

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Das unbestimmte Integral von einer Funktion – die eine Stammfunktion besitzt – ist also eine ganze Klasse von Funktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante unterscheiden. Will man mit diesen Klassen „rechnen“, dann kann man dies repräsentantenweise tun und jeweils entsprechende Konstanten addieren. 9/1/7

Zusammenstellung von Grundintegralen

$$\begin{array}{ll}
 \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\
 \int \sin x dx = -\cos x + c & \\
 \int \cos x dx = \sin x + c & \\
 \int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + c & \\
 \int \frac{dx}{\sin x} = -\cot x + c & \\
 \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c & \\
 \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + c, & |x| < 1 \\
 \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c & \\
 \int e^x dx = e^x + c & \\
 \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c & \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c & \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c & \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c, & |x| > 1 \\
 \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|. &
 \end{array}$$

Diese Grundintegrale werden alle durch Differentiation bewiesen.

9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 9.11 Ist f in I definiert und beschränkt und besitzt f in I höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen, dann ist f in I integrierbar. 9/4/2

Satz 9.14 Ist f in $[a, b]$ integrierbar und $a < c < b$, dann ist f in $[a, c]$ und in $[c, b]$ integrierbar, und es ist 9/4/10

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Übungsaufgaben

11. Es sei

9/10/11

$$f(x) = \begin{cases} 5 \sin x + 3x & \text{für } x \leq 1, \\ x^{-1} + 3x^2 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Man berechne $\int_{-2}^5 f(x) dx$.