

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 9.10 Ist f in I stetig, dann ist f in I integrierbar.

9/4/0

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Riemann-Kriteriums.

9/4/1

Nach Voraussetzung ist f stetig in I , folglich ist f dort auch gleichmäßig stetig.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen eine Zerlegung \mathfrak{z} von I , so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$.

Sei jetzt $\varepsilon' > 0$ beliebig, aber

$$0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Zu diesem $\varepsilon' > 0$ existiert auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von f in I ein $\delta' > 0$, so daß für jedes $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$\text{Wenn } |x_1 - x_2| < \delta', \text{ so } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon'.$$

Sei jetzt $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I , so daß $d(\mathfrak{z}) < \delta'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^n \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{< \delta'} \cdot \underbrace{\left(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right)}_{\leq \varepsilon'} \\ &\leq \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \varepsilon' \\ &= \varepsilon' \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i)}_{= b-a} \\ &= \varepsilon'(b-a) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist f in I integrierbar. \square

Satz 9.11 Ist f in I definiert und beschränkt und besitzt f in I höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen, dann ist f in I integrierbar.

9/4/2

Beweis. Der Beweis erfolgt induktiv über die Anzahl k der Unstetigkeitsstellen von f in dem betrachteten Intervall.

9/4/3

Ist $k = 0$, dann ist f in I stetig und damit nach Satz 9.10 integrierbar.

Für k gelte die Behauptung bereits.

Habe f jetzt $k+1$ Unstetigkeitsstellen in I .

Sei x_0 eine Unstetigkeitsstelle mit $a < x_0 < b$. (Für $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ vereinfacht sich der Beweis, man führt ihn aber analog.)

Wir wählen $a', b' \in I = [a, b]$, so daß $a' < x_0 < b'$ und $I' = [a', b']$ keine weitere

Unstetigkeitsstelle von f enthält. Nach Voraussetzung ist f in I beschränkt. Folglich existiert eine Konstante c , so daß $|f(x)| \leq c$, insbesondere gilt dann

$$\sup_{x \in I'} f(x) - \inf_{x \in I'} f(x) \leq 2c.$$

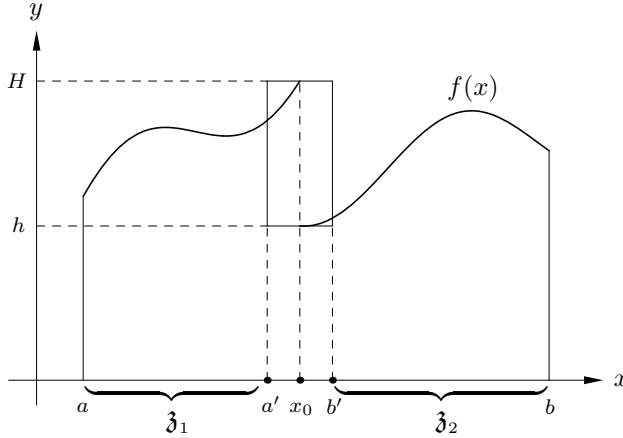


Abb. 9.9 Wählt man a', b' hinreichend dicht bei x_0 , dann wird das durch $[a', b'] \times [h, H]$ bestimmte Rechteck „klein“, wobei
 $h := \inf_{x \in [a', b']} f(x)$ und
 $H := \sup_{x \in [a', b']} f(x)$.

Es sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen eine Zerlegung \mathfrak{z} von I , so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$.

Dazu wählen wir a', b' so dicht bei x_0 , daß

$$b' - a' < \frac{1}{2c} \cdot \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann gilt

$$(b' - a') \cdot \left(\sup_{x \in I'} f(x) - \inf_{x \in I'} f(x) \right) \leq (b' - a') \cdot 2c < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Seien nun $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ Zerlegungen von $[a, a']$ bzw. von $[b', b]$, so daß

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}_i) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_i) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es solche Zerlegungen, da f in $[a, a']$ und in $[b', b]$ jeweils höchstens k Unstetigkeitsstellen besitzt. Sei $\mathfrak{z}_1 = (a_0, \dots, a_{n+1})$ und $\mathfrak{z}_2 = (b_0, \dots, b_{m+1})$, dann ist offenbar $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1}, b_0, \dots, b_{m+1})$ eine Zerlegung von $I = [a, b]$, und es gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \overline{S}_f(\mathfrak{z}_1) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) + (b' - a') \cdot \left(\sup_{x \in I'} f(x) - \inf_{x \in I'} f(x) \right) + \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_2) \\ &< 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist f in I integrierbar. \square

Satz 9.12 Ist f in I definiert und monoton, dann ist f in I integrierbar.

9/4/4

Beweis. (mit Hilfe des Riemann-Kriteriums) Sei $\varepsilon > 0$. Wir beweisen den Satz für monoton wachsendes f , für monoton fallende Funktionen erfolgt der Beweis analog. Es sei $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ mit $a_i = a + \frac{b-a}{n+1} \cdot i$. Dann ist offenbar $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n+1}$. Die Teilintervalle $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ sind also alle gleich lang. Da f monoton wächst, ist

$$\inf_{x \in I_i} f(x) = f(a_i) \quad \text{und} \quad \sup_{x \in I_i} f(x) = f(a_{i+1}).$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^n \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{= \frac{b-a}{n+1}} \cdot \left(\underbrace{\sup_{x \in I_i} f(x)}_{= f(a_{i+1})} - \underbrace{\inf_{x \in I_i} f(x)}_{= f(a_i)} \right) \\ &= \frac{b-a}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\ &= \frac{b-a}{n+1} \cdot (f(a_{n+1}) - f(a_0)) \\ &= \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n+1} \\ &< \varepsilon, \quad \text{falls } n \text{ hinreichend groß gewählt wird.} \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß f in I integrierbar ist. \square

Beispiele.

1. Mit dem letzten Satz lassen sich Beispiele für Funktionen angeben, die in einem Intervall sogar unendlich viele Unstetigkeitsstellen besitzen und trotzdem integrierbar sind (vgl. Abb. 9.10). 9/4/6/1

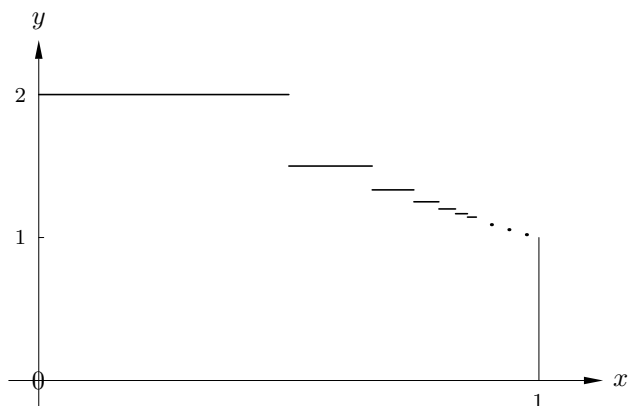


Abb. 9.10 Die Abbildung zeigt eine monoton fallende „Treppenfunktion“, wie sie in der Bemerkung betrachtet wird.

Sei $I = [0, 1]$, (c_n) eine streng monoton wachsende Folge mit $c_0 = 0$ und $c_n \rightarrow 1$ (z.B. $c_n = \frac{n}{n+1}$), und $f(x)$ sei wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - c_n, & \text{für } c_n \leq x < c_{n+1} \\ 1, & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

f ist offenbar in jedem Punkt c_n unstetig, aber in I monoton fallend und daher integrierbar.

2. (vgl. dazu Literaturangabe [3], Bd. II, Nr 300, Beispiele und Ergänzungen.)

9/4/6/2

Sei $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{falls } x = \frac{n}{m}, \quad m, n \in \mathbb{N} \text{ und } n, m \text{ teilerfremd,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$

Wir betrachten f in dem Intervall $I = [0, 1]$.

Dann ist f in allen irrationalen Punkten aus I stetig und in allen rationalen unstetig (vgl. Aufgabe 6, Kapitel 5). Folglich liegen die Unstetigkeitsstellen dicht in dem Intervall. Trotzdem ist die Funktion in I integrierbar.

Wir wenden uns nun der bestimmten Integration zusammengesetzter Funktionen zu.

9/4/7

Satz 9.13 Seien f und g in I integrierbar. Dann gilt:

9/4/8

(1) Ist $h(x) = c$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b h(x) dx = c(b - a)$.

(2) Sind $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so ist $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g$ in I integrierbar, und es ist

$$\int_a^b (c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx.$$

(3) $f \cdot g$ ist in I integrierbar.

(4) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und ist $\frac{1}{g}$ beschränkt in I , dann ist $\frac{f}{g}$ in I integrierbar.

(Zusammen mit (3) erhält man sofort die Integrierbarkeit von $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g}$ in I).

(5) $|f|$ ist in I integrierbar, und es ist $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Beweis. (1) und (2) beweist man sehr leicht mit Hilfe von Satz 9.9 unter Benutzung von Zwischensummen und entsprechenden Grenzwertbetrachtungen.

9/4/9

(3). (Beweis mit Hilfe des Riemann-Kriteriums)

Wir betrachten den Fall: $f(x), g(x) \geq 0$ in I .

Hierauf lassen sich die restlichen Fälle zurückführen. Denn nach Voraussetzung sind f und g in I beschränkt, folglich gibt es eine Konstante d , so daß

$$f_1(x) := f(x) + d \geq 0 \quad \text{und} \quad g_1(x) := g(x) + d \geq 0 \quad \text{in } I.$$

Wenn die Behauptung für nicht-negative Funktionen schon gilt, dann ist $f_1 \cdot g_1$ in I integrierbar, und es ist

$$f_1 \cdot g_1 = (f + d) \cdot (g + d) = f \cdot g + d \cdot (f + g) + d^2,$$

und damit ist

$$f \cdot g = f_1 \cdot g_1 - d \cdot (f + g) + d^2.$$

Nach (1) und (2) ist $f \cdot g$ dann in I für beliebige f, g integrierbar.

Wir beweisen jetzt die Behauptung für nicht-negative Funktionen. Es sei $\varepsilon > 0$.

Gesucht ist eine Zerlegung $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$, so daß $\overline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) < \varepsilon$.

Für eine beliebige Zerlegung \mathfrak{z} mit $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ gilt:

$$\overline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \underbrace{\left(\sup_{x \in I_i} (f(x) \cdot g(x)) - \inf_{x \in I_i} (f(x) \cdot g(x)) \right)}_{:= (\star)}.$$

Wegen $f(x), g(x) \geq 0$ ist

$$\sup_{x \in I_i} (f(x) \cdot g(x)) \leq \underbrace{\sup_{x \in I_i} f(x)}_{:= H_{fi}} \cdot \underbrace{\sup_{x \in I_i} g(x)}_{:= H_{gi}}$$

und

$$\inf_{x \in I_i} (f(x) \cdot g(x)) \geq \underbrace{\inf_{x \in I_i} f(x)}_{:= h_{fi}} \cdot \underbrace{\inf_{x \in I_i} g(x)}_{:= h_{gi}}.$$

Da f, g in I beschränkt sind, existiert ein $c > 0$, so daß $H_{fi}, h_{gi} \leq c$.

Folglich ist

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I_i} (f(x) \cdot g(x)) - \inf_{x \in I_i} (f(x) \cdot g(x)) &\leq H_{fi} \cdot H_{gi} - h_{fi} \cdot h_{gi} \\ &= H_{fi} \cdot H_{gi} - H_{fi} \cdot h_{gi} + H_{fi} \cdot h_{gi} - h_{fi} \cdot h_{gi} \\ &= \underbrace{H_{fi}}_{\leq c} \cdot (H_{gi} - h_{gi}) + \underbrace{h_{gi}}_{\leq c} \cdot (H_{fi} - h_{fi}) \\ &\leq c \cdot (H_{gi} - h_{gi}) + c \cdot (H_{fi} - h_{fi}). \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} \overline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f \cdot g}(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot (\star) \\ &\leq \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \left(c \cdot (H_{gi} - h_{gi}) + c \cdot (H_{fi} - h_{fi}) \right) \\ &= \underbrace{c \cdot \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) (H_{gi} - h_{gi})}_{= \overline{S}_g(\mathfrak{z}) - \underline{S}_g(\mathfrak{z})} + \underbrace{c \cdot \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) (H_{fi} - h_{fi})}_{= \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z})}. \end{aligned}$$

Nach dem Riemannschen Integrierbarkeitskriterium existieren für f und g Zerlegungen \mathfrak{z}_1 bzw. \mathfrak{z}_2 von I , so daß $\overline{S}_g(\mathfrak{z}_1) - \underline{S}_g(\mathfrak{z}_1) < \frac{\varepsilon}{2c}$ und $\overline{S}_f(\mathfrak{z}_2) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_2) < \frac{\varepsilon}{2c}$.

Wählt man jetzt \mathfrak{z} als gemeinsame Verfeinerung von \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 , dann ist nach den obigen Betrachtungen

$$\overline{S}_{f,g}(\mathfrak{z}) - \underline{S}_{f,g}(\mathfrak{z}) < c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} + c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon.$$

(4) und (5) beweist man ebenfalls mit dem Riemannkriterium durch geeignete Abschätzungen. Der Beweis soll hier weggelassen werden. \square

Satz 9.14 Ist f in $[a, b]$ integrierbar und $a < c < b$, dann ist f in $[a, c]$ und in $[c, b]$ integrierbar, und es ist 9/4/10

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Riemannkriterium existiert eine Zerlegung $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ von $[a, b]$, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$. O.B.d.A. sei c ein Unterteilungspunkt von \mathfrak{z} (anderenfalls betrachtet man die Verfeinerung von \mathfrak{z} , die durch Hinzunahme des Punktes c entsteht). Sei $c = a_k$ und seien $\mathfrak{z}_1 = (a_0, \dots, a_k)$ und $\mathfrak{z}_2 = (a_k, \dots, a_{n+1})$. Dann sind $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ Zerlegungen von $[a, c]$ bzw. von $[c, b]$. Damit erhält man 9/4/11

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) = \overline{S}_f(\mathfrak{z}_1) + \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_2) < \varepsilon$$

und damit auch

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}_i) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_i) < \varepsilon \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Folglich ist f in $[a, c]$ und in $[c, b]$ integrierbar.

Es sei nun (\mathfrak{z}_ν) eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von $[a, b]$, und in jeder Zerlegung \mathfrak{z}_ν komme c als Unterteilungspunkt vor. Weiterhin seien $\mathfrak{z}_{\nu 1}$ und $\mathfrak{z}_{\nu 2}$ analog aus \mathfrak{z}_ν gebildet, wie \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 aus \mathfrak{z} . Dann sind $\mathfrak{z}_{\nu 1}$ und $\mathfrak{z}_{\nu 2}$ Zerlegungen von $[a, c]$ bzw. von $[c, b]$. Mit Hilfe von Satz 9.7 erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 1}) + \underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 2})) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 1}) + \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_{\nu 2}) \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Korollar. Sei $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1} = b$ und f in $I = [a, b]$ integrierbar, dann ist f in jedem Teilintervall $[a_i, a_{i+1}] \subseteq I$ integrierbar, und es ist 9/4/12

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx.$$

Beweis. Den Beweis führt man leicht (mit Hilfe von Satz 9.14) induktiv über n . □ 9/4/13

Definition. Sei $a < b$ und f in $[a, b]$ integrierbar. Dann definieren wir 9/4/14

$$\int_b^a f(x) dx \stackrel{\text{Df}}{=} - \int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^a f(x) dx \stackrel{\text{Df}}{=} 0.$$

Folgerung. Ist $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1} = b$ und f in $[a, b]$ integrierbar, dann ist 9/4/15

$$\sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0.$$