

# Kapitel 9

## Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

### 9.1 Das unbestimmte Integral

**Definition.** (*unbestimmtes Integral*)

9/1/6

Die Menge aller Stammfunktionen von  $f$  in einem Intervall  $I$  heißt *unbestimmtes Integral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.: } \int f(x) dx.$$

Das unbestimmte Integral von einer Funktion – die eine Stammfunktion besitzt – ist also eine ganze Klasse von Funktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante unterscheiden. Will man mit diesen Klassen „rechnen“, dann kann man dies repräsentantenweise tun und jeweils entsprechende Konstanten addieren.

9/1/7

### Zusammenstellung von Grundintegralen

$$\begin{array}{ll} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ \int \sin x dx = -\cos x + c & \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \\ \int \cos x dx = \sin x + c & \int e^x dx = e^x + c \\ \int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + c & \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \\ \int \frac{dx}{\sin x} = -\cot x + c & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c & \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c \\ \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + c, & |x| < 1 \\ & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c, \quad |x| > 1 \\ & \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|. \end{array}$$

Diese Grundintegrale werden alle durch Differentiation bewiesen.

**Satz 9.3** (*partielle Integration*)

9/1/13

Es seien  $f$  und  $g$  in  $I$  definiert. Besitzt  $f$  in  $I$  eine Stammfunktion  $F$  und ist  $g$  in  $I$  differenzierbar und besitzt  $F \cdot g'$  in  $I$  eine Stammfunktion, dann besitzt auch  $f \cdot g$  in  $I$  eine Stammfunktion, und es ist

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx.$$

## Beispiele.

6. Hat man eine beliebige rationale Funktion  $f(x)$  in der Form  $\frac{p(x)}{q(x)}$  gegeben, dann 9/1/21/6  
kann durch Polynomdivision immer erreicht werden, daß

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

wobei der Grad von  $r(x)$  kleiner ist als der Grad von  $q(x)$ .

Für die entsprechende Partialbruchzerlegung von  $\frac{r(x)}{g(x)}$  macht man folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} & \frac{r(x)}{(x-a_1)^{m_1} \cdots (x-a_k)^{m_k} (x^2+b_1x+c_1)^{n_1} \cdots (x^2+b_lx+c_l)^{n_l}} = \\ & \frac{A_{11}}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \cdots + \frac{A_{km_k}}{(x-a_k)^{m_k}} + \\ & \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots + \frac{B_{1n_1}x+C_{1n_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{B_{l1}x+C_{l1}}{x^2+b_lx+c_l} + \cdots + \frac{B_{ln_l}x+C_{ln_l}}{(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}}, \end{aligned}$$

wobei  $q(x)$  schon als Produkt gegeben sei und die Faktoren  $x^2+b_ix+c_i$  keine reellen Nullstellen besitzen sollen. Die Multiplikation der Gleichung mit  $q(x)$  liefert wieder eine Polynomgleichung. Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein lineares Gleichungssystem, aus dem man die Koeffizienten  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$  berechnen kann. Mit dieser Methode bleiben schließlich nur noch Integrale über Funktionen der Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^k} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^l}$$

zu berechnen.

Bei der ersten Funktion substituiert man  $t = x - a$ , und löst auf diese Weise das Integral.

Bei der zweiten Funktion ist  $x^2+bx+c = (x+\frac{b}{2})^2 + c - (\frac{b}{2})^2$ . Da  $x^2+bx+c$  keine reelle Nullstelle besitzt, ist  $c - (\frac{b}{2})^2 > 0$ . Der Einfachheit wegen setzen wir  $c - (\frac{b}{2})^2 := r^2$ . Substituiert man jetzt  $t = x + \frac{b}{2}$ , so ist  $dx = dt$  und  $x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + r^2 = t^2 + r^2 = r^2((\frac{t}{r})^2 + 1)$ .

Folglich erhält man

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^l} dx = \int \frac{At + (B - A \cdot \frac{b}{2})}{r^{2l}((\frac{t}{r})^2 + 1)^l} dt = \frac{1}{r^{2l}} \int \frac{At + C}{((\frac{t}{r})^2 + 1)^l} dt := (*),$$

wobei  $C := B - A \cdot \frac{b}{2}$ .

Substituiert man erneut  $u := \frac{t}{r}$ , also  $t = r \cdot u$  und  $dt = r \cdot du$ , so ergibt sich

$$(*) = \frac{1}{r^{2l}} \int \frac{r \cdot Au + C}{(u^2 + 1)^l} \cdot r du = \frac{1}{r^{2l-2}} \int \frac{Au + C^*}{(u^2 + 1)^l} du, \quad \text{mit } C^* = \frac{c}{r}.$$

Es bleiben schließlich nur noch die Integrale

$$\int \frac{u}{(u^2 + 1)^l} du \quad \text{und} \quad \int \frac{du}{(u^2 + 1)^l}$$

zu berechnen.

Bei dem ersten Integral substituiert man  $v := u^2 + 1 \implies dv = 2u du$ , also

$$\int \frac{u}{(u^2 + 1)^l} du = \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^l},$$

und dies ist ein Grundintegral.

Das zweite Integral ist für  $l = 1$  ein Grundintegral; für  $l > 1$  führt folgender Ansatz schließlich zum Ziel:

$$\int \frac{du}{(u^2 + 1)^l} = \frac{a^* u + b^*}{(u^2 + 1)^{l-1}} + c^* \int \frac{du}{(u^2 + 1)^{l-1}}, \quad (\star\star)$$

wobei  $a^*, b^*, c^*$  zu bestimmende Konstanten sind. (Wenn dieser Ansatz gelingt, dann hat man das Problem „von  $l > 1$  auf  $l - 1 \geq 1$ “ reduziert. Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens führt das Ausgangsintegral auf ein Grundintegral zurück.)

Differenziert man die Gleichung  $(\star\star)$ , dann erhält man (analog wie bei der Partialbruchzerlegung) eine Gleichheit von rationalen Funktionen. Durch Koeffizientenvergleich entsteht ein lineares Gleichungssystem, aus dem sich  $a^*, b^*, c^*$  bestimmen lassen.

Es ergibt sich:

$$a^* = \frac{1}{2(l-1)}, \quad b^* = 0, \quad c^* = \frac{2l-3}{2l-2}.$$

(vgl. auch Literaturangabe [2], Band 3, Nr. 13, Seite 38)

## Übungsaufgaben

4. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale  $\int f(x) dx$  :

9/10/4

- |   |   |
|---|---|
| (a) $f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 + 2x - 8},$ | (d) $f(x) = \frac{4x - 3}{2x^2 - 3x},$          |
| (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}},$  | (e) $f(x) = \frac{-2 \cos x \sin x}{\cos^2 x},$ |
| (c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 9},$           | (f) $f(x) = x \ln^2 x.$                         |