

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

#### 5.2 Stetigkeit

**Satz 5.2** Sei  $a \in D(f)$  und  $a$  ein Häufungspunkt von  $D(f)$ . Dann gilt:  
 $f$  ist in  $a$  stetig gdw  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existiert und  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

5/2/12

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.1 Ableitung

**Definition.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $M \neq \emptyset$  und  $f$  differenzierbar in jedem Punkt  $a \in M$ .  
 $f'$  ist die 1. Ableitung von  $f$  in  $M$

7/1/4

$\overline{\text{Df}}$   $f'$  ist eine in  $M$  definierte Funktion, und für jedes  $a \in M$  ist  $f'(a)$  die  
1. Ableitung von  $f$  an der Stelle  $a$ ,  
(d.h., für jedes  $a \in M$  ist  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ).

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

**Korollar.** (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

9/5/6

Voraussetzungen über  $a, b, f, g, \mu_1, \mu_2$  wie im Satz 9.16. Dann gilt:

- (1) Ist  $g = 1$  dann gibt es ein  $\mu$  mit  $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ , so daß  $\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a)$ .
- (2) Ist  $f$  in  $I$  stetig, dann gibt es ein  $\xi \in I$ , so daß  

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

**Satz 9.18** Ist  $f$  in  $I$  stetig und  $x \in I$ , dann ist die durch  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$

9/5/11

definierte Funktion  $F$  in  $I$  differenzierbar, und es ist  $F' = f$

(d.h.,  $F$  ist eine Stammfunktion von  $f$  in  $I$ ).

**Beweis.** Es gelte  $x, c \in I$  und  $x \neq c$ . Dann erhält man mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes der Integralrechnung (Korollar (2)):

9/5/12

$$\begin{aligned}
\frac{F(x) - F(c)}{x - c} &= \frac{1}{x - c} \cdot \left( \int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt \right) \\
&= \frac{1}{x - c} \cdot \int_c^x f(t) dt \\
&= \frac{1}{x - c} \cdot f(\xi_x) \int_c^x dt, \quad \text{für ein } \xi_x \text{ zwischen } c \text{ und } x \\
&= \frac{1}{x - c} \cdot f(\xi_x) \cdot (x - c) \\
&= f(\xi_x).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $f$  in  $c$  stetig. Wegen  $x \rightarrow c$  und damit auch  $\xi_x \rightarrow c$  gilt:  $f(\xi_x) \rightarrow f(c)$ . Folglich erhält man

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} \rightarrow f(c) .$$

Daher ist  $F'(c) = f(c)$  für jedes  $c \in I$ .  $\square$