

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Untersumme, Obersumme*)

9/2/3

Sei f in I definiert und beschränkt.

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\underline{\overline{\text{Df}}} \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\underline{\overline{\text{Df}}} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\begin{aligned} \text{Bez.:} \quad & \int_{\frac{a}{-}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\frac{b}{-}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ & \int_{-a}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.:} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

Übungsaufgaben

6. Es sei f in dem Intervall $[a, b]$ integrierbar und $f(x) \leq c$ für alle $x \in [a, b]$.

9/10/6

Man beweise $\int_a^b f(x) dx \leq c(b - a)$.