

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. (*monoton, streng monoton*)

5/1/11

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

- (1) f ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in M
 $\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 \leq x_2$, so $f(x_1) \leq f(x_2)$
 (bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$).
- (2) f ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in M
 $\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_1) < f(x_2)$
 (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

5.2 Stetigkeit

Definition. (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

- (1) f ist *stetig in* M
 $\overline{\text{Df}}$ f ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.
- (2) f ist *stetig*
 $\overline{\text{Df}}$ f ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

5.3 Elementare Funktionen

Satz 5.11 Die Exponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

5/3/19

- (1) $D(\exp) = \mathbb{R}$.
- (2) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).
- (3) $\exp(0) = 1$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
 für $x < 0$ ist $0 < \exp(x) < 1$, und
 für $x > 0$ ist $1 < \exp(x)$.
- (4) \exp ist *streng monoton wachsend*
 (folglich ist \exp injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion).
- (5) $\exp(1) = e$ ($e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$).
- (6) Für rationale $x = \pm \frac{m}{n}$ ist $\exp(x) = e^{\pm \frac{m}{n}}$
 (für irrationale x ist e^x bisher nicht definiert!).
- (7) \exp ist *stetig*.

Satz 5.13 \ln hat folgende Eigenschaften:

5/3/29

- (1) $\ln e = 1$, $\ln e^x = x$ und $e^{\ln x} = x$.
- (2) \ln ist stetig.
- (3) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ (Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus).
- (4) $\ln 1 = 0$, $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$;
für $0 < x < 1$ ist $\ln x < 0$, und für $1 < x$ ist $0 < \ln x$.
- (5) \ln ist streng monoton wachsend.
- (6) Für rationale r und reelle $x > 0$ gilt: $\ln(x^r) = r \cdot \ln x$
(für irrationale r ist x^r noch nicht definiert!).
- (7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.

Definition. (Potenzfunktion mit beliebigem Exponenten)

5/3/43

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x > 0$.

$x^a \stackrel{\text{Df}}{=} e^{a \cdot \ln x}$ heißt *Potenzfunktion* (mit dem Exponenten a).

Bemerkung. Die Eigenschaften von x^a folgen entsprechend der Definition sofort aus den Eigenschaften von e^x und $\ln x$. Insbesondere ist x^a stetig und

5/3/44

$$D(x^a) = D(\ln x) = (0, \infty) \text{ und } W(x^a) = \begin{cases} (0, \infty), & \text{für } a \neq 0 \\ \{1\}, & \text{für } a = 0. \end{cases}$$

Weiterhin ist x^a für $a \neq 0$ streng monoton. Folglich besitzt x^a eine Umkehrfunktion, die ebenfalls eine Potenzfunktion ist, nämlich die Funktion $x^{\frac{1}{a}}$ (vgl. Abb. 5.20).

Für gewisse Exponenten a läßt sich x^a auch in $(-\infty, 0)$ definieren, z.B. für alle ganzzahligen a und auch für alle $a = \frac{1}{n}$, falls n ungerade ist. Dann ist nämlich $x^a = x^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{-x}$, und für $-x > 0$ ist die n -te Wurzel schon definiert.

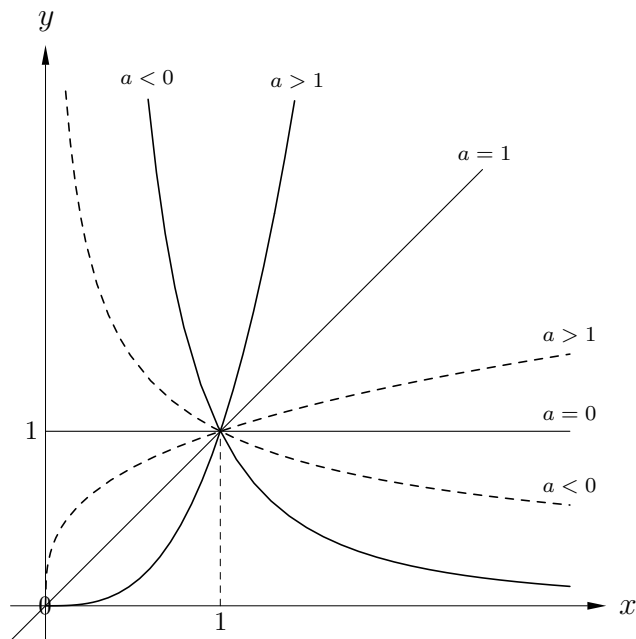


Abb. 5.20 Die Abbildung zeigt die Potenzfunktion $f(x) = x^a$ mit verschiedenen Exponenten $a \in \mathbb{R}$. Für $a \neq 0$ und $x > 0$ ist f injektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion. Die gestrichelten Kurven zeigen die Umkehrfunktionen von $f(x) = x^a$ für $a > 1$ bzw. $a < 0$. Die inverse Funktion von x^a ist $x^{\frac{1}{a}}$ und somit wieder eine Potenzfunktion. Für $a = 1$ (also $x^a = x = I(x)$) ist die Umkehrfunktion identisch mit der Ausgangsfunktion $I(x)$. Ist $a = 0$, dann ist x^a konstant.

Trigonometrische Funktionen

In der Schule werden \sin und \cos in der Regel am Einheitskreis eingeführt (vgl. Abb. 5.21 und 5.22).

Der Anschauung entnimmt man:

- (1) $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.
- (2) \sin und \cos sind periodisch mit der kleinsten Periode 2π .
- (3) \sin ist ungerade, d.h., $\sin(-x) = -\sin x$.
- (4) \cos ist gerade, d.h., $\cos(-x) = \cos x$.
- (5) \sin ist an der Stelle 0 stetig. Hierbei benutzt man, daß $|\sin x| \leq |x|$ ist, was wiederum der Anschauung entnommen wird.
- (6) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (hier wird der Satz des Pythagoras vorausgesetzt).

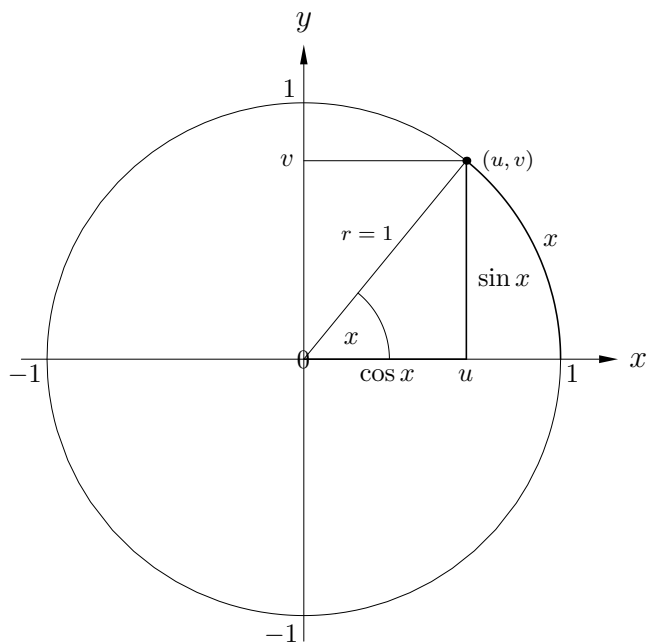


Abb. 5.21 Die Abbildung zeigt, wie am Einheitskreis (:= Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt $(0,0)$) die Funktionen \sin und \cos eingeführt werden können. Der Winkel x ist in Bogenmaß gemessen (:= Länge des durch dickere Strichstärke hervorgehobenen Kreisbogenstücks). \cos bzw. \sin sind dann definiert durch: $\cos x := u$, $\sin x := v$.

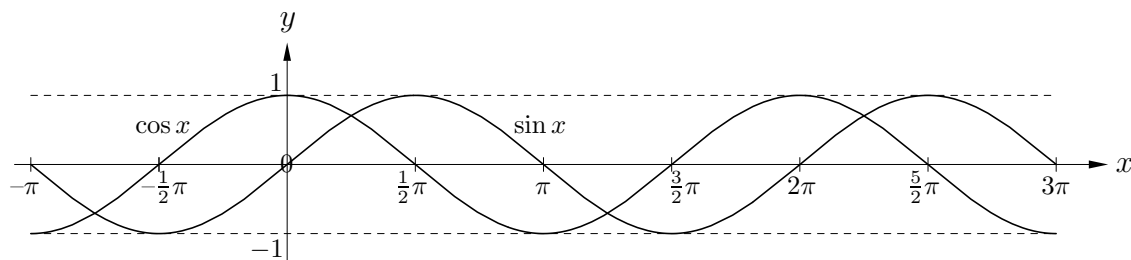


Abb. 5.22 zeigt \sin und \cos im Intervall $[-\pi, 3\pi]$

Die Vorteile dieser Methode bestehen darin, daß der Schüler wesentliche Eigenschaften der ansonsten komplizierten Funktionen der Anschauung entnimmt. Die Nachteile sind allerdings darin zu sehen, daß die Anschauung als Beweismittel überhaupt zugelassen wird und daß z.B. die Zahl π und Eigenschaften des Kreises als bekannt vorausgesetzt werden.

Wir kommen jetzt zu einer anderen Definition der trigonometrischen Funktionen.

Hierzu betrachten wir die Exponentialfunktion e^z , die bekanntlich mit Hilfe der Potenzreihe $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ definiert ist. Diese Potenzreihe ist (wie früher gezeigt wurde) für alle komplexen Zahlen z absolut und damit auch unbedingt konvergent. Folglich ist $\exp(z)$ auch in der gesamten komplexen Ebene definiert. Wir betrachten jetzt den Spezialfall $z = ix$ und berechnen von e^{ix} den Real- und Imaginärteil:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{\overline{\overline{\text{Df}}} \cos x} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\overline{\overline{\text{Df}}} \sin x}.
\end{aligned}$$

Also $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Damit ergibt sich die folgende Definition.