

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.7 Uneigentliche Integrale

Definition. (*uneigentliches Integral über unendlichen Intervallen*)

9/7/1

Es sei a eine reelle Zahl, f sei für alle $x \geq a$ definiert und in $[a, x]$ integrierbar,

und es sei $F(x) := \int_a^x f(t) dt$.

f ist in $[a, \infty) = \{x : a \leq x\}$ *uneigentlich integrierbar*

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.

Der Limes heißt dann *uneigentliches Integral* von f in $[a, \infty)$.

$$\text{Bez.: } \int_a^\infty f(t) dt$$

Ist f in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann heißt $\int_a^\infty f(t) dt$ *konvergent*, anderenfalls *divergent*.

Ist $|f|$ in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann heißt $\int_a^\infty f(t) dt$ *absolut konvergent*.

Analog definiert man das uneigentliche Integral von f in $(-\infty, a]$. Hierbei sei f für jedes $x \leq a$ definiert und in $[x, a]$ integrierbar.

Man betrachtet dann $F(x) := \int_x^a f(t) dt$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

Definition. f ist in $(-\infty, \infty)$ *uneigentlich integrierbar*

9/7/2

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so daß f in $(-\infty, a]$ und in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar ist.

$\int_{-\infty}^\infty f(t) dt \overline{\text{Df}} \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^\infty f(t) dt$ heißt *uneigentliches Integral* von f in $(-\infty, \infty)$.

Definition. (*uneigentliche Integrale über unbeschränkten Funktionen*)

9/7/5

Es sei $a < b$ und es gelte eine der Bedingungen:

- (1) f ist in $[a, b)$ definiert und für jedes $x \in [a, b)$ in $[a, x]$ integrierbar.
- (2) f ist in $(a, b]$ definiert und für jedes $x \in (a, b]$ in $[x, b]$ integrierbar.
- (3) $a < c < b$, und f ist für jedes $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $a \leq x_1 < c < x_2 \leq b$ in $[a, x_1]$ und in $[x_2, a]$ integrierbar.

f ist in $[a, b]$ *uneigentlich integrierbar*

- \equiv
Df.
- (1) $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f(t) dt$ existiert bzw.
- (2) $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \int_x^b f(t) dt$ existiert bzw.
- (3) $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \int_a^x f(t) dt$ und $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \int_x^b f(t) dt$ existieren.

Diese Limites heißen – falls sie existieren – *uneigentliche Integrale* von f in $[a, b]$, und $\int_a^b f(t) dt$ heißt dann *konvergent*, anderenfalls *divergent*.

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 9

- Definition uneigentlicher Integrale,

9/11/16
