

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (Zerlegung)

9/2/1

\mathfrak{z} ist eine *Zerlegung* (oder *Partition*) von I

$\overline{\text{Df}}$ \mathfrak{z} ist eine endliche Folge (a_0, \dots, a_{n+1}) von reellen Zahlen a_0, \dots, a_{n+1} , so daß
 $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$.

Die Elemente a_0, \dots, a_{n+1} heißen dann *Unterteilungspunkte* von \mathfrak{z} ,

9/2/2

$I_i := [a_i, a_{i+1}]$ bezeichne das i -te Teilintervall bezüglich \mathfrak{z} , und

$d(\mathfrak{z}) := \max\{a_{i+1} - a_i : i = 0, \dots, n\}$ heißt *Maximaldistanz* (oder *Norm*, *Feinheitsmaß*, ...) von \mathfrak{z} .

Definition. (Untersumme, Obersumme)

9/2/3

Sei f in I definiert und beschränkt.

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Df}} \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Df}} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

9/2/4

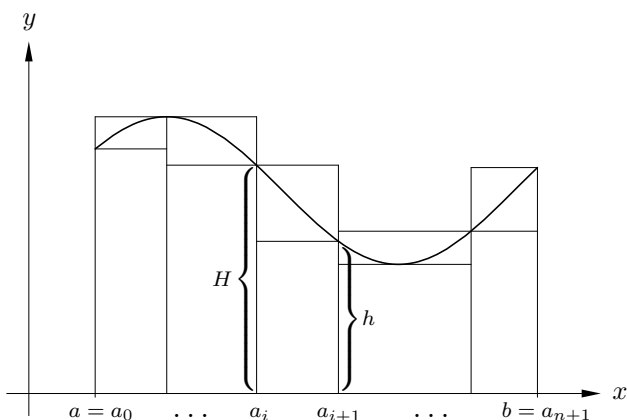


Abb. 9.5 Mit Hilfe des i -ten Intervalls $I_i := [a_i, a_{i+1}]$ werden zwei Rechtecke definiert, deren Breite jeweils $a_{i+1} - a_i$ beträgt und deren Höhe durch $h := \inf_{x \in I_i} f(x)$ bzw. $H := \sup_{x \in I_i} f(x)$ festgelegt ist. Die Summe der jeweils kleineren Rechtecke ergibt die Untersumme und die der größeren die Obersumme bei der angegebenen Zerlegung.