

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Definition. (*Stammfunktion*)

9/1/1

Es seien f, F in einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ definiert.

F ist eine *Stammfunktion* von f in M

$\stackrel{\text{Df}}{=} F$ ist in M differenzierbar, und es gilt $F'(x) = f(x)$ für jedes $x \in M$.

Bemerkung.

9/1/4

- (1) Ist F_1 eine Stammfunktion von f in I und ist $F_2(x) = F_1(x) + c$ für jedes $x \in I$, dann ist offenbar auch F_2 eine Stammfunktion von f in I .
- (2) Besitzt f überhaupt eine Stammfunktion in I und ist $x_0 \in I$, dann gibt es genau eine Stammfunktion F von f in I , so daß $F(x_0) = 0$.

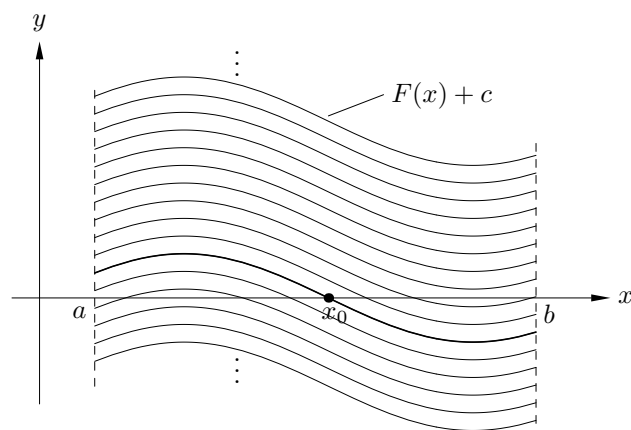


Abb. 9.3 Die Abbildung zeigt eine Schaar von Funktionen, die sich von F jeweils nur um eine additive Konstante unterscheiden. Ist F differenzierbar in $I = [a, b]$ und $F' = f$, dann symbolisiert diese Schaar die Menge aller Stammfunktionen von f in I , unter denen es für $x_0 \in I$ genau eine gibt, welche an der Stelle x_0 null wird.

Satz 9.2 (*Integration einer Summe*)

9/1/10

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Besitzen f und g Stammfunktionen in I , dann besitzt auch $a \cdot f + b \cdot g$ eine Stammfunktion in I , und es gilt

$$\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x)) dx = a \cdot \int f(x) dx + b \cdot \int g(x) dx.$$

Beweis. Sei $x_0 \in I$ und F, G seien die Stammfunktionen von f bzw. g , für die $F(x_0) = G(x_0) = 0$, also $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ und $F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$ und $G(x) = \int_{x_0}^x g(x) dx$. Dann ist offenbar $a \cdot F + b \cdot G$ die Stammfunktion von $a \cdot f + b \cdot g$ in I , welche an der Stelle x_0 Null wird. Also ist

9/1/11

$$\int_{x_0}^x (a \cdot f(x) + b \cdot g(x)) dx = a \cdot F(x) + b \cdot G(x) = a \cdot \int_{x_0}^x f(x) dx + b \cdot \int_{x_0}^x g(x) dx. \quad \square$$

Bemerkung. Ersetzt man in Satz 9.3 f durch u' und damit F durch u , dann erhält man $\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$. 9/1/15