

Kapitel 2

Reelle Zahlen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die reellen Zahlen einzuführen, wenn man die rationalen Zahlen bereits definiert hat. Die geläufigsten Verfahren verwenden Dedekindsche Schnitte oder Cauchyfolgen im Bereich der rationalen Zahlen. Die anschaulich einfachste Methode benutzt Dedekindsche Schnitte. Wir werden hier nur ganz kurz auf diese Methode eingehen. Ansonsten setzen wir voraus, daß die reellen Zahlen schon definiert sind. Wir stellen hier lediglich die Grundeigenschaften der reellen Zahlen zusammen, die auch als „Axiome“ aufgefaßt werden können, und benutzen nur diese Axiome beim späteren Beweisen weiterer Eigenschaften von reellen Zahlen.

2/0/0

Es sei \mathbb{Q} die geordnete Menge der rationalen Zahlen und A, B seien nicht-leere Teilmengen von \mathbb{Q} . Das Paar (A, B) heißt *Dedekindscher Schnitt* in \mathbb{Q} , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

2/0/1

- (1) $A \cup B = \mathbb{Q}$ und $A \cap B = \emptyset$.
- (2) Für jedes $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt: Wenn $x \in A$ und $y \in B$, so $x < y$.

Der Dedekindsche Schnitt (A, B) definiert eine Zerlegung von \mathbb{Q} in zwei disjunkte Klassen, wobei A *Unterklasse* und B *Oberklasse* bei der Zerlegung genannt wird. Der Eindeutigkeit wegen betrachten wir nur solche Schnitte, bei denen die jeweilige Unterklasse kein größtes Element enthält. Diese reichen aus, um die reellen Zahlen zu definieren.

Für B gibt es zwei Möglichkeiten:

1. B enthält eine kleinste rationale Zahl, d.h., es existiert ein $r \in B$, so daß $r \leq x$ für jedes $x \in B$.
2. B enthält keine kleinste rationale Zahl.

Im ersten Fall legt der Dedekindsche Schnitt die *rationale Zahl* r fest, im zweiten Fall bestimmt (A, B) eine sogenannte *Lücke*. Die „Lücken“ werden als die *irrationalen Zahlen* interpretiert. Die Menge der *reellen Zahlen* wird dann als Menge aller Dedekindschen Schnitte definiert. Eine reelle Zahl ist also nach dieser Definition ein Dedekindscher Schnitt. Das eigentliche Problem besteht nun darin, in der Menge der so gegebenen reellen Zahlen eine Addition und eine Multiplikation zu definieren und eine Ordnungsrelation festzulegen. Hierzu muß aber auf die einschlägige Literatur verwiesen werden.

Es bleibt noch die Frage zu diskutieren, ob es überhaupt irrationale Zahlen gibt. Es könnte doch sein, daß für jeden Dedekindschen Schnitt die entsprechende Oberklasse ein kleinstes Element enthält. Dazu betrachten wir den Schnitt (A, B) , so daß

2/0/2

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \text{ und } 2 \leq x^2\}; \text{ und}$$

$$A = \mathbb{Q} \setminus B.$$

Angenommen, B enthält ein kleinstes Element r . Dann ist $r \in \mathbb{Q}$ mit $r > 0$ und $r^2 = 2$. (Wäre $r^2 > 2$, dann ließe sich eine rationale Zahl $r' > 0$ konstruieren mit $r' < r$ und

$2 \leq r'^2 < r^2$. Damit ist r nicht kleinstes Element in B .) Folglich existieren positive ganze Zahlen m und n , so daß $r = \frac{m}{n}$. m und n seien o.B.d.A. teilerfremd. Dann gilt:

$$2 = r^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \text{und damit} \quad 2n^2 = m^2.$$

Also $2|m^2$. Da 2 eine Primzahl ist, gilt auch $2|m$. Folglich existiert eine natürliche Zahl k , so daß $m = 2k$. Damit haben wir $2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2$ und schließlich $n^2 = 2k^2$. Also $2|n^2$ und somit $2|n$. Folglich ist 2 ein Teiler von m und n . Das widerspricht aber der Voraussetzung, daß m und n teilerfremd sind. Damit bestimmt (A, B) eine Lücke, also eine irrationale Zahl.

Dies zeigt, daß $\sqrt{2}$ nicht rational ist.

Wir befassen uns nun mit den grundlegenden Eigenschaften der reellen Zahlen.