

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (*Grenze*)

2/3/2

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

(1) Sei M nach oben beschränkt. a ist *obere Grenze* von M

$\overline{\text{Df}}$ a ist die kleinste obere Schranke von M .

Bez.: $a = \sup M$ (*Supremum von M*).

(2) Sei M nach unten beschränkt. a ist *untere Grenze* von M

$\overline{\text{Df}}$ a ist die größte untere Schranke von M .

Bez.: $a = \inf M$ (*Infimum von M*).

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

Die Differentialrechnung ist u.a. durch das Tangentenproblem und das Geschwindigkeitsproblem motiviert. Dabei ist also eine Funktion f – etwa die Funktion des zurückgelegten Weges eines sich bewegenden Massepunktes – gegeben, und die Ableitung f' der Funktion f – also die Funktion der Geschwindigkeit des Punktes – ist gesucht.

9/0

In der Praxis entsteht oft die umgekehrte Fragestellung. Z.B. kann die Funktion der Geschwindigkeit gegeben sein, und man sucht die Funktion des Weges. Also gegeben ist eine Funktion f , gesucht ist eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$. Dies führt uns in gewisser Weise zur Umkehrung des Differenzierens, zum (unbestimmten) Integrieren. Mit dieser Fragestellung verwandt, obwohl auf dem ersten Blick nicht zu erkennen, ist das sog. *Flächenproblem*:

Gegeben sei eine in einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ mit $a < b$ definierte und nicht negative Funktion f . Es erhebt sich die Frage, ob der ebenen Punktmenge

$$M = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

in „vernünftiger Weise“ ein Flächeninhalt zugeschrieben werden kann und wie dieser gegebenenfalls berechnet werden könnte? (siehe auch Abb. 9.1 und 9.2)

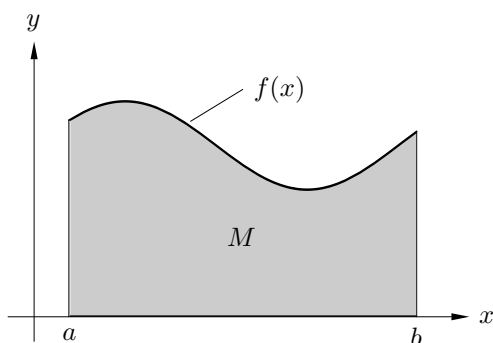


Abb. 9.1 Die schattierte Fläche symbolisiert den vermeintlichen Flächeninhalt der oben definierten Punktmenge M .

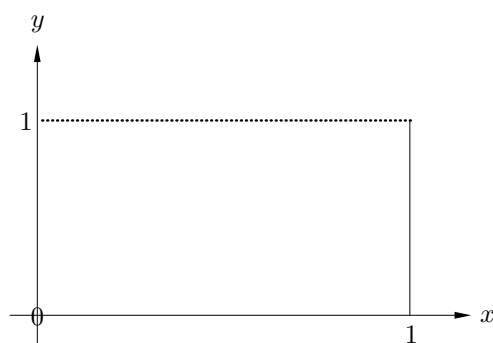


Abb. 9.2 Sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
Läßt sich auch dieser Punktmenge M ein Flächeninhalt zuordnen?

Diese Fragestellungen werden in den nächsten beiden Abschnitten behandelt. Wir befassen uns zunächst mit der „Umkehrung des Differenzierens“.

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Wir wenden uns nun dem Flächenproblem zu. Gegeben sei also ein abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ mit $a < b$ und eine in I definierte und beschränkte Funktion f . Im folgenden sei stets – falls nichts anderes vereinbart wird – I dieses Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. (vgl. auch Abb. 9.1)

9/2/0

Wenn f in I nicht negativ ist und der Flächeninhalt A der ebenen Punktmenge $M := \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ überhaupt existiert, dann muß folgende Ungleichung gelten (siehe Abb. 9.4)

$$(b - a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq A \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in I} f(x).$$

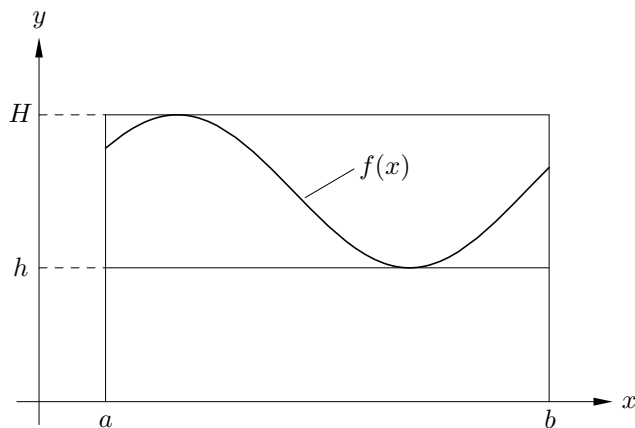


Abb. 9.4 Die Abbildung zeigt, daß der vermeintliche Flächeninhalt A zwischen dem Flächeninhalt des kleineren und des größeren Rechtecks liegen muß. h und H bezeichnen das Infimum bzw. das Supremum von f in $[a, b]$.

Mit dieser Grundidee versuchen wir jetzt, den vermeintlichen „Flächeninhalt“ näherungsweise zu berechnen (hierbei setzen wir die Definition des Flächeninhalts eines

Rechtecks als gegeben voraus.)

Zur Behandlung des Problems benötigen wir einige neue Begriffsbildungen: *Zerlegung eines Intervalls, Untersumme, Obersumme, Verfeinerung einer Zerlegung.*