

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*partielle Ableitung*)

8/1/4

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert. f ist in \bar{c} *partiell nach x_i differenzierbar* ($i = 1, \dots, n$)

$\overline{\text{Df}}$ Die Funktion $\varphi(x_i) := f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$ ist (als Funktion der einen Veränderlichen x_i) an der Stelle c_i differenzierbar.

Nach der früheren Differenzierbarkeitsdefinition bedeutet dies, daß die folgenden Limites existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(c_i + h) - \varphi(c_i)}{h}, \quad \text{für } h := x_i - c_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - f(\bar{c})}{x_i - c_i}. \end{aligned}$$

Der Limes selbst (falls er existiert) heißt *partielle Ableitung* von f nach x_i an der Stelle \bar{c} (oder kurz: in \bar{c}).

$$\text{Bez.: } \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = f_{x_i}(\bar{c}).$$

Beispiel.

8/1/6

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y + 2y$, $\bar{c} = (a, b)$.

Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = (f(x, b))'(a) = (2xb)(a) = 2ab.$$

Allgemein ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) := \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 2y) = 2xy.$$

Analog erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + 2y) = x^2 + 2 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{c}) = a^2 + 2.$$

Die Abbildung 8.1 zeigt die geometrische Veranschaulichung der partiellen Ableitungen für eine Funktion mit zwei Veränderlichen.

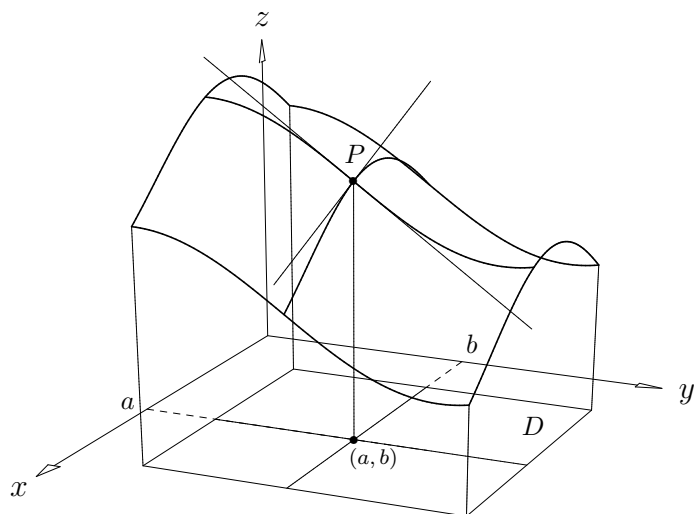


Abb. 8.1 Der Definitionsbereich der hier dargestellten Funktion $f(x, y)$ ist ein Rechteck D .
Schränkt man den Definitionsbereich auf $\{(x, y) \in D : y = b\}$ bzw. auf $\{(x, y) \in D : x = a\}$ ein, dann entstehen Kurven auf der Fläche $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$. Die partiellen Ableitungen f_x und f_y in (a, b) geben die Anstiege der Tangenten an diesen Kurven im Punkt (a, b) in Richtung der x -Achse bzw. der y -Achse an.

Die partielle Ableitung nach x_i gibt also den Anstieg der Tangente in Richtung der Achse x_i an. Wir werden diese Art der Ableitung noch einmal verallgemeinern zur sog. *Richtungsableitung*. Dazu geben wir uns (durch einen geeigneten Vektor) eine beliebige Richtung vor und betrachten den Anstieg der Tangente in diese Richtung, falls die zugrundegelegte Funktion dies zuläßt. Daraus ergibt sich folgende Definition.