

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.13 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{a} \in \mathbb{R}$.

6/3/11

Ist f in \bar{a} stetig und $f(\bar{a}) > 0$ (bzw. $f(\bar{a}) < 0$), dann gibt es eine Umgebung $U(\bar{a})$, so daß $f(\bar{x}) > 0$ (bzw. $f(\bar{x}) < 0$) für alle $\bar{x} \in U(\bar{a}) \cap D(f)$.

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Untersumme, Obersumme*)

9/2/3

Sei f in I definiert und beschränkt.

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\stackrel{\text{Df}}{\underline{S}_f(\mathfrak{z})} := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\stackrel{\text{Df}}{\overline{S}_f(\mathfrak{z})} := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\begin{aligned} \text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \underline{\int}_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \overline{\int}_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

Übungsaufgaben

5. Beweisen Sie: Ist die Funktion f in dem Intervall $[a, b]$ stetig und nicht negativ 9/10/5

und ist $\int_a^b f(x)dx = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

[Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.]

7. Es seien f, g in dem Intervall $[a, b]$ stetig und es sei $f(x) \leq g(x)$ für jedes $x \in [a, b]$. 9/10/7

Gibt es ein $c \in [a, b]$, so daß $f(c) < g(c)$, dann ist $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$.