

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

##### Beispiele.

1. Mit dem letzten Satz lassen sich Beispiele für Funktionen angeben, die in einem Intervall sogar unendlich viele Unstetigkeitsstellen besitzen und trotzdem integrierbar sind (vgl. Abb. 9.10).

9/4/6/1

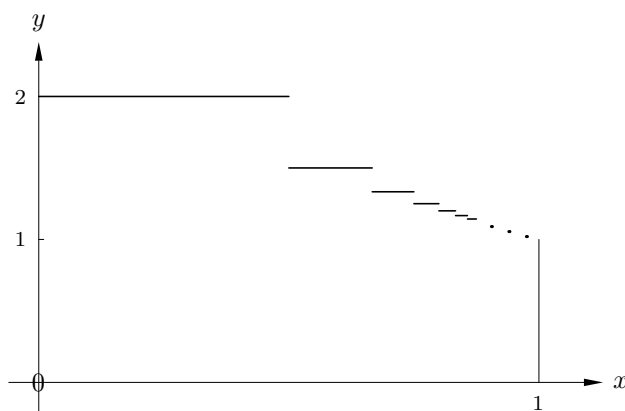


Abb. 9.10 Die Abbildung zeigt eine monoton fallende „Treppenfunktion“, wie sie in der Bemerkung betrachtet wird.

Sei  $I = [0, 1]$ ,  $(c_n)$  eine streng monoton wachsende Folge mit  $c_0 = 0$  und  $c_n \rightarrow 1$  (z.B.  $c_n = \frac{n}{n+1}$ ), und  $f(x)$  sei wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - c_n, & \text{für } c_n \leq x < c_{n+1} \\ 1, & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

$f$  ist offenbar in jedem Punkt  $c_n$  unstetig, aber in  $I$  monoton fallend und daher integrierbar.

2. (vgl. dazu Literaturangabe [3], Bd. II, Nr 300, Beispiele und Ergänzungen.)

9/4/6/2

Sei  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{falls } x = \frac{n}{m}, \quad m, n \in \mathbb{N} \text{ und } n, m \text{ teilerfremd,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$

Wir betrachten  $f$  in dem Intervall  $I = [0, 1]$ .

Dann ist  $f$  in allen irrationalen Punkten aus  $I$  stetig und in allen rationalen unstetig (vgl. Aufgabe 6, Kapitel 5). Folglich liegen die Unstetigkeitsstellen dicht in dem Intervall. Trotzdem ist die Funktion in  $I$  integrierbar.