

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

**Definition.** (Zerlegung)

9/2/1

$\mathfrak{z}$  ist eine Zerlegung (oder Partition) von  $I$

$\overline{\text{Df}}$   $\mathfrak{z}$  ist eine endliche Folge  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  von reellen Zahlen  $a_0, \dots, a_{n+1}$ , so daß  
 $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$ .

**Definition.** (Untersumme, Obersumme)

9/2/3

Sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

(1)  $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$  heißt *Untersumme* von  $f$  in  $I$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$

$$\overline{\text{Df}} \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2)  $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$  heißt *Obersumme* von  $f$  in  $I$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$

$$\overline{\text{Df}} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

**Definition.** (Unterintegral, Oberintegral, Integral)

9/2/9

Es sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von  $f$  in  $I$ , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von  $f$  in  $I$ .

$$\begin{aligned} \text{Bez.:} \quad & \int_{\frac{a}{-}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\frac{b}{-}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ & \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Sind Unter- und Oberintegral von  $f$  in  $I$  gleich, dann heißt  $f$  in  $I$  (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.:} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

#### 9.3 Integrierbarkeitskriterien

**Satz 9.8** (Riemannsches Integrierbarkeitskriterium)

9/3/1

Sei  $f$  in  $I = [a, b]$  definiert und beschränkt. Dann gilt:  $f$  ist in  $I$  integrierbar gdw für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $\mathfrak{z}$  von  $I$  existiert, so daß  $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$ .