

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (Zerlegung)

9/2/1

\mathfrak{z} ist eine *Zerlegung* (oder *Partition*) von I

$\overline{\text{Df}}$ \mathfrak{z} ist eine endliche Folge (a_0, \dots, a_{n+1}) von reellen Zahlen a_0, \dots, a_{n+1} , so daß
 $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$.

Die Elemente a_0, \dots, a_{n+1} heißen dann *Unterteilungspunkte* von \mathfrak{z} ,

9/2/2

$I_i := [a_i, a_{i+1}]$ bezeichne das i -te Teilintervall bezüglich \mathfrak{z} , und

$d(\mathfrak{z}) := \max\{a_{i+1} - a_i : i = 0, \dots, n\}$ heißt *Maximaldistanz* (oder *Norm*, *Feinheitmaß*, ...) von \mathfrak{z} .

Definition. (Untersumme, Obersumme)

9/2/3

Sei f in I definiert und beschränkt.

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Df}} \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Df}} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Definition. (Verfeinerung)

9/2/5

Es seien \mathfrak{z} und \mathfrak{z}' Zerlegungen von I .

\mathfrak{z}' ist eine *Verfeinerung* von \mathfrak{z}

$\overline{\text{Df}}$ Alle Unterteilungspunkte von \mathfrak{z} sind auch Unterteilungspunkte von \mathfrak{z}' .

Satz 9.5 Es sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt und $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ seien beliebige Zerlegungen von I . Dann gilt:

9/2/6

$$(1) \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

$$(2) \quad (b - a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \quad \text{und} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in I} f(x).$$

$$(3) \quad \text{Ist } \mathfrak{z}' \text{ eine Verfeinerung von } \mathfrak{z}, \text{ dann gilt } \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

$$(4) \quad \text{Es ist stets } \underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2).$$

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes* (*Riemann-*) *Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 9

- Definitionen: Zerlegung, Verfeinerung, Maximaldistanz, ausgezeichnete Zerlegungsfolge, Ober-, Untersumme, Ober-, Unterintegral, bestimmtes Integral,

9/11/5