

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Satz 7.5 (Kettenregel)

7/1/23

Ist g in a und f in $g(a)$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ in a differenzierbar, und es ist $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$ („äußere Ableitung mal innere Ableitung“).

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Bemerkung.

9/1/4

- (1) Ist F_1 eine Stammfunktion von f in I und ist $F_2(x) = F_1(x) + c$ für jedes $x \in I$, dann ist offenbar auch F_2 eine Stammfunktion von f in I .
- (2) Besitzt f überhaupt eine Stammfunktion in I und ist $x_0 \in I$, dann gibt es genau eine Stammfunktion F von f in I , so daß $F(x_0) = 0$.

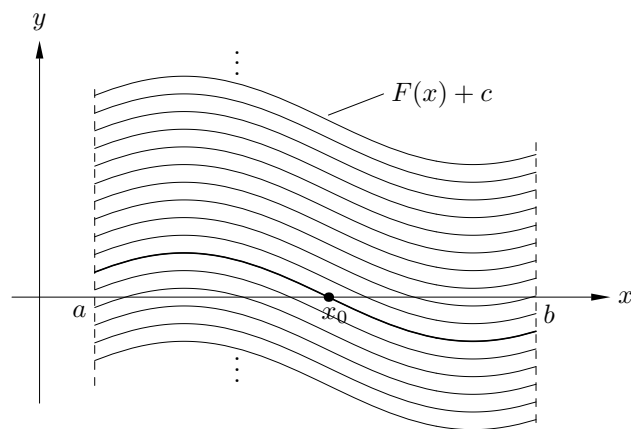


Abb. 9.3 Die Abbildung zeigt eine Schaar von Funktionen, die sich von F jeweils nur um eine additive Konstante unterscheiden. Ist F differenzierbar in $I = [a, b]$ und $F' = f$, dann symbolisiert diese Schaar die Menge aller Stammfunktionen von f in I , unter denen es für $x_0 \in I$ genau eine gibt, welche an der Stelle x_0 null wird.

Satz 9.4 (Substitutionsregel)

9/1/18

Sei g in dem Intervall I und f in dem Intervall J definiert, und es sei $g(I) \subseteq J$. Besitzt f in J eine Stammfunktion und ist g in I differenzierbar, dann besitzt $f(g(x)) \cdot g'(x)$ in I eine Stammfunktion, und es gilt

$$\int_{x_0}^x f(g(x))g'(x) dx = \int_{t_0}^t f(t) dt, \quad \text{wobei } x_0 \in I, t = g(x) \text{ und } t_0 = g(x_0).$$

Beweis. Sei $x_0 \in I$, $t_0 = g(x_0)$ und F die Stammfunktion von f in J , die in $t_0 \in J$ Null wird.

Es gilt also $F(t_0) = F(g(x_0)) = 0$ und

9/1/19

$$\left(F(g(x))\right)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Folglich ist $F(g(x))$ die Stammfunktion von $f(g(x)) \cdot g'(x)$, die in x_0 Null wird, denn $F(g(x_0)) = F(t_0) = 0$. Also ist

$$\underbrace{F(g(x))}_{=t} = \int_{x_0}^x f(g(x)) \cdot g'(x) dx,$$

und damit gilt auch

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(t) dx = \int_{x_0}^x f(g(x)) \cdot g'(x) dx. \quad \square$$