

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.3 Integrierbarkeitskriterien

Der Umgang mit der Definition der Integrierbarkeit ist ein wenig schwerfällig. Daher wäre es sehr hilfreich, ein gut anwendbares Integrierbarkeitskriterium zu haben. Ein solches Kriterium ist mit dem folgenden Satz gegeben. 9/3/0

Satz 9.8 (*Riemannsches Integrierbarkeitskriterium*) 9/3/1

Sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt. Dann gilt: f ist in I integrierbar gdw für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung \mathfrak{z} von I existiert, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$.

Beweis. (\longrightarrow) Sei f in I integrierbar, also $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. 9/3/2

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 9.6 existiert ein $\delta > 0$, so daß für jedes \mathfrak{z} mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$ gilt:

$$\int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \int_a^b f(x) dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Addiert man die beiden Ungleichungen, dann erhält man:

$$\int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) + \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon.$$

Da nach Voraussetzung Unter- und Oberintegral übereinstimmen, ergibt sich $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$ sogar für jede Zerlegung \mathfrak{z} mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$.

(\longleftarrow) Annahme: f ist in I nicht integrierbar. Also

$$0 < \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx := \varepsilon.$$

Nach Voraussetzung existiert für dieses $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung \mathfrak{z} von I , so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$. Folglich ist

$$\varepsilon = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon. \quad \text{!} \quad \square$$

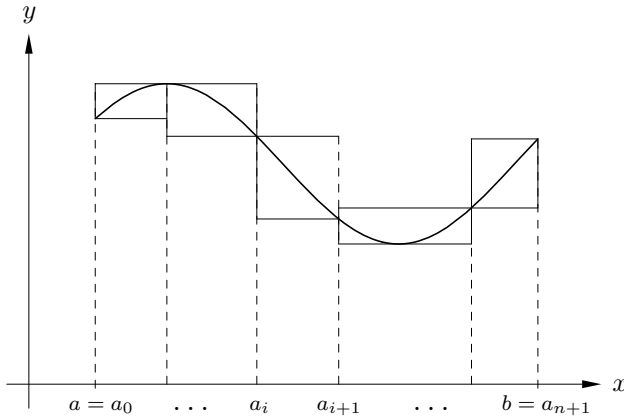


Abb. 9.7 Die Summe der Flächeninhalte der “durchgezogenen“ Rechtecke gibt die Differenz zwischen Ober- und Untersumme von f bei der betrachteten Zerlegung an.

Definition. (*Zwischensumme*)

9/3/4

Es sei f in I definiert, $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I , und für jedes $i = 1, \dots, n$ sei $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

Dann nennt man $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ ein *Zwischenstellensystem* bei der Zerlegung \mathfrak{z} , und

$S_f(\mathfrak{z}, \tau) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot f(\xi_i)$ heißt *Zwischensumme* von f bei der Zerlegung \mathfrak{z} und dem Zwischenstellensystem τ .

Bemerkung. Ist f in I definiert und beschränkt, dann gilt für $\xi \in [a_i, a_{i+1}] := I_i$ stets $\inf_{x \in I_i} f(x) \leq f(\xi) \leq \sup_{x \in I_i} f(x)$ und somit auch

9/3/5

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq S_f(\mathfrak{z}, \tau) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

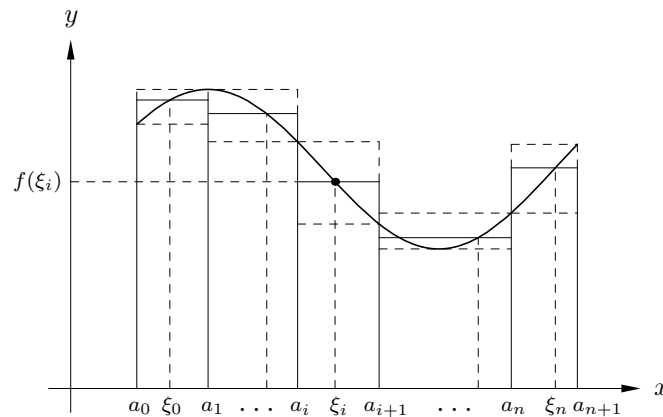


Abb. 9.8 Die Summe der Flächeninhalte der hervorgehobenen Rechtecke bildet die Zwischensumme von f bei der angegebenen Zerlegung \mathfrak{z} und dem Zwischenstellensystem $\tau := (\xi_0, \dots, \xi_n)$. Die Abbildung zeigt auch, daß die Zwischensumme zwischen der Unter- und der Ober-summe liegt.

Satz 9.9 Es sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt. Dann gilt:

9/3/6

f ist in I integrierbar gdw für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge (\mathfrak{z}_ν) und jede Folge (τ_ν) von zugehörigen Zwischenstellensystemen τ_ν gilt:

Es existiert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$ (und der Limes ist gleich dem Integral $\int_a^b f(x) dx$.)

Beweis. (\longrightarrow) Nach Voraussetzung ist $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

9/3/7

Für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge (\mathfrak{z}_ν) gilt nach Satz 9.7:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

und

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Ist (τ_ν) eine zu (\mathfrak{z}_ν) gehörende Folge von Zwischenstellensystemen, dann ist nach der obigen Bemerkung stets $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq S_f(\mathfrak{z}, \tau) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z})$. Hieraus folgt sofort die Behauptung.

(\longleftarrow) Angenommen, f ist unter der gemachten Voraussetzung nicht integrierbar, also

$$\int_a^b f(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx.$$

Sei (\mathfrak{z}_ν) eine beliebige ausgezeichnete Zerlegungsfolge von I , dann konvergiert $S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$ für jedes zugehörige Zwischenstellensystem (τ_ν) . Wir konstruieren jetzt ein Zwischenstellensystem, so daß die entsprechende Folge der Zwischensummen nicht konvergiert, und dies liefert uns den gewünschten Widerspruch.

Es sei $\mathfrak{z}_\nu = (a_0^\nu, \dots, a_{n_\nu+1}^\nu)$, $\nu \geq 0$ und $I_{i\nu} = [a_i^\nu, a_{i+1}^\nu]$.

Offenbar lassen sich $\inf_{x \in I_{i\nu}} f(x)$ und $\sup_{x \in I_{i\nu}} f(x)$ beliebig gut durch Funktionswerte $f(\xi_i^\nu)$ annähern. Für jedes ν konstruieren wir ein τ_ν wie folgt:

Ist ν gerade, dann wählt man $\xi_i^\nu \in I_{i\nu}$ so, daß $f(\xi_i^\nu) - \inf_{x \in I_{i\nu}} f(x) < \frac{1}{n_\nu(b-a)}$, und

ist ν ungerade, dann wählt man $\xi_i^\nu \in I_{i\nu}$ so, daß $\sup_{x \in I_{i\nu}} f(x) - f(\xi_i^\nu) < \frac{1}{n_\nu(b-a)}$.

Auf diese Weise erhält man für jedes ν ein Zwischenstellensystem $\tau_\nu = (\xi_0^\nu, \dots, \xi_{n_\nu}^\nu)$.

Für gerade ν gilt dann

$$\begin{aligned} 0 \leq S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) &= \sum_{i=0}^{n_\nu} (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) \underbrace{\left(f(\xi_i^\nu) - \inf_{x \in I_{i\nu}} f(x) \right)}_{< \frac{1}{n_\nu(b-a)}} \\ &< \underbrace{\sum_{i=0}^{n_\nu} (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu)}_{=b-a} \cdot \frac{1}{n_\nu(b-a)} = \frac{1}{n_\nu}. \end{aligned}$$

Analog erhält man $0 \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) - S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) < \frac{1}{n_\nu}$ für ungerade ν .

Nach Voraussetzung existiert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)) := c$.

Dann konvergiert auch jede Teilfolge von $(S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu))$ gegen c , insbesondere konvergieren die Teilfolgen mit den geraden bzw. mit den ungeraden Indizes gegen c . Wir haben also insgesamt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu)) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{n_\nu} = 0 \quad \text{für gerade } \nu \text{ und}$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) - S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{n_\nu} = 0 \quad \text{für ungerade } \nu,$$

und somit gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) = c \quad \text{für gerade } \nu \text{ und}$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) = c \quad \text{für ungerade } \nu.$$

Schließlich erhält man mit Hilfe von Satz 9.7:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = c \quad \text{für gerade } \nu \text{ und}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = c \quad \text{für ungerade } \nu.$$

Das widerspricht der Annahme. Folglich ist f in I integrierbar. \square

Bemerkung. Nach dem Satz 9.9 kann man das Riemann-Integral auch als Limes einer Folge von Zwischensummen definieren. 9/3/8