

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Gleichheit von Mengen

1/0/2

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, d.h.,

$$M = N \stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } x \text{ gilt: } x \in M \text{ genau dann, wenn } x \in N.$$

Teilmengenbeziehung oder Inklusion

1/0/3

$$M \subseteq N \stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } x \text{ gilt: wenn } x \in M, \text{ so } x \in N. \quad (\text{Inklusion})$$

$$M \subset N \stackrel{\text{Df}}{=} M \subseteq N \text{ und } M \neq N, \quad (\text{echte Inklusion})$$

d.h., $M \subseteq N$ und es gibt ein x , so daß $x \in N$, und $x \notin M$.

Will man aus einer gegebenen Menge M die Teilmenge der Elemente x mit einer bestimmten Eigenschaft – etwa $E(x)$ – aussondern, dann kennzeichnen wir dies durch

$$\{x \in M : E(x)\}.$$

Durchschnitt und Vereinigung von Mengen

1/0/4

$$M \cap N \stackrel{\text{Df}}{=} \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}. \quad (\text{Durchschnitt; vgl. Abb. 1.1})$$

$$M \cup N \stackrel{\text{Df}}{=} \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}. \quad (\text{Vereinigung; vgl. Abb. 1.2})$$

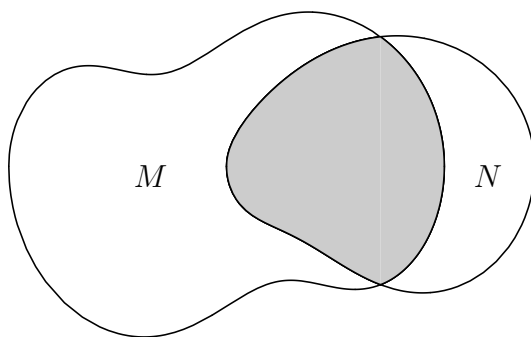


Abb. 1.1 Die schattierte Fläche symbolisiert den Durchschnitt der Mengen.

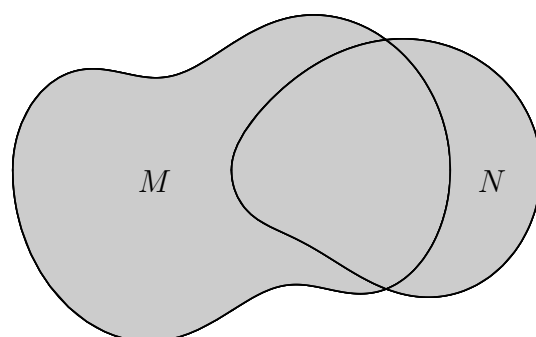


Abb. 1.2 Die schattierte Fläche symbolisiert die Vereinigung der Mengen.

Differenz und Komplement von Mengen

1/0/5

$$M \setminus N \stackrel{\text{Df}}{=} \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}. \quad (\text{Mengendifferenz; vgl. Abb. 1.3})$$

Ist eine Bezugsmenge M gegeben, z.B. $M = \mathbb{R}$, dann läßt sich auch das Komplement einer Teilmenge N von M bilden:

$$C(N) \stackrel{\text{Df}}{=} \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}. \quad (\text{Komplement bez. } M; \text{ vgl. Abb. 1.4})$$

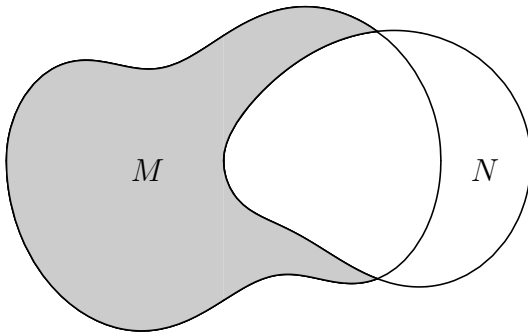


Abb. 1.3 Die schattierte Fläche symbolisiert die Differenz der Mengen.

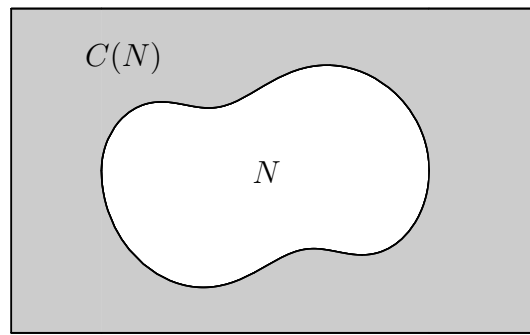


Abb. 1.4 Die schattierte Fläche symbolisiert das Komplement von N bez. M .

Kartesisches Produkt

1/0/7

$$M \times N \stackrel{\text{Df}}{=} \{(x, y) : x \in M \text{ und } y \in N\}. \quad (\text{Produkt zweier Mengen})$$

$$M_1 \times \cdots \times M_n \stackrel{\text{Df}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n\}. \\ (\text{Produkt endlich vieler Mengen})$$

Definition. (Relation)

1/0/12

(1) R ist eine 2-stellige Relation

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es gibt Mengen } M \text{ und } N, \text{ so daß } R \subseteq M \times N.$$

(2) R ist eine n -stellige Relation ($n \geq 1$)

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es gibt Mengen } M_1, \dots, M_n, \text{ so daß } R \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n.$$

(3) R ist eine n -stellige Relation in M ($n \geq 1$)

$$\stackrel{\text{Df}}{=} R \subseteq \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n\text{-mal}}.$$

Definition. (Funktion oder Abbildung)

1/0/14

(1) f ist eine Funktion (oder Abbildung)

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existieren Mengen } M \text{ und } N, \text{ so daß } f \subseteq M \times N, \text{ und für jedes } a \in M \\ \text{gibt es höchstens ein } b \in N, \text{ so daß } (a, b) \in f. \\ (\text{Eine Funktion ist also eine spezielle Relation.})$$

(2) f ist eine Funktion aus M in N

$$\stackrel{\text{Df}}{=} f \subseteq M \times N \text{ und für jedes } a \in M \text{ gibt es höchstens ein } b \in N, \\ \text{so daß } (a, b) \in f.$$

Bez.: $f : M \rightarrow N$.

(3) f ist eine *Funktion von M in N*

$\overline{\text{Df}}$ $f \subseteq M \times N$ und für jedes $a \in M$ existiert genau ein $b \in N$,
so daß $(a, b) \in f$. (Jedes $a \in M$ bestimmt eindeutig ein gewisses $b \in N$.)

Bez.: $f(a) = b$.

In diesem Falle heißt M *Definitionsbereich* (oder *domain*) von f und

$f(M) := \{b \in N : \text{es existiert ein } a \in M, \text{ so daß } b = f(a)\}$

Wertebereich oder *Bild* (oder *image*) von f .

Bez.: $M = D(f) = \text{dom}(f)$ und $f(M) = W(f) = \text{im}(f)$.

Für Abbildungen $f : M \rightarrow N$ gilt also im allgemeinen nur $D(f) \subseteq M$ und $W(f) \subseteq N$. N heißt auch *Zielbereich* (oder *range*) von f .

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 1

- Mengentheoretische Grundbegriffe (Gleichheit von Mengen, Inklusion, Durchschnitt, Vereinigung, Differenz, Komplement, kartesisches Produkt, Relationen, Funktionen);

1/2/1
