

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*partielle Ableitung*)

8/1/4

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert. f ist in \bar{c} *partiell nach x_i differenzierbar* ($i = 1, \dots, n$)

\equiv_{Df} Die Funktion $\varphi(x_i) := f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$ ist (als Funktion der einen Veränderlichen x_i) an der Stelle c_i differenzierbar.

Nach der früheren Differenzierbarkeitsdefinition bedeutet dies, daß die folgenden Limites existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(c_i + h) - \varphi(c_i)}{h}, \quad \text{für } h := x_i - c_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - f(\bar{c})}{x_i - c_i}. \end{aligned}$$

Der Limes selbst (falls er existiert) heißt *partielle Ableitung* von f nach x_i an der Stelle \bar{c} (oder kurz: in \bar{c}).

$$\text{Bez.: } \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = f_{x_i}(\bar{c}).$$

8.2 Partielle Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung

Für $i = j$ schreibt man $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \right) := \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i^2} = f_{x_i x_i}(\bar{x})$.

8/2/1

Ist $i \neq j$, dann nennt man die 2. partiellen Ableitungen auch *gemischte partielle Ableitungen*.

Nach dem gleichen Muster definiert man induktiv die *n-ten partiellen Ableitungen*. Hierfür benutzt man die Bezeichnung

$$\frac{\partial^n f(\bar{x})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} = f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}(\bar{x}), \quad \text{wobei } i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}.$$

Satz 8.9 (*Satz von Schwarz*)

8/2/2

Es sei $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$.

Ist f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert und existieren in $U(\bar{c})$ die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xy} und ist f_{xy} in \bar{c} stetig, dann existiert auch f_{yx} in \bar{c} , und es ist $f_{xy}(\bar{c}) = f_{yx}(\bar{c})$.

(Unter den angegebenen Bedingungen sind die gemischten Ableitungen in \bar{c} gleich.)

Bemerkung.

Ist $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ und existieren in einer Umgebung $U(\bar{c})$ die partiellen Ableitungen f_{x_i} , f_{x_j} und $f_{x_i x_j}$ und ist $f_{x_i x_j}$ in \bar{c} stetig, dann existiert auch $f_{x_j x_i}$ in \bar{c} , und es ist $f_{x_i x_j}(\bar{c}) = f_{x_j x_i}(\bar{c})$.

Den Beweis hierzu führt man leicht auf den vorhergehenden Satz zurück.

Wir befassen uns jetzt mit *Differentialen höherer Ordnung*.

Dazu sei $f(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Das 1. Differential wurde als Funktion $df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die sich darstellen läßt in der Form

$$df := \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

wobei die dx_i als konstant anzusehen sind.

Wir berechnen (definieren) jetzt das 2. Differential von f wie folgt.

$$\begin{aligned} d^2 f &:= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right) \\ &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n \quad (dx_i \text{ konstant !}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_n\right) dx_1 + \dots \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n\right) dx_n \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_n dx_1 + \dots \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_1 dx_n + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n dx_n \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} dx_1 dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} dx_n dx_1 + \dots \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} dx_1 dx_n + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} dx_n dx_n \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n^2 \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

Sind die gemischten Ableitungen gleich, dann gilt

$$d^2 f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i.$$

Analog definiert man induktiv

$$d^{n+1}f := d(d^n f).$$

(Hierbei ist der Satz von Schwarz sehr nützlich.)