

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_{\underline{a}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

9.3 Integrierbarkeitskriterien

Satz 9.8 (*Riemannsches Integrierbarkeitskriterium*)

9/3/1

Sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt. Dann gilt: f ist in I integrierbar gdw für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung \mathfrak{z} von I existiert, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$.

9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 9.10 Ist f in I stetig, dann ist f in I integrierbar.

9/4/0

Satz 9.11 Ist f in I definiert und beschränkt und besitzt f in I höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen, dann ist f in I integrierbar.

9/4/2

Beweis. Der Beweis erfolgt induktiv über die Anzahl k der Unstetigkeitsstellen von f in dem betrachteten Intervall.

9/4/3

Ist $k = 0$, dann ist f in I stetig und damit nach Satz 9.10 integrierbar.

Für k gelte die Behauptung bereits.

Habe f jetzt $k + 1$ Unstetigkeitsstellen in I .

Sei x_0 eine Unstetigkeitsstelle mit $a < x_0 < b$. (Für $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ vereinfacht sich der Beweis, man führt ihn aber analog.)

Wir wählen $a', b' \in I = [a, b]$, so daß $a' < x_0 < b'$ und $I' = [a', b']$ keine weitere Unstetigkeitsstelle von f enthält. Nach Voraussetzung ist f in I beschränkt. Folglich existiert eine Konstante c , so daß $|f(x)| \leq c$, insbesondere gilt dann

$$\sup_{x \in I'} f(x) - \inf_{x \in I'} f(x) \leq 2c.$$

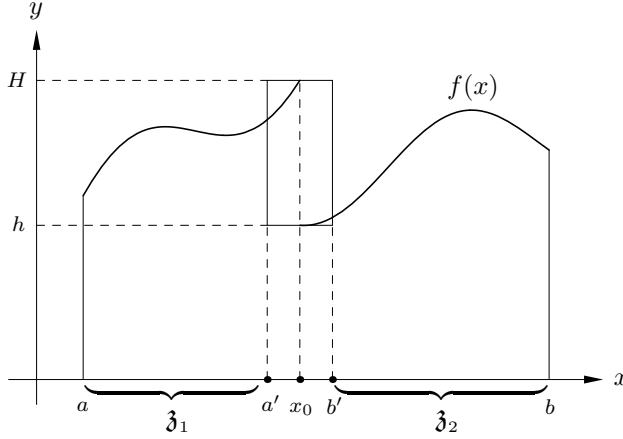


Abb. 9.9 Wählt man a', b' hinreichend dicht bei x_0 , dann wird das durch $[a', b'] \times [h, H]$ bestimmte Rechteck „klein“, wobei

$$h := \inf_{x \in [a', b']} f(x) \quad \text{und}$$

$$H := \sup_{x \in [a', b']} f(x).$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen eine Zerlegung \mathfrak{z} von I , so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$.

Dazu wählen wir a', b' so dicht bei x_0 , daß

$$b' - a' < \frac{1}{2c} \cdot \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann gilt

$$(b' - a') \cdot \left(\sup_{x \in I'} f(x) - \inf_{x \in I'} f(x) \right) \leq (b' - a') \cdot 2c < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Seien nun $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ Zerlegungen von $[a, a']$ bzw. von $[b', b]$, so daß

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}_i) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_i) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es solche Zerlegungen, da f in $[a, a']$ und in $[b', b]$ jeweils höchstens k Unstetigkeitsstellen besitzt. Sei $\mathfrak{z}_1 = (a_0, \dots, a_{n+1})$ und $\mathfrak{z}_2 = (b_0, \dots, b_{m+1})$, dann ist offenbar $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1}, b_0, \dots, b_{m+1})$ eine Zerlegung von $I = [a, b]$, und es gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \overline{S}_f(\mathfrak{z}_1) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) + (b' - a') \cdot \left(\sup_{x \in I'} f(x) - \inf_{x \in I'} f(x) \right) + \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_2) \\ &< 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist f in I integrierbar. \square