

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Definition. (*gleichmäßige Konvergenz*)

3/2/12

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert in M gleichmäßig gegen f

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und für alle $x \in M$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Stetigkeit*)

5/2/1

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) stetig

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(d.h., für jede ε -Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ -Umgebung von a , so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Definition. (*Funktionenreihe*)

5/4/1

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine Folge von Funktionen, die alle in M definiert sind, und es sei

$F_n := \sum_{i=0}^n f_i$ (die F_n sind also ebenfalls in M definierte Funktionen).

(1) Die Folge (F_n) heißt *Funktionenreihe*.

Bez.: $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ bzw. $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$ oder einfach $\sum f_i$ bzw. $\sum f_i(x)$

(2) $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen f

$\overline{\text{Df}}$ (F_n) ist in M konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen f .

(3) $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M absolut konvergent gegen f

$\overline{\text{Df}}$ $\sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$ ist in M konvergent gegen f .

Satz 5.21 (*Stetigkeit der Grenzfunktion*)

5/4/10

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine in M definierte Funktionenfolge, und alle f_n seien in a bzw.

in ganz M stetig.

- (1) Konvergiert (f_n) in M gleichmäßig gegen f , dann ist f in a bzw. in M stetig.*
- (2) Konvergiert $\sum f_n$ in M gleichmäßig gegen f , dann ist f in a bzw. in M stetig.*