

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.6 Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

2/2/20

- (1) $|a| \geq 0$, und $|a| = 0 \iff a = 0$.
- (2) $|a| = |-a|$. ($\implies |a - b| = |b - a|$.)
- (3) $-a \leq |a|$ und $a \leq |a|$. (\implies wenn $-a \leq |b|$ und $a \leq |b|$, so $|a| \leq |b|$.)
- (4) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. ($\implies |a^n| = |a|^n$.)
- (5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, falls $b \neq 0$.

Satz 2.7 (Dreiecksungleichungen)

2/2/22

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) $|a + b| \leq |a| + |b|$.
- (2) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Beweis. (1). Nach Satz 2.6(3) gilt: $\pm a \leq |a|$ und $\pm b \leq |b|$.

2/2/23

1. Fall: $a + b \geq 0 \implies |a + b| = a + b \leq |a| + |b|$.

2. Fall: $a + b < 0 \implies |a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$.

In jedem Fall ist also $|a + b| \leq |a| + |b|$.

(2). Nach (1) gilt:

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Analog erhält man

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \implies \underbrace{|b| - |a|}_{-(|a| - |b|)} \leq |b - a| = |a - b|.$$

Also $\pm(|a| - |b|) \leq |a - b|$, und somit gilt

$$||a| - |b|| \leq |a - b|. \quad \square$$