

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

**Definition.** (*Untersumme, Obersumme*)

9/2/3

Sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

(1)  $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$  heißt *Untersumme* von  $f$  in  $I$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2)  $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$  heißt *Obersumme* von  $f$  in  $I$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

#### 9.3 Integrierbarkeitskriterien

**Definition.** (*Zwischensumme*)

9/3/4

Es sei  $f$  in  $I$  definiert,  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  eine Zerlegung von  $I$ , und für jedes  $i = 1, \dots, n$  sei  $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ .

Dann nennt man  $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$  ein *Zwischenstellensystem* bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$ , und

$S_f(\mathfrak{z}, \tau) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot f(\xi_i)$  heißt *Zwischensumme* von  $f$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$  und dem Zwischenstellensystem  $\tau$ .

**Bemerkung.** Ist  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt, dann gilt für  $\xi \in [a_i, a_{i+1}] := I_i$  stets  $\inf_{x \in I_i} f(x) \leq f(\xi) \leq \sup_{x \in I_i} f(x)$  und somit auch

9/3/5

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq S_f(\mathfrak{z}, \tau) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

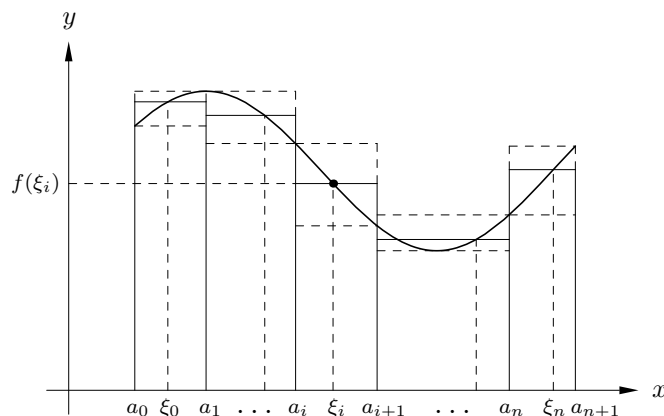


Abb. 9.8 Die Summe der Flächeninhalte der hervorgehobenen Rechtecke bildet die Zwischensumme von  $f$  bei der angegebenen Zerlegung  $\mathfrak{z}$  und dem Zwischenstellensystem  $\tau := (\xi_0, \dots, \xi_n)$ . Die Abbildung zeigt auch, daß die Zwischensumme zwischen der Unter- und der Obersumme liegt.