

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.1 Das unbestimmte Integral

**Beispiele.**

3. Berechnung des unbestimmten Integrals  $\int \frac{1}{1+e^x} dx$ .

9/1/21/3

Wir versuchen dies wieder mit Hilfe der Substitutionsregel.

Hierzu setzen wir  $t = e^x$ . Folglich ist  $\frac{dt}{dx} = e^x$ . Rechnet man mit Differentialen, dann ergibt sich hieraus  $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$ . Folglich ist

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{t(1+t)} dt.$$

Der Integrand wird mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung* so umgeformt, daß sich die resultierenden Integrale leichter berechnen lassen. Hierzu machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1},$$

wobei  $A$  und  $B$  Konstanten sind und die Gleichheit als Gleichheit von rationalen Funktionen zu verstehen ist. Multipliziert man die Gleichung mit der Nennerfunktion  $t(t+1)$ , dann erhält man die folgende Polynomgleichheit:

$$1 = A(t+1) + Bt = (A+B)t + A.$$

Ein Koeffizientenvergleich der auf beiden Seiten der Gleichheit stehenden Polynome liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ A+B &= 0, \end{aligned}$$

mit den Unbekannten  $A, B$ . Die Lösung ergibt  $B = -A = -1$ . Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \frac{1}{t(1+t)} dt \\ &= \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \ln|t| - \ln|1+t| + c \\ &= \ln e^x - \ln(1+e^x) + c \\ &= x - \ln(1+e^x) + c. \end{aligned}$$

4. Es soll nun  $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx$  berechnet werden.

9/1/21/4

Wir versuchen dies erneut mit der Partialbruchzerlegung. Hierzu machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Multipliziert man diese Gleichung (Gleichheit von Funktionen) mit der Nennerfunktion  $x^2(x^2+1)$ , dann entsteht eine Gleichung zwischen zwei Polynomen:

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x^2 \\ &= Ax^2 + A + Bx^3 + Bx + Cx^3 + Dx^2 \\ &= (B+C)x^3 + (A+D)x^2 + Bx + A. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man hieraus sofort:

$$A = 1, D = -A = -1, B = 0, C = 0.$$

Also

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx &= \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= -\frac{1}{x} - \arctan x + c. \end{aligned}$$

6. Hat man eine beliebige rationale Funktion  $f(x)$  in der Form  $\frac{p(x)}{q(x)}$  gegeben, dann 9/1/21/6  
kann durch Polynomdivision immer erreicht werden, daß

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

wobei der Grad von  $r(x)$  kleiner ist als der Grad von  $q(x)$ .

Für die entsprechende Partialbruchzerlegung von  $\frac{r(x)}{g(x)}$  macht man folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} &\frac{r(x)}{(x-a_1)^{m_1} \cdots (x-a_k)^{m_k} (x^2+b_1x+c_1)^{n_1} \cdots (x^2+b_lx+c_l)^{n_l}} = \\ &\frac{A_{11}}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \cdots + \frac{A_{km_k}}{(x-a_k)^{m_k}} + \\ &\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots + \frac{B_{1n_1}x+C_{1n_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{B_{l1}x+C_{l1}}{x^2+b_lx+c_l} + \cdots + \frac{B_{ln_l}x+C_{ln_l}}{(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}}, \end{aligned}$$

wobei  $q(x)$  schon als Produkt gegeben sei und die Faktoren  $x^2+b_ix+c_i$  keine reellen Nullstellen besitzen sollen. Die Multiplikation der Gleichung mit  $q(x)$  liefert wieder eine Polynomgleichung. Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein lineares Gleichungssystem, aus dem man die Koeffizienten  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$  berechnen kann. Mit dieser Methode bleiben schließlich nur noch Integrale über Funktionen der Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^k} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^l}$$

zu berechnen.

Bei der ersten Funktion substituiert man  $t = x - a$ , und löst auf diese Weise das Integral.

Bei der zweiten Funktion ist  $x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + c - (\frac{b}{2})^2$ . Da  $x^2 + bx + c$  keine reelle Nullstelle besitzt, ist  $c - (\frac{b}{2})^2 > 0$ . Der Einfachheit wegen setzen wir  $c - (\frac{b}{2})^2 := r^2$ .

Substituiert man jetzt  $t = x + \frac{b}{2}$ , so ist  $dx = dt$  und  $x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + r^2 = t^2 + r^2 = r^2((\frac{t}{r})^2 + 1)$ .

Folglich erhält man

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^l} dx = \int \frac{At + (B - A \cdot \frac{b}{2})}{r^{2l}((\frac{t}{r})^2 + 1)^l} dt = \frac{1}{r^{2l}} \int \frac{At + C}{((\frac{t}{r})^2 + 1)^l} dt := (\star),$$

wobei  $C := B - A \cdot \frac{b}{2}$ .

Substituiert man erneut  $u := \frac{t}{r}$ , also  $t = r \cdot u$  und  $dt = r \cdot du$ , so ergibt sich

$$(\star) = \frac{1}{r^{2l}} \int \frac{r \cdot Au + C}{(u^2 + 1)^l} \cdot r du = \frac{1}{r^{2l-2}} \int \frac{Au + C^*}{(u^2 + 1)^l} du, \text{ mit } C^* = \frac{C}{r}.$$

Es bleiben schließlich nur noch die Integrale

$$\int \frac{u}{(u^2 + 1)^l} du \quad \text{und} \quad \int \frac{du}{(u^2 + 1)^l}$$

zu berechnen.

Bei dem ersten Integral substituiert man  $v := u^2 + 1 \implies dv = 2u du$ , also

$$\int \frac{u}{(u^2 + 1)^l} du = \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^l},$$

und dies ist ein Grundintegral.

Das zweite Integral ist für  $l = 1$  ein Grundintegral; für  $l > 1$  führt folgender Ansatz schließlich zum Ziel:

$$\int \frac{du}{(u^2 + 1)^l} = \frac{a^* u + b^*}{(u^2 + 1)^{l-1}} + c^* \int \frac{du}{(u^2 + 1)^{l-1}}, \quad (\star\star)$$

wobei  $a^*, b^*, c^*$  zu bestimmende Konstanten sind. (Wenn dieser Ansatz gelingt, dann hat man das Problem „von  $l > 1$  auf  $l - 1 \geq 1$ “ reduziert. Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens führt das Ausgangsintegral auf ein Grundintegral zurück.)

Differenziert man die Gleichung  $(\star\star)$ , dann erhält man (analog wie bei der Partialbruchzerlegung) eine Gleichheit von rationalen Funktionen. Durch Koeffizientenvergleich entsteht ein lineares Gleichungssystem, aus dem sich  $a^*, b^*, c^*$  bestimmen lassen.

Es ergibt sich:

$$a^* = \frac{1}{2(l-1)}, \quad b^* = 0, \quad c^* = \frac{2l-3}{2l-2}.$$

(vgl. auch Literaturangabe [2], Band 3, Nr. 13, Seite 38)

## Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 9

- Partialbruchzerlegung (allgemeine Problemstellung),

9/11/4
--------