

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (Zerlegung)

9/2/1

\mathfrak{z} ist eine *Zerlegung* (oder *Partition*) von I

$\overline{\text{Df}}$ \mathfrak{z} ist eine endliche Folge (a_0, \dots, a_{n+1}) von reellen Zahlen a_0, \dots, a_{n+1} , so daß
 $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$.

Definition. (Untersumme, Obersumme)

9/2/3

Sei f in I definiert und beschränkt.

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Df}} \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Df}} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Definition. (Verfeinerung)

9/2/5

Es seien \mathfrak{z} und \mathfrak{z}' Zerlegungen von I .

\mathfrak{z}' ist eine *Verfeinerung* von \mathfrak{z}

$\overline{\text{Df}}$ Alle Unterteilungspunkte von \mathfrak{z} sind auch Unterteilungspunkte von \mathfrak{z}' .

Satz 9.5 Es sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt und $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ seien belie- 9/2/6
bige Zerlegungen von I . Dann gilt:

$$(1) \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

$$(2) \quad (b - a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \quad \text{und} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in I} f(x).$$

$$(3) \quad \text{Ist } \mathfrak{z}' \text{ eine Verfeinerung von } \mathfrak{z}, \text{ dann gilt } \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

$$(4) \quad \text{Es ist stets } \underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2).$$

Definition. (Unterintegral, Oberintegral, Integral)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_{\frac{a}{-}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\frac{b}{-}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt integrierbar*), und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

Satz 9.6 Ist f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt, dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jede Zerlegung \mathfrak{z} von I mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$ gilt: 9/2/13

$$(1) \quad 0 \leq \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon \quad \text{und}$$

$$(2) \quad 0 \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon.$$

Beweis. (1). Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Unterintegrals existiert eine Zerlegung $\mathfrak{z}' = (a_0, \dots, a_{n+1})$ von I , so daß 9/2/14

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da f in I beschränkt ist, gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $|f(x)| < c$ für alle $x \in I$.

Es sei

$$\delta := \min \left\{ d(\mathfrak{z}'), \frac{\varepsilon}{6c(n+1)} \right\}$$

und \mathfrak{z} eine beliebige Zerlegung von I mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$. Wir zeigen:

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon.$$

Es sei \mathfrak{z}'' eine gemeinsame Verfeinerung von \mathfrak{z} und \mathfrak{z}' . Dann ist $0 \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}'')$, also gilt

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}'') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es genügt zu zeigen, daß

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}'') - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen $d(\mathfrak{z}) < \delta < d(\mathfrak{z}')$ enthält jedes Intervall von \mathfrak{z} höchstens einen Zerlegungspunkt von \mathfrak{z}' als inneren Punkt. Die durch \mathfrak{z} entstehenden Intervalle werden in zwei Klassen zerlegt:

$M_1 :=$ Intervalle von \mathfrak{z} , die kein a_i von \mathfrak{z}' als inneren Punkt enthalten,

$M_2 :=$ Intervalle von \mathfrak{z} , die ein a_i von \mathfrak{z}' als inneren Punkt enthalten.

Mit der Zerlegung \mathfrak{z}'' erhält man die folgenden beiden Intervallmengen:

$M'_1 :=$ Intervalle von \mathfrak{z}'' , die schon zu M_1 gehören,

$M''_1 :=$ Intervalle von \mathfrak{z}'' , die nicht zu M_1 gehören.

In der Differenz $\underline{S}_f(\mathfrak{z}'') - \underline{S}_f(\mathfrak{z})$ liefern die Intervalle aus M_1 (diese gehören auch zu M'_1) keinen Beitrag (die entsprechenden Summanden heben sich gegenseitig auf). Es bleiben noch die Summanden zu berücksichtigen, die durch die Intervalle aus M_2 bzw. M''_2 entstehen.

M_2 enthält höchstens $(n+1)$ Intervalle und M''_2 höchstens $2(n+1)$.

Wegen $\left| (c-d) \cdot \inf_{x \in [c,d]} f(x) \right| < \delta \cdot c$, falls $|c-d| < \delta$, erhält man

$$|\underline{S}_f(\mathfrak{z}'') - \underline{S}_f(\mathfrak{z})| \leq 3(n+1)c \cdot \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(2) zeigt man analog. \square