

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Satz 6.13** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\bar{a} \in \mathbb{R}$ .

6/3/11

Ist  $f$  in  $\bar{a}$  stetig und  $f(\bar{a}) > 0$  (bzw.  $f(\bar{a}) < 0$ ), dann gibt es eine Umgebung  $U(\bar{a})$ , so daß  $f(\bar{x}) > 0$  (bzw.  $f(\bar{x}) < 0$ ) für alle  $\bar{x} \in U(\bar{a}) \cap D(f)$ .

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

**Definition.** (Zerlegung)

9/2/1

$\mathfrak{z}$  ist eine Zerlegung (oder Partition) von  $I$

$\overline{\text{Df}}$   $\mathfrak{z}$  ist eine endliche Folge  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  von reellen Zahlen  $a_0, \dots, a_{n+1}$ , so daß  
 $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$ .

Die Elemente  $a_0, \dots, a_{n+1}$  heißen dann *Unterteilungspunkte* von  $\mathfrak{z}$ ,

9/2/2

$I_i := [a_i, a_{i+1}]$  bezeichne das  $i$ -te Teilintervall bezüglich  $\mathfrak{z}$ , und

$d(\mathfrak{z}) := \max\{a_{i+1} - a_i : i = 0, \dots, n\}$  heißt *Maximaldistanz* (oder *Norm*, *Feinheitsmaß*, ...) von  $\mathfrak{z}$ .

**Definition.** (Untersumme, Obersumme)

9/2/3

Sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

(1)  $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$  heißt *Untersumme* von  $f$  in  $I$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$

$\overline{\text{Df}}$   $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x)$ .

(2)  $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$  heißt *Obersumme* von  $f$  in  $I$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$

$\overline{\text{Df}}$   $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x)$ .

**Definition.** (Unterintegral, Oberintegral, Integral)

9/2/9

Es sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von  $f$  in  $I$ , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von  $f$  in  $I$ .

$$\begin{aligned} \text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_{\underline{a}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Sind Unter- und Oberintegral von  $f$  in  $I$  gleich, dann heißt  $f$  in  $I$  (*bestimmt integrierbar*), und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

## 9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

**Bemerkung.** Ist  $a < b$ ,  $f$  stetig und nicht negativ in  $I = [a, b]$  und  $\int_a^b f(x) = 0$ , 9/5/2  
so ist  $f(x) = 0$  für jedes  $x \in I$ .

**Beweis.** Gäbe es ein  $c \in I$ , so daß  $f(c) > 0$ , so wäre auch  $g(x) := f(x) - \frac{f(c)}{2}$  für  $x = c$  positiv. Da mit  $f$  auch  $g$  stetig ist, existiert eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $c$ , so daß  $g$  in  $U_\varepsilon(c)$  ebenfalls positiv ist. Ist  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  eine Zerlegung, so daß  $c - \varepsilon$  und  $c + \varepsilon$  Zerlegungspunkte sind ( $\varepsilon$  hinreichend klein; für  $c = a$  bzw.  $c = b$  betrachtet man die entsprechende rechts- bzw. linksseitige Umgebung von  $c$ ), etwa  $c - \varepsilon = a_k$  und  $c + \varepsilon = a_{k+1}$ , dann ist  $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$  in  $[a_k, a_{k+1}]$ , also auch 9/5/3

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \geq (a_{k+1} - a_k) \cdot \inf_{x \in I_k} f(x) \geq (a_{k+1} - a_k) \cdot \frac{f(c)}{2} > 0.$$

Damit ist

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx \geq \underline{S}_f(\mathfrak{z}) > 0. \quad \square$$