

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.15 Sei $a < b$, und seien f, g in I integrierbar. Dann gilt:

9/5/0

(1) Wenn $f(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, so ist $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(2) Wenn $f(x) \leq g(x)$ für jedes $x \in I$, so ist $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Beweis. (1). Sei $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I und $I_i = [a_{i+1}, a_i]$. Dann ist wegen $a_{i+1} - a_i > 0$ und $\inf_{x \in I_i} f(x) \geq 0$ auch

9/5/1

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\frac{a}{a}}^b f(x) dx \geq \underline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \geq 0.$$

(2). Wenn $f(x) \leq g(x)$, so $0 \leq g(x) - f(x)$ für jedes $x \in I$. Nach (1) gilt dann

$$0 \leq \int_a^b (g(x) - f(x)) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx,$$

also auch

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad \square$$

Bemerkung. Ist $a < b$, f stetig und nicht negativ in $I = [a, b]$ und $\int_a^b f(x) = 0$,

9/5/2

so ist $f(x) = 0$ für jedes $x \in I$.

Beweis. Gäbe es ein $c \in I$, so daß $f(c) > 0$, so wäre auch $g(x) := f(x) - \frac{f(c)}{2}$ für $x = c$ positiv. Da mit f auch g stetig ist, existiert eine ε -Umgebung von c , so daß g in $U_\varepsilon(c)$ ebenfalls positiv ist. Ist $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung, so daß $c - \varepsilon$ und $c + \varepsilon$ Zerlegungspunkte sind (ε hinreichend klein; für $c = a$ bzw. $c = b$ betrachtet man die entsprechende rechts- bzw. linksseitige Umgebung von c), etwa $c - \varepsilon = a_k$ und $c + \varepsilon = a_{k+1}$, dann ist $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$ in $[a_k, a_{k+1}]$, also auch

9/5/3

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \geq (a_{k+1} - a_k) \cdot \inf_{x \in I_k} f(x) \geq (a_{k+1} - a_k) \cdot \frac{f(c)}{2} > 0.$$

Damit ist

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{\frac{a}{a}}^b f(x) dx \geq \underline{S}_f(\mathfrak{z}) > 0. \quad \square$$

Satz 9.16 (Erweiterter 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

9/5/4

Sei $a < b$, seien f, g in $I = [a, b]$ integrierbar, und g wechsle in I nicht das Vorzeichen (d.h., $g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ oder $g(x) \leq 0$ für alle $x \in I$).

Dann gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\inf_{x \in I} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in I} f(x)$, so daß

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \mu \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Beweis. Sei $g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ (den verbleibenden Fall beweist man analog).

9/5/5

Dann gilt für $\inf_{x \in I} f(x) := \mu_1$ und für $\sup_{x \in I} f(x) := \mu_2$ offenbar

$$\mu_1 \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq \mu_2 \cdot g(x)$$

und somit nach Satz 9.15

$$\mu_1 \cdot \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq \mu_2 \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Für $A := \int_a^b g(x) dx$ und $B := \int_a^b f(x)g(x) dx$ ist $\mu_1 A \leq B \leq \mu_2 A$ und somit $\mu_1 \leq \frac{B}{A} := \mu \leq \mu_2$, falls $A \neq 0$; für $A = 0$ leistet $\mu = 0$ das Verlangte. \square

Korollar. (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

9/5/6

Voraussetzungen über a, b, f, g, μ_1, μ_2 wie im Satz 9.16. Dann gilt:

- (1) Ist $g = 1$ dann gibt es ein μ mit $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, so daß $\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a)$.
- (2) Ist f in I stetig, dann gibt es ein $\xi \in I$, so daß

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Beweis. (1) ist trivial.

9/5/7

(2). Da f in I stetig ist, nimmt f die Werte $\mu_1 = \inf_{x \in I} f(x)$ und $\mu_2 = \sup_{x \in I} f(x)$ als Funktionswerte an. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann für μ mit $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ auch ein $\xi \in I$, so daß $\mu = f(\xi)$. Damit gilt die Behauptung. \square

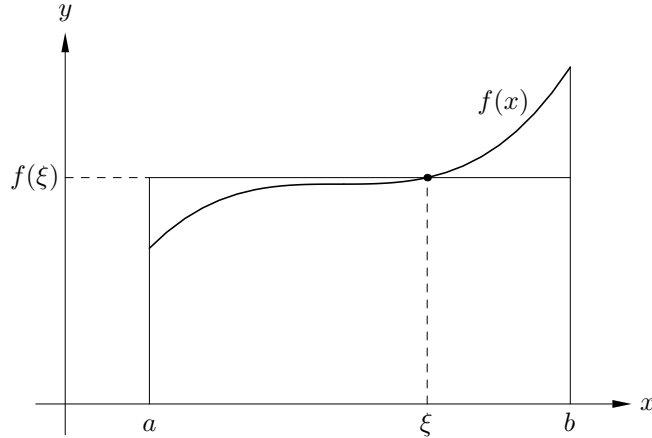


Abb. 9.11 Die Abbildung zeigt einen Spezialfall des Korollars, wobei in dem Teil (2) die Funktion g in I konstant 1 gewählt wurde. Die durch das Integral $\int_a^b f(x) dx$ bestimmte Fläche der Punktmenge $M = \{(x, y) : x \in I, 0 \leq y \leq f(x)\}$ ist dann flächengleich mit dem Rechteck der Breite $b - a$ und der Höhe $f(\xi)$.

Wir werden jetzt mit Hilfe des bestimmten Integrals mit veränderlicher oberer Grenze neue Funktionen definieren. Dazu sei zunächst f eine in dem Intervall I definierte und beschränkte Funktion. Dann ist offenbar für jedes $x \in I$ die Funktion f in jedem Teilintervall $[a, x] \subseteq I$ bestimmt integrierbar. Damit ist jedem $x \in I$ durch $\int_a^x f(t) dt$ ein bestimmter Wert $F(x)$ zugeordnet, d.h., durch $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ ist in I eine Funktion definiert. Wir leiten jetzt einige Eigenschaften dieser Funktion her.

9/5/8

Satz 9.17 Ist f in I integrierbar und $x \in I$, dann ist die durch

9/5/9

$F(x) := \int_a^x f(t) dt$ definierte Funktion F in I stetig.

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß f in jedem Punkt $c \in I$ stetig ist, d.h., wenn $x \rightarrow c$, so $F(x) \rightarrow F(c)$. Es ist

9/5/10

$$\begin{aligned} F(x) - F(c) &= \int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_c^a f(t) dt \\ &= \int_c^x f(t) dt \\ &= \mu_{x,c} \cdot (x - c). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus dem erweiterten 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung, wobei $\mu_{x,c}$ zwischen dem Infimum und dem Supremum der Funktion f in dem Intervall $[c, x]$ bzw. in $[x, c]$ liegt. Nach Voraussetzung ist f in I integrierbar, also auch beschränkt, folglich muß auch $\mu_{x,c}$ in I beschränkt sein.

Wenn nun $x \rightarrow c$, so gilt auch $\mu_{x,c} \cdot (x - c) \rightarrow 0$, und damit auch $F(x) - F(c) \rightarrow 0$. Folglich ist F in I stetig. \square

Satz 9.18 Ist f in I stetig und $x \in I$, dann ist die durch $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ definierte Funktion F in I differenzierbar, und es ist $F' = f$ (d.h., F ist eine Stammfunktion von f in I). 9/5/11

Beweis. Es gelte $x, c \in I$ und $x \neq c$. Dann erhält man mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes der Integralrechnung (Korollar (2)):

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} &= \frac{1}{x - c} \cdot \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{x - c} \cdot \int_c^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{x - c} \cdot f(\xi_x) \int_c^x dt, \quad \text{für ein } \xi_x \text{ zwischen } c \text{ und } x \\ &= \frac{1}{x - c} \cdot f(\xi_x) \cdot (x - c) \\ &= f(\xi_x). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist f in c stetig. Wegen $x \rightarrow c$ und damit auch $\xi_x \rightarrow c$ gilt: $f(\xi_x) \rightarrow f(c)$. Folglich erhält man

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} \rightarrow f(c).$$

Daher ist $F'(c) = f(c)$ für jedes $c \in I$. □

Bemerkung. Es soll noch einmal hervorgehoben werden, daß eine in I stetige Funktion dort eine Stammfunktion besitzt, und $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ ist die Stammfunktion von f in I , die an der Stelle $x = a$ null wird (vgl. Abb. 9.12) 9/5/13

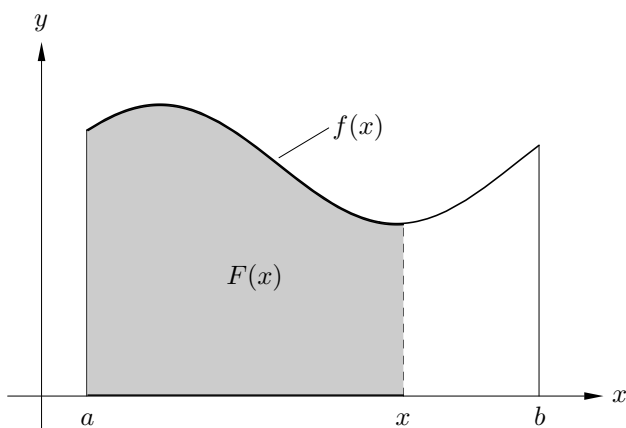


Abb. 9.12 Jedem $x \in I = [a, b]$ wird durch $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ ein Wert zugeordnet, der durch den Flächeninhalt der schattierten Fläche dargestellt ist. Hierdurch wird auch der Zusammenhang zwischen f und F sichtbar.

Jetzt sind wir in der Lage, den folgenden wichtigen Satz zu formulieren, mit dessen Hilfe man bestimmte Integrale berechnen kann, wenn man eine Stammfunktion der zu integrierenden Funktion schon kennt.

Satz 9.19 (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*)

9/5/14

Ist f in $[a, b]$ stetig und F eine Stammfunktion von f in $[a, b]$, dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Sei F eine (beliebige) Stammfunktion von f und $F_0(x) = \int_a^x f(t) dt$. Dann 9/5/15

ist $F_0(a) = 0$ und $\int_a^b f(t) dx = F_0(b) = F_0(b) - F_0(a)$.

Da F und F_0 Stammfunktionen der gleichen Funktion f in einem Intervall sind, unterscheiden sie sich nur um eine additive Konstante, also $F_0(x) = F(x) + c$. Dann gilt

$$F_0(b) - F_0(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a).$$

Damit gilt die Behauptung. \square

$$\textbf{Bez.: } F(b) - F(a) := [F(x)]_a^b := F(x) \Big|_a^b.$$

Bemerkung. Um also das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ für eine stetige Funktion 9/5/16 berechnen zu können, genügt es, eine Stammfunktion F von f zu kennen und die entsprechende Differenz $F(b) - F(a)$ zu berechnen.

Unstetige Funktionen können bestimmt integrierbar sein, ohne eine Stammfunktion zu besitzen (vgl. Aufgabe 13, Kap. 9).

Andererseits gibt es Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, aber nicht bestimmt integrierbar sind (vgl. Aufgabe 14, Kap. 9).

Bestimmte und unbestimmte Integrierbarkeit sind also unabhängig voneinander.

Zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, daß eine Funktion f in dem Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar ist, wenn f in $[a, b]$ differenzierbar und die Ableitung von f dort stetig ist.

Wir wollen uns jetzt mit der partiellen Integration und der Substitutionsregel bei bestimmten Integralen befassen.

Satz 9.20 (*partielle Integration*)

9/5/17

Sind f und g in $[a, b]$ stetig differenzierbar, dann ist

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Beweis. Offenbar ist mit f und g auch $f \cdot g$ in $[a, b]$ differenzierbar, und es gilt $(f \cdot g)' = f'g + fg'$. Folglich ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $f'g + fg'$. Aufgrund der Stetigkeit von f' und g' sind auch $f' \cdot g$, $f \cdot g'$ und $f' \cdot g + f \cdot g'$ stetig. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

9/5/18

$$\begin{aligned} [f(x)g(x)]_a^b &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx. \end{aligned}$$

Also

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx. \quad \square$$

Satz 9.21 (*Substitutionsregel*)

9/5/19

Ist f in $[a, b]$ stetig, g in $[\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar und $g([\alpha, \beta]) = [a, b]$, $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$, dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{a=g(\alpha)}^{b=g(\beta)} f(t) dt.$$

Ist außerdem g injektiv, also $\alpha = g^{-1}(a)$ und $\beta = g^{-1}(b)$, dann ist

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x) dx.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f ; sie existiert nach Satz 9.18. Dann ist offenbar $F(g(x))$ eine Stammfunktion von $f(g(x)) \cdot g'(x)$ in $[\alpha, \beta]$. Außerdem ist $f(g(x)) \cdot g'(x)$ in $[\alpha, \beta]$ stetig. Folglich gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

9/5/20

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x) dx &= [F(g(x))]_{\alpha}^{\beta} \\ &= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 9.22 (*2. Mittelwertsatz der Integralrechnung*)

9/5/21

Ist f in $[a, b]$ monoton und differenzierbar und sind f' , g in $[a, b]$ stetig, dann gibt

es ein $\xi \in [a, b]$, so daß $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \cdot \int_a^{\xi} g(x) dx + f(b) \cdot \int_{\xi}^b g(x) dx.$

Beweis. Ist f konstant, dann ist die Behauptung trivial.

9/5/22

Sei nun f nicht konstant und o.B.d.A. sei f in $[a, b]$ monoton wachsend, folglich ist $f(a) < f(b)$. (Für monoton fallende Funktionen verläuft der Beweis analog.) Dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $f'(c) > 0$ für wenigstens ein $c \in [a, b]$.

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Bemerkung zum Satz 9.15 und folgt

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) > 0.$$

Es sei jetzt $G(x) := \int_a^x g(t) dt$. Nach Satz 9.18 ist G in $[a, b]$ differenzierbar und $G' = g$. Mit Hilfe der partiellen Integration (Satz 9.20) erhält man

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(x)G(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx. \quad (\star)$$

Nach dem Korollar zum erweiterten 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so daß

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)G(x) dx &= G(\xi) \cdot \int_a^b f'(x) dx \\ &= G(\xi) \cdot (f(b) - f(a)) \\ &= f(b) \cdot G(\xi) - f(a) \cdot G(\xi). \quad (\star\star) \end{aligned}$$

Wegen $G(a) = 0$ und $G(b) - G(\xi) = \int_\xi^b g(x) dx$ gilt nach (\star) und $(\star\star)$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= f(b)G(b) - f(a)G(a) - f(b)G(\xi) + f(a)G(\xi) \\ &= f(a)G(\xi) + f(b) \cdot (G(b) - G(\xi)) \\ &= f(a) \cdot \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \cdot \int_\xi^b g(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$