

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.2 Stetigkeit

**Satz 5.4** (*Stetigkeit der rationalen Operationen*)

5/2/17

*Summe, Differenz, Produkt und Quotient von stetigen Funktionen sind stetig.*

## Kapitel 7 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

### 7.1 Ableitung

**Satz 7.3** (*Produktregel*)

7/1/17

*Sind  $f, g$  in  $a$  differenzierbar, dann ist  $f \cdot g$  in  $a$  differenzierbar, und es ist  $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$  (oder kurz  $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ ).*

## Kapitel 9 Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

### 9.1 Das unbestimmte Integral

**Definition.** (*Stammfunktion*)

9/1/1

Es seien  $f, F$  in einer Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  definiert.

$F$  ist eine *Stammfunktion* von  $f$  in  $M$

$\overline{\text{Df}}$   $F$  ist in  $M$  differenzierbar, und es gilt  $F'(x) = f(x)$  für jedes  $x \in M$ .

### 9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

**Satz 9.13** *Seien  $f$  und  $g$  in  $I$  integrierbar. Dann gilt:*

9/4/8

(1) Ist  $h(x) = c$  für alle  $x \in I$ , so ist  $\int_a^b h(x) dx = c(b - a)$ .

(2) Sind  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , so ist  $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g$  in  $I$  integrierbar, und es ist

$$\int_a^b (c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx.$$

(3)  $f \cdot g$  ist in  $I$  integrierbar.

(4) Ist  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$  und ist  $\frac{1}{g}$  beschränkt in  $I$ , dann ist  $\frac{1}{g}$  in  $I$  integrierbar.

(Zusammen mit (3) erhält man sofort die Integrierbarkeit von  $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g}$  in  $I$ ).

(5)  $|f|$  ist in  $I$  integrierbar, und es ist  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

## 9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

**Satz 9.19** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

9/5/14

Ist  $f$  in  $[a, b]$  stetig und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  in  $[a, b]$ , dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Satz 9.20** (partielle Integration)

9/5/17

Sind  $f$  und  $g$  in  $[a, b]$  stetig differenzierbar, dann ist

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

**Beweis.** Offenbar ist mit  $f$  und  $g$  auch  $f \cdot g$  in  $[a, b]$  differenzierbar, und es gilt  $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ . Folglich ist  $f \cdot g$  eine Stammfunktion von  $f'g + fg'$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $f'$  und  $g'$  sind auch  $f' \cdot g$ ,  $f \cdot g'$  und  $f' \cdot g + f \cdot g'$  stetig. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

9/5/18

$$\begin{aligned} [f(x)g(x)]_a^b &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx. \end{aligned}$$

Also

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx. \quad \square$$