

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Beispiele.

1. Es sei $f(x) = e^x - 1$ und $g(x) = \sin x$.

7/3/7/1

Man berechne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Es ist

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(e^x - 1)'}{(\sin x)'} = \frac{e^x}{\cos x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1.$$

Also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1.$$

2. Es sei $f(x) = (e^x - 1)^2$ und $g(x) = x^2$.

7/3/7/2

Man berechne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Es ist

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{((e^x - 1)^2)'}{(x^2)'} = \frac{(e^x - 1) \cdot e^x}{x}.$$

Den Grenzwert dieses Quotienten kann man noch nicht unmittelbar auswerten, da Zähler und Nenner wieder gegen null streben. Daher versuchen wir, die Regel auf den neu entstandenen Quotienten noch einmal anzuwenden, da er die Voraussetzungen der Regel von de l'Hospital erfüllt.

$$\frac{((e^x - 1) \cdot e^x)'}{(x)'} = \frac{e^x \cdot e^x + (e^x - 1) \cdot e^x}{1} = 2e^{2x} - e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2 - 1 = 1.$$

Also

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Achtung! Die Regeln dürfen nicht „formal“ angewendet werden, man hat immer zu überprüfen, ob die Voraussetzungen zur Anwendung einer Regel erfüllt sind.

Betrachtet man z.B. die Funktionen $f(x) = e^x - 1$ und $g(x) = x^2$ und geht man formal vor bei der Bestimmung des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$, dann berechnet man zunächst die Ableitungen der Zähler- und Nennerfunktion und erhält $f'(x) = e^x$ und $g'(x) = 2x$. Der Nenner strebt wieder gegen null, aber nicht der Zähler. Wenn man jetzt die Regel

abermals (aber falsch) anwendet, also Zähler- und Nennerfunktion noch einmal differenziert, dann erhält man $f''(x) = e^x$ und $g''(x) = 2$. Damit existiert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{2}$, aber da die Voraussetzungen für $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht erfüllt waren, gilt nicht

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

3. Es sei $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ und $x > 0$.

7/3/7/3

Man berechne $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)^{g(x)}$.

Nach Definition gilt $f(x)^{g(x)} = (\sin x)^x = e^{x \cdot \ln(\sin x)}$.

Wir versuchen zunächst, den Grenzwert des Exponenten zu bestimmen. Es ist

$$x \cdot \ln(\sin x) = \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = -\frac{\ln(\sin x)}{-\frac{1}{x}}.$$

Für $x \searrow 0$ streben in dem letzten Bruch Zähler und Nenner gegen $-\infty$. Damit sind die Voraussetzungen für eine der de l'Hospitalschen Regeln erfüllt.

Zähler- und Nennerfunktion differenziert ergeben

$$\frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{\frac{1}{x^2}} = \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{x \cos x}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Also

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(\sin x) = 0$$

und damit

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \cdot \ln(\sin x)} = 1.$$