

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (Zerlegung)

9/2/1

\mathfrak{z} ist eine Zerlegung (oder Partition) von I

$\overline{\text{Df}}$ \mathfrak{z} ist eine endliche Folge (a_0, \dots, a_{n+1}) von reellen Zahlen a_0, \dots, a_{n+1} , so daß
 $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$.

Definition. (Untersumme, Obersumme)

9/2/3

Sei f in I definiert und beschränkt.

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Df}} \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Df}} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Beispiel. Wir diskutieren jetzt ein Beispiel dafür, daß das Unterintegral kleiner ist als das Oberintegral.

9/2/12

Dazu sei $I = [0, 1]$ und $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 1, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$

Dann gilt für jede Zerlegung \mathfrak{z} von I und jedes Teilintervall $I_i = [a_i, a_{i+1}] \subseteq I$:

$$\inf_{x \in I_i} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \sup_{x \in I_i} f(x) = 2.$$

Folglich ist

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \underbrace{\inf_{x \in I_i} f(x)}_{=1} = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_0 = 1$$

und

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \underbrace{\sup_{x \in I_i} f(x)}_{=2} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) = 2.$$

Für eine beliebige Zerlegung \mathfrak{z} von I ist also stets $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) = 1 < 2 = \overline{S}_f(\mathfrak{z})$.

Folglich ist auch

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 < 2 = \int_0^1 f(x) dx.$$

Damit ist die Funktion f in I nicht integrierbar, und die entsprechende Punktmenge M besitzt keinen Flächeninhalt. (siehe auch Abb. 9.6)

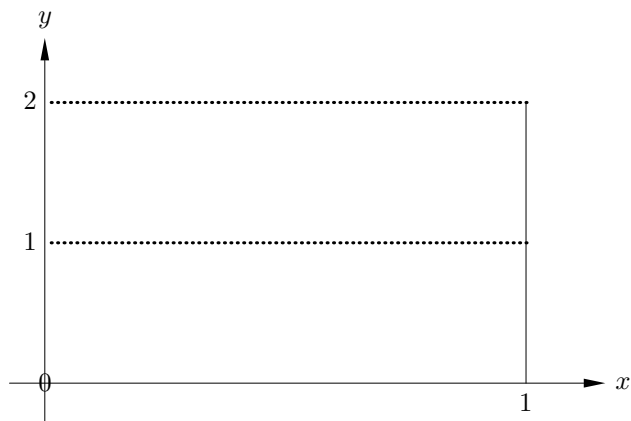


Abb. 9.6 Die Abbildung zeigt (symbolisch) die in der obigen Bemerkung definierte Funktion f mit $I = [0, 1]$ und $x \in I$. Der dort betrachteten ebenen Punktmenge $M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$ ist kein Flächeninhalt zugeordnet.