

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.3 Mengen von reellen Zahlen

#### Folgerung.

2/3/9

- (1) Besitzt  $M$  ein Maximum (bzw. Minimum), so ist  
 $\max M = \sup M$  (bzw.  $\min M = \inf M$ ).
- (2) Gehören  $\sup M$  (bzw.  $\inf M$ ) zu  $M$ , dann gilt stets  
 $\max M = \sup M$  (bzw.  $\min M = \inf M$ ).

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

##### Satz 6.12 (Zwischenwertsatz)

6/3/7

Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $M \subseteq D(f)$ . Dann gilt:

Ist  $M$  bogenzusammenhängend und  $f$  stetig in  $M$  und sind  $\bar{a}, \bar{b} \in M$ , so daß  $f(\bar{a}) < d < f(\bar{b})$ , dann gibt es ein  $\bar{c} \in M$ , so daß  $f(\bar{c}) = d$ . (vgl. Abb. 6.12)

##### Satz 6.15 (Satz von Weierstraß)

6/3/21

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $M \neq \emptyset$ . Dann gilt:

Ist  $f$  in  $M$  stetig und  $M$  beschränkt und abgeschlossen, dann existieren Minimum und Maximum von  $f$  in  $M$  (d.h., es gibt Elemente  $\bar{a}, \bar{b} \in M$ , so daß  $f(\bar{a}) = \min f(M)$  und  $f(\bar{b}) = \max f(M)$ ).

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

##### Korollar. (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

9/5/6

Voraussetzungen über  $a, b, f, g, \mu_1, \mu_2$  wie im Satz 9.16. Dann gilt:

- (1) Ist  $g = 1$  dann gibt es ein  $\mu$  mit  $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ , so daß  $\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a)$ .
- (2) Ist  $f$  in  $I$  stetig, dann gibt es ein  $\xi \in I$ , so daß  

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

**Beweis.** (1) ist trivial.

(2). Da  $f$  in  $I$  stetig ist, nimmt  $f$  die Werte  $\mu_1 = \inf_{x \in I} f(x)$  und  $\mu_2 = \sup_{x \in I} f(x)$  als Funktionswerte an. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann für  $\mu$  mit  $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$  auch ein  $\xi \in I$ , so daß  $\mu = f(\xi)$ . Damit gilt die Behauptung.  $\square$

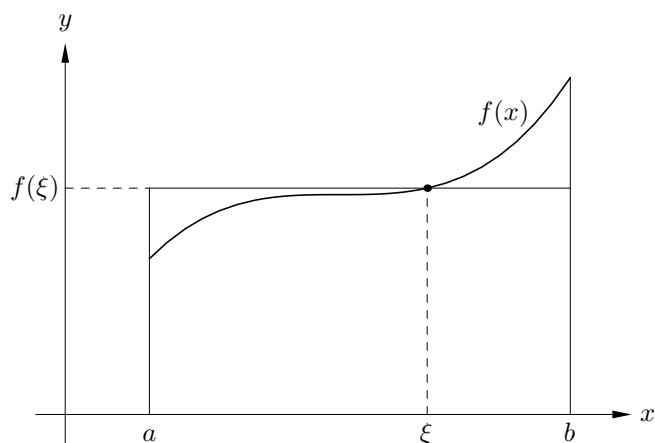


Abb. 9.11 Die Abbildung zeigt einen Spezialfall des Korollars, wobei in dem Teil (2) die Funktion  $g$  in  $I$  konstant 1 gewählt wurde. Die durch das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  bestimmte Fläche der Punktmenge  $M = \{(x, y) : x \in I, 0 \leq y \leq f(x)\}$  ist dann flächengleich mit dem Rechteck der Breite  $b - a$  und der Höhe  $f(\xi)$ .