

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.1 Differenzierbarkeit

Das Wesen der Differenzierbarkeit besteht auch hier in der linearen Approximierbarkeit einer Funktion  $f$  in einer Umgebung  $U(\bar{c})$ ; d.h.,  $f$  läßt sich in  $U(\bar{c})$  darstellen als  $f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$  plus einem Rest  $o(\bar{x})$ , der in  $U(\bar{c})$  „klein“ ist, wobei hier 'klein' bedeuten soll, daß  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = 0 \quad (\in \mathbb{R}^m)$ . 8/1/3

Durch  $\bar{y} = A(\bar{x} - \bar{c})$  wird eine Punktmenge in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  beschrieben.

Die durch  $\bar{y} := t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$  definierte Punktmenge heißt *Tangentialebene* von  $f$  an der Stelle  $\bar{c}$ , und  $t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$  heißt *Gleichung der Tangentialebene*.

Der Punkt  $(\bar{c}, f(\bar{c}))$  erfüllt diese Gleichung, d.h., er liegt in der Tangentialebene.

Der Anteil  $A(\bar{x} - \bar{c})$  von der Funktion  $t(\bar{x})$  heißt *Differential* (oder *1. Differential*) von  $f$  in  $\bar{c}$ .

Wir werden auf diese Begriffe noch einmal zurückkommen, insbesondere im Zusammenhang mit der Berechnung und Darstellung der Ableitung und damit auch der Tangentialebene und des Differentials.

Um die Analogie bei der Differenzierbarkeit von Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher besser zu veranschaulichen, betrachten wir die folgenden beiden Spezialfälle.

Für  $n = m = 1$  (also  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $c \in \mathbb{R}$ ) definiert  $t(x) = f(c) + \underbrace{A}_{:=b}(x - c)$  eine

Gerade in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ , die Tangente von  $f$  an der Stelle  $c$ .

Für  $n = 2, m = 1$  und  $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$  wird durch  $t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$  eine Ebene in  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$  bestimmt, die offenbar den Punkt  $(\bar{c}, f(\bar{c}))$  enthält. In diesem Fall ist der Begriff „*Tangentialebene*“ wörtlich zu nehmen.

Wir haben bereits die Ableitung einer Funktion mit mehreren Veränderlichen definiert, wir haben aber noch kein praktikables Verfahren, um die Ableitung einer konkreten Funktion zu berechnen. Dazu betrachten wir zunächst Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und definieren den Begriff der partiellen Ableitbarkeit.

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.1 Das unbestimmte Integral

**Definition.** (*unbestimmtes Integral*)

9/1/6

Die Menge aller Stammfunktionen von  $f$  in einem Intervall  $I$  heißt *unbestimmtes Integral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.: } \int f(x) dx.$$

**Satz 9.4** (*Substitutionsregel*)

9/1/18

Sei  $g$  in dem Intervall  $I$  und  $f$  in dem Intervall  $J$  definiert, und es sei  $g(I) \subseteq J$ . Besitzt  $f$  in  $J$  eine Stammfunktion und ist  $g$  in  $I$  differenzierbar, dann besitzt  $f(g(x)) \cdot g'(x)$  in  $I$  eine Stammfunktion, und es gilt

$$\int_{x_0}^x f(g(x))g'(x) dx = \int_{t_0}^t f(t) dt, \quad \text{wobei } x_0 \in I, \quad t = g(x) \quad \text{und} \quad t_0 = g(x_0).$$

**Beispiele.**

3. Berechnung des unbestimmten Integrals  $\int \frac{1}{1+e^x} dx$ .

9/1/21/3

Wir versuchen dies wieder mit Hilfe der Substitutionsregel.

Hierzu setzen wir  $t = e^x$ . Folglich ist  $\frac{dt}{dx} = e^x$ . Rechnet man mit Differentialen, dann ergibt sich hieraus  $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$ . Folglich ist

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{t(1+t)} dt.$$

Der Integrand wird mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung* so umgeformt, daß sich die resultierenden Integrale leichter berechnen lassen. Hierzu machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1},$$

wobei  $A$  und  $B$  Konstanten sind und die Gleichheit als Gleichheit von rationalen Funktionen zu verstehen ist. Multipliziert man die Gleichung mit der Nennerfunktion  $t(t+1)$ , dann erhält man die folgende Polynomgleichheit:

$$1 = A(t+1) + Bt = (A+B)t + A.$$

Ein Koeffizientenvergleich der auf beiden Seiten der Gleichheit stehenden Polynome liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ A+B &= 0, \end{aligned}$$

mit den Unbekannten  $A, B$ . Die Lösung ergibt  $B = -A = -1$ . Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \frac{1}{t(1+t)} dt \\ &= \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \ln|t| - \ln|1+t| + c \\ &= \ln e^x - \ln(1+e^x) + c \\ &= x - \ln(1+e^x) + c. \end{aligned}$$