

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

**Definition.** (*Verfeinerung*)

9/2/5

Es seien  $\mathfrak{z}$  und  $\mathfrak{z}'$  Zerlegungen von  $I$ .

$\mathfrak{z}'$  ist eine *Verfeinerung* von  $\mathfrak{z}$

$\overline{\text{Def}}$  Alle Unterteilungspunkte von  $\mathfrak{z}$  sind auch Unterteilungspunkte von  $\mathfrak{z}'$ .

**Satz 9.7** Sei  $f$  in  $I = [a, b]$  definiert und beschränkt und  $(\mathfrak{z}_\nu)$  eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von  $I$ . Dann gilt: 9/2/16

$$(1) \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_a^b f(x) dx.$$

$$(2) \lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_a^b f(x) dx.$$

$$(3) \text{ Ist } f \text{ in } I \text{ integrierbar, dann sind die Limites in (1) und (2) gleich } \int_a^b f(x) dx.$$

#### 9.3 Integrierbarkeitskriterien

**Satz 9.8** (*Riemannsches Integrierbarkeitskriterium*)

9/3/1

Sei  $f$  in  $I = [a, b]$  definiert und beschränkt. Dann gilt:  $f$  ist in  $I$  integrierbar gdw für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $\mathfrak{z}$  von  $I$  existiert, so daß  $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$ .

#### 9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

**Satz 9.14** Ist  $f$  in  $[a, b]$  integrierbar und  $a < c < b$ , dann ist  $f$  in  $[a, c]$  und in  $[c, b]$  integrierbar, und es ist 9/4/10

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Beweis.** Es sei  $\varepsilon > 0$ . Nach dem Riemannkriterium existiert eine Zerlegung  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  von  $[a, b]$ , so daß  $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$ . O.B.d.A. sei  $c$  ein Unterteilungspunkt von  $\mathfrak{z}$  (anderenfalls betrachtet man die Verfeinerung von  $\mathfrak{z}$ , die durch Hinzunahme des Punktes  $c$  entsteht). Sei  $c = a_k$  und seien  $\mathfrak{z}_1 = (a_0, \dots, a_k)$  und  $\mathfrak{z}_2 = (a_k, \dots, a_{n+1})$ . Dann sind  $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$  Zerlegungen von  $[a, c]$  bzw. von  $[c, b]$ . Damit erhält man

9/4/11

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) = \overline{S}_f(\mathfrak{z}_1) + \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_2) < \varepsilon$$

und damit auch

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}_i) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_i) < \varepsilon \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Folglich ist  $f$  in  $[a, c]$  und in  $[c, b]$  integrierbar.

Es sei nun  $(\mathfrak{z}_\nu)$  eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von  $[a, b]$ , und in jeder Zerlegung  $\mathfrak{z}_\nu$  komme  $c$  als Unterteilungspunkt vor. Weiterhin seien  $\mathfrak{z}_{\nu 1}$  und  $\mathfrak{z}_{\nu 2}$  analog aus  $\mathfrak{z}_\nu$  gebildet, wie  $\mathfrak{z}_1$  und  $\mathfrak{z}_2$  aus  $\mathfrak{z}$ . Dann sind  $\mathfrak{z}_{\nu 1}$  und  $\mathfrak{z}_{\nu 2}$  Zerlegungen von  $[a, c]$  bzw. von  $[c, b]$ . Mit Hilfe von Satz 9.7 erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{\frac{a}{a}}^b f(x) dx = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 1}) + \underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 2})) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 1}) + \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 2}) \\ &= \int_{\frac{a}{a}}^c f(x) dx + \int_{\frac{c}{c}}^b f(x) dx \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$