw. für $b \cdot i$ schreiben wir kurz a bzw. ib . Damit erhält man eine geeignete Darstellung für komplexe Zahlen:

$$(a, b) = a + ib, \quad (0, 0) = 0 + i0 := 0.$$

Bez.: In $z = x + iy$ heißt x *Realteil* ($:= \operatorname{Re}(z)$) und y *Imaginärteil* ($:= \operatorname{Im}(z)$) von z .