

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

**Satz 7.13** Es sei  $a < b$  und  $f$  in  $I = (a, b)$  differenzierbar. Dann gilt:

7/3/9

- (1)  $f$  ist in  $I$  monoton wachsend gdw  $f'(x) \geq 0$  für jedes  $x \in I$ .
- (2)  $f$  ist in  $I$  streng monoton wachsend gdw  $f'(x) \geq 0$  für jedes  $x \in I$ , und es gibt kein Teilintervall  $(a', b') \subseteq I$  mit  $a' < b'$ , so daß  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a', b')$ .

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

**Bemerkung.** Ist  $a < b$ ,  $f$  stetig und nicht negativ in  $I = [a, b]$  und  $\int_a^b f(x) dx = 0$ ,  
so ist  $f(x) = 0$  für jedes  $x \in I$ .

9/5/2

**Korollar.** (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

9/5/6

Voraussetzungen über  $a, b, f, g, \mu_1, \mu_2$  wie im Satz 9.16. Dann gilt:

- (1) Ist  $g = 1$  dann gibt es ein  $\mu$  mit  $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ , so daß  $\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a)$ .
- (2) Ist  $f$  in  $I$  stetig, dann gibt es ein  $\xi \in I$ , so daß  

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

**Satz 9.18** Ist  $f$  in  $I$  stetig und  $x \in I$ , dann ist die durch  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$   
definierte Funktion  $F$  in  $I$  differenzierbar, und es ist  $F' = f$   
(d.h.,  $F$  ist eine Stammfunktion von  $f$  in  $I$ ).

9/5/11

**Satz 9.19** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

9/5/14

Ist  $f$  in  $[a, b]$  stetig und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  in  $[a, b]$ , dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Satz 9.20** (partielle Integration)

9/5/17

Sind  $f$  und  $g$  in  $[a, b]$  stetig differenzierbar, dann ist

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

**Satz 9.22** (2. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

9/5/21

Ist  $f$  in  $[a, b]$  monoton und differenzierbar und sind  $f', g$  in  $[a, b]$  stetig, dann gibt

es ein  $\xi \in [a, b]$ , so daß 
$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \cdot \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \cdot \int_\xi^b g(x) dx.$$

**Beweis.** Ist  $f$  konstant, dann ist die Behauptung trivial.

9/5/22

Sei nun  $f$  nicht konstant und o.B.d.A. sei  $f$  in  $[a, b]$  monoton wachsend, folglich ist  $f(a) < f(b)$ . (Für monoton fallende Funktionen verläuft der Beweis analog.) Dann ist  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$  und  $f'(c) > 0$  für wenigstens ein  $c \in [a, b]$ .

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Bemerkung zum Satz 9.15 und folgt

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) > 0.$$

Es sei jetzt  $G(x) := \int_a^x g(t) dt$ . Nach Satz 9.18 ist  $G$  in  $[a, b]$  differenzierbar und  $G' = g$ . Mit Hilfe der partiellen Integration (Satz 9.20) erhält man

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(x)G(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx. \quad (\star)$$

Nach dem Korollar zum erweiterten 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein  $\xi \in (a, b)$ , so daß

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)G(x) dx &= G(\xi) \cdot \int_a^b f'(x) dx \\ &= G(\xi) \cdot (f(b) - f(a)) \\ &= f(b) \cdot G(\xi) - f(a) \cdot G(\xi). \quad (\star\star) \end{aligned}$$

Wegen  $G(a) = 0$  und  $G(b) - G(\xi) = \int_\xi^b g(x) dx$  gilt nach  $(\star)$  und  $(\star\star)$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x) \, dx &= f(b)G(b) - f(a)G(a) - f(b)G(\xi) + f(a)G(\xi) \\
&= f(a)G(\xi) + f(b) \cdot (G(b) - G(\xi)) \\
&= f(a) \cdot \int_a^\xi g(x) \, dx + f(b) \cdot \int_\xi^b g(x) \, dx. \quad \square
\end{aligned}$$