

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_{\frac{a}{-}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\frac{b}{-}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 9.13 Seien f und g in I integrierbar. Dann gilt:

9/4/8

$$(1) \text{ Ist } h(x) = c \text{ für alle } x \in I, \text{ so ist } \int_a^b h(x) dx = c(b-a).$$

(2) Sind $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so ist $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g$ in I integrierbar, und es ist

$$\int_a^b (c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx.$$

(3) $f \cdot g$ ist in I integrierbar.

(4) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und ist $\frac{1}{g}$ beschränkt in I , dann ist $\frac{1}{g}$ in I integrierbar.

(Zusammen mit (3) erhält man sofort die Integrierbarkeit von $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g}$ in I).

$$(5) |f| \text{ ist in } I \text{ integrierbar, und es ist } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$