

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.1 Ableitung

**Bemerkung.** Aus der Differenzierbarkeit folgt also die Stetigkeit; die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung stetig ist, heißt *stetig differenzierbar*. 7/1/14

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.1 Das unbestimmte Integral

**Definition.** (*Stammfunktion*) 9/1/1

Es seien  $f, F$  in einer Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  definiert.

$F$  ist eine *Stammfunktion* von  $f$  in  $M$

$\stackrel{\text{Def}}{=} F$  ist in  $M$  differenzierbar, und es gilt  $F'(x) = f(x)$  für jedes  $x \in M$ .

#### 9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

**Definition.** (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*) 9/2/9

Es sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von  $f$  in  $I$ , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von  $f$  in  $I$  gleich, dann heißt  $f$  in  $I$  (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

#### 9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

**Satz 9.19** (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*)

9/5/14

Ist  $f$  in  $[a, b]$  stetig und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  in  $[a, b]$ , dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Bemerkung.** Um also das bestimmte Integral  $\int_a^b f(x) dx$  für eine stetige Funktion berechnen zu können, genügt es, eine Stammfunktion  $F$  von  $f$  zu kennen und die entsprechende Differenz  $F(b) - F(a)$  zu berechnen.

9/5/16

Unstetige Funktionen können bestimmt integrierbar sein, ohne eine Stammfunktion zu besitzen (vgl. Aufgabe 13, Kap. 9).

Andererseits gibt es Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, aber nicht bestimmt integrierbar sind (vgl. Aufgabe 14, Kap. 9).

Bestimmte und unbestimmte Integrierbarkeit sind also unabhängig voneinander.

Zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, daß eine Funktion  $f$  in dem Intervall  $[a, b]$  stetig differenzierbar ist, wenn  $f$  in  $[a, b]$  differenzierbar und die Ableitung von  $f$  dort stetig ist.

Wir wollen uns jetzt mit der partiellen Integration und der Substitutionsregel bei bestimmten Integralen befassen.

## Literaturhinweise

[4] Endl, K. und W. Luh: Analysis I u. II. Eine integrierte Darstellung. Aula-Verlag, Wiesbaden.

11/1/4