

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Bemerkung. Aus der Definition und den Eigenschaften von \sin und \cos erhält man sofort die wichtigsten Eigenschaften von \tan und \cot . Insbesondere gilt:

$$D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\}, \quad W(\tan) = \mathbb{R};$$

$$D(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{x : \sin x = 0\}, \quad W(\cot) = \mathbb{R}.$$

\tan und \cot sind als Quotienten von stetigen Funktionen wieder stetig;

\tan und \cot sind wie \sin und \cos periodisch, allerdings mit der Periode π .

Ähnlich wie \sin und \cos lassen sich auch \tan und \cot am Einheitskreis geometrisch interpretieren (vgl. Abb 5.21 und 5.24).

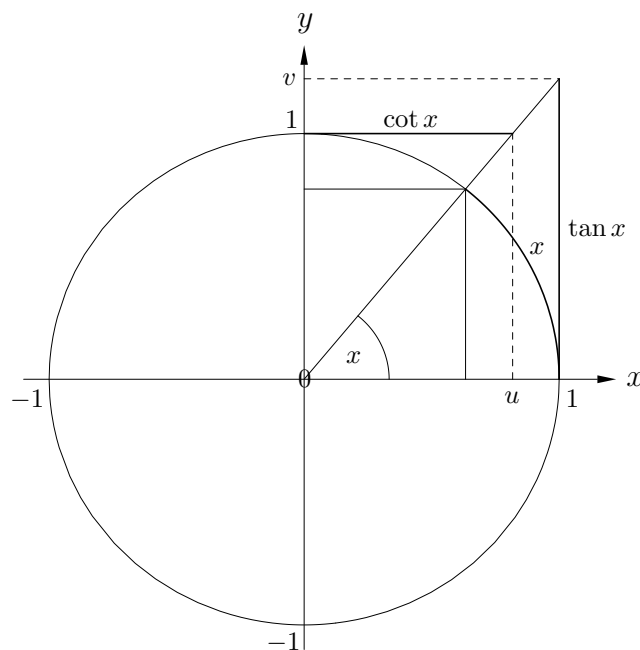


Abb. 5.24 In der Abbildung ist zu erkennen, wie am Einheitskreis die Funktionen \tan und \cot in Abhängigkeit von dem Winkel x (alle hervorgehoben durch dickere Strichstärke; x gemessen in Bogenmaß) veranschaulicht werden können. \cot bzw. \tan sind dann definiert durch: $\cot x := u$, $\tan x := v$.

Die trigonometrischen Funktionen \sin , \cos , \tan , \cot sind als periodische Funktionen **nicht** in ihren gesamten Definitionsbereichen injektiv. In den (maximalen) Teilintervallen, in denen sie jedoch injektiv sind (dort sind sie auch stetig und daher streng monoton), besitzen sie Umkehrfunktionen (die sog. *Arcus-Funktionen*; Arcus oder Arkus := Bogenmaß eines Winkels), die der Reihe nach mit \arcsin , \arccos , \arctan , arccot bezeichnet werden.

Zur Veranschaulichung der Arcus-Funktionen betrachte man zunächst die Abb. 5.21. Dort ist der Winkel x in Bogenmaß gegeben (das ist bekanntlich die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis zwischen den Punkten $(1,0)$ und (u,v) im entgegengesetzten Uhrzeigersinn). Für fixiertes x ist $\sin x$ symbolisiert durch die Strecke der Länge v zwischen den Punkten $(u,0)$ und (u,v) . Also

$$\sin x = v \implies \arcsin(\sin x) = \arcsin v = x \quad (:= \text{die zu } \sin x \text{ gehörende Bogenlänge}).$$

Das Analoge gilt für Cosinus, Tangens und Cotangens.

Abschließend werden noch die trigonometrischen Funktionen mit ihren Umkehrfunktionen (in geeigneten Intervallen) dargestellt (vgl. Abb. 5.25 – 5.28). Sinus wird in $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ und in $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ betrachtet, Cosinus in $[0, \pi]$ und in $[\pi, 2\pi]$. Tangens und Cotangens werden in $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ bzw. in $[0, \pi]$ dargestellt.

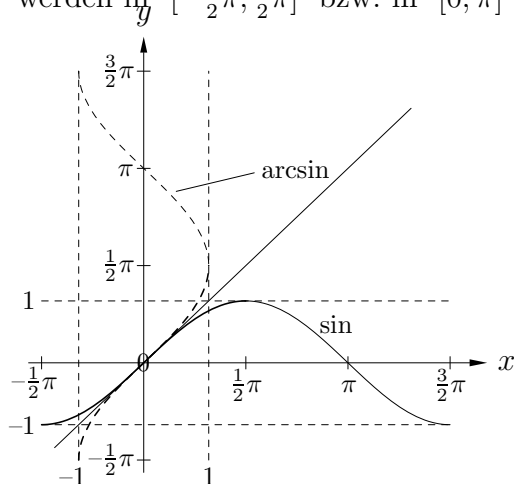


Abb. 5.25 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Sinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Sinus injektiv ist.

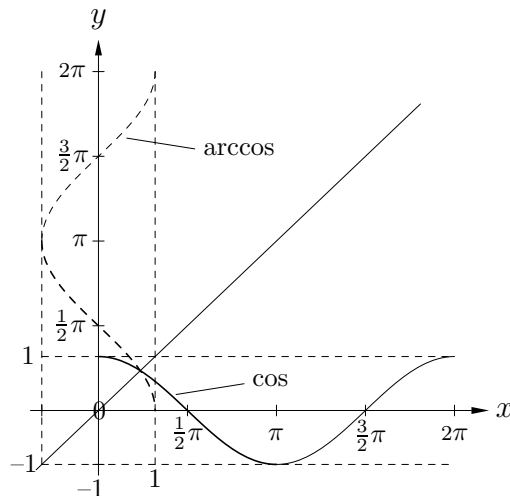


Abb. 5.26 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Cosinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Cosinus injektiv ist.

Analog wie in den vorhergehenden Abbildungen verfahren wir jetzt noch mit Tangens und Cotangens.

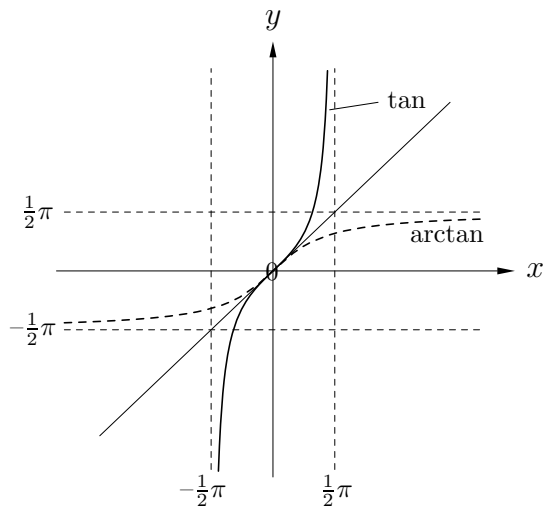


Abb. 5.27 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Tangens in dem Intervall $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

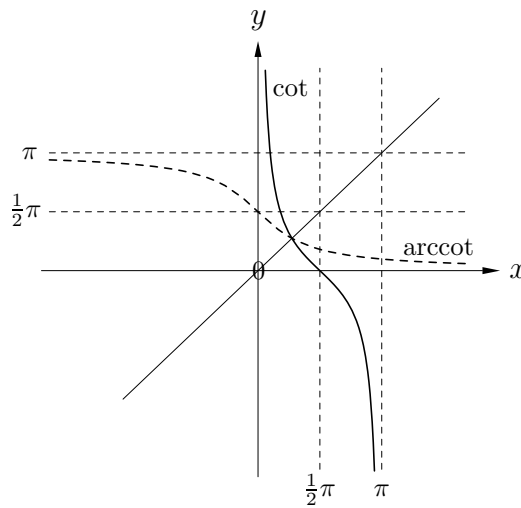


Abb. 5.28 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Cotangens in dem Intervall $(0, \pi)$.

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Das unbestimmte Integral von einer Funktion – die eine Stammfunktion besitzt – ist also eine ganze Klasse von Funktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante unterscheiden. Will man mit diesen Klassen „rechnen“, dann kann man dies repräsentantenweise tun und jeweils entsprechende Konstanten addieren. 9/1/7

Zusammenstellung von Grundintegralen

$$\begin{array}{ll} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ \int \sin x dx = -\cos x + c & \\ \int \cos x dx = \sin x + c & \\ \int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + c & \\ \int \frac{dx}{\sin x} = -\cot x + c & \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c & \\ \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + c, & |x| < 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \\ \int e^x dx = e^x + c \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + c, & |x| > 1 \\ \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|. \end{array}$$

Diese Grundintegrale werden alle durch Differentiation bewiesen.

Satz 9.3 (partielle Integration)

9/1/13

Es seien f und g in I definiert. Besitzt f in I eine Stammfunktion F und ist g in I differenzierbar und besitzt $F \cdot g'$ in I eine Stammfunktion, dann besitzt auch $f \cdot g$ in I eine Stammfunktion, und es ist

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx.$$

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.19 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

9/5/14

Ist f in $[a, b]$ stetig und F eine Stammfunktion von f in $[a, b]$, dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

9.6 Volumen von Rotationskörpern

Wir wenden uns jetzt der Bestimmung des Volumens eines sogenannten *Rotationskörpers* zu. Zunächst soll aber definiert werden, was unter einem solchen Körper zu verstehen ist. 9/6/0

Dazu sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a < b$ und sei f eine in I definierte und integrierbare Funktion, die in dem Intervall nicht negativ wird. Dann bestimmt die Punktmenge

$$M := \{(x, y) : a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

bekanntlich eine Fläche. Läßt man nun diese Fläche um die x -Achse rotieren, dann entsteht eine *Rotationsfigur* oder ein *Rotationskörper* (vgl. Abb. 9.13).

Wir interessieren uns nun für die Frage, ob man diesem Rotationskörper in „vernünftiger“ Weise ein Volumen zuschreiben kann, und wie man gegebenenfalls dieses Volumen definieren und berechnen könnte.

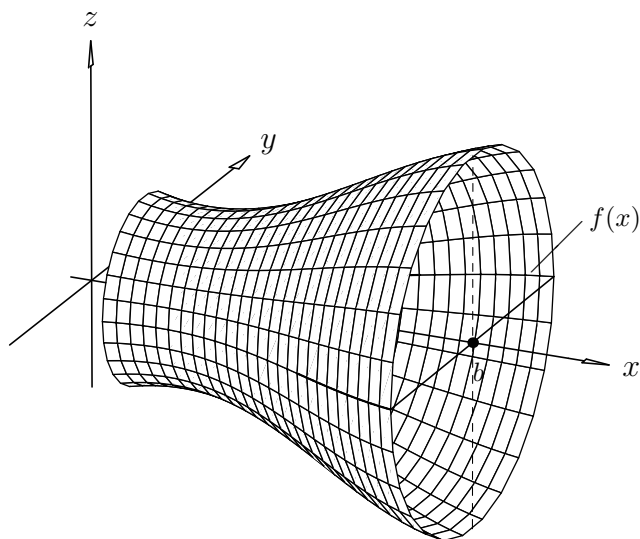


Abb. 9.13 Auf der x -Achse sei ein Intervall $[a, b]$ gegeben, und in diesem Intervall sei eine nicht-negative Funktion $f(x)$ definiert (a ist hier verdeckt). f wird in der (x, y) -Ebene betrachtet. Läßt man f um die x -Achse rotieren, dann entsteht im \mathbb{R}^3 eine Rotationsfigur.

Das Problem ist aufgeworfen, wir versuchen es zu lösen.

Dazu sei $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I . Parallele Ebenen im \mathbb{R}^3 , die zur x -Achse senkrecht stehen und durch die jeweiligen Zerlegungspunkte auf der x -Achse gehen, schneiden aus der Rotationsfigur Kreisscheiben heraus. Das angenäherte Volumen der Kreisscheibe, die durch die Zerlegungspunkte a_i und a_{i+1} bestimmt wird, kann durch einen geeigneten Kreiszylinder angegeben werden. Dazu sei $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ beliebig. Dann ist durch $(a_{i+1} - a_i) \cdot f^2(\xi_i) \cdot \pi$ das Volumen des entsprechenden Zylinders

mit der Höhe $h = a_{i+1} - a_i$ und dem Radius $f(\xi_i)$ gegeben. ξ_i ist eine Zwischenstelle in $[a_i, a_{i+1}]$ (vgl. Abb. 9.8). Entsprechend dieser Überlegung ist durch

$$\tilde{V} = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot f^2(\xi_i) \cdot \pi$$

das angenäherte Volumen der gesamten Rotationsfigur bestimmt. Diese Summe ist offensichtlich eine Zwischensumme der Funktion $\pi \cdot f^2(x)$ bei der Zerlegung \mathfrak{z} und dem Zwischenstellensystem $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$. Nach Voraussetzung ist f in I integrierbar, folglich ist auch πf^2 in I integrierbar.

Betrachtet man jetzt eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge (\mathfrak{z}_ν) von I und eine Folge (τ_ν) von zugehörigen Zwischenstellensystemen, dann existiert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_{\pi f^2}(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$, und der Limes ist gleich dem Integral $\int_a^b \pi f^2(x) dx$.

Daher definiert man das Volumen V der Punktmenge M wie folgt:

$$V \stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_{\pi f^2}(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Beispiele.

(4). Wir berechnen jetzt das Volumen eines Torus.

9/6/1/4

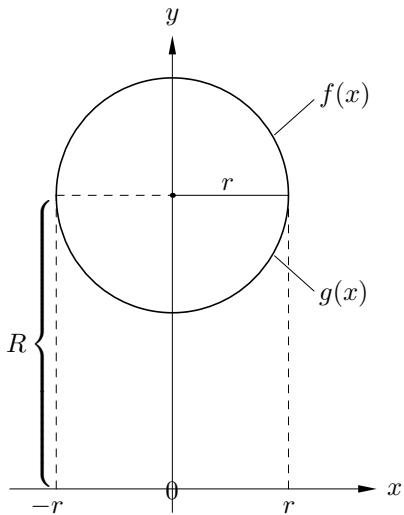


Abb. 9.16 a Die von f und g eingeschlossene Fläche erzeugt bei Rotation um die x -Achse einen *Torus*.

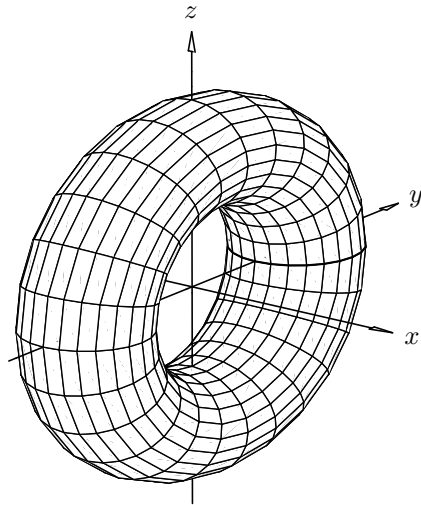


Abb. 9.16 b Die obige Abbildung zeigt diesen Torus räumlich-perspektivisch im Raum \mathbb{R}^3 .

Dazu betrachten wir die Gleichung $(y-R)^2+x^2=r^2$ eines Kreises mit dem Mittelpunkt $(0,R)$ und dem Radius r . Löst man diese Gleichung nach y auf, dann erhält man

zwei Funktionen $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ und $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$; den oberen und unteren Kreisbogen des Kreises. Läßt man die Fläche des entsprechenden Kreises um die x -Achse rotieren, dann erhält man einen Torus. Dessen Volumen ist gegeben durch

$$V = \int_{-r}^r (f^2(x) - g^2(x)) dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f^2(x) - g^2(x) &= R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - (R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2) \\ &= 4R\sqrt{r^2 - x^2}, \end{aligned}$$

und damit gilt

$$V = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Wir lösen zunächst das unbestimmte Integral, um eine Stammfunktion zu erhalten.

Es ist

$$\begin{aligned} \int \sqrt{r^2 - x^2} dx &= r \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} dx \\ &= r \int \sqrt{1 - t^2} \cdot r dt; \quad (\text{für } \frac{x}{r} = t) \\ &= r^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 z} \cdot \cos z dz; \quad (\text{für } t = \sin z) \\ &= r^2 \int \cos^2 z dz \quad (\star) \\ &= r^2 (\sin z \cos z + \int \underbrace{\sin^2 z}_{= 1 - \cos^2 z} dz); \quad (\text{partielle Integration}) \\ &= r^2 (\sin z \cos z + z) - r^2 \int \cos^2 z dz. \end{aligned}$$

Aus (\star) und der letzten Zeile folgt

$$2r^2 \int \cos^2 z dz = \frac{r^2}{2} \sin z \cos z + z = \frac{r^2}{2} \sin z \sqrt{1 - \sin^2 z} + z.$$

Damit haben wir das unbestimmte Integral – allerdings bezüglich z – gelöst. Wir wollen aber das bestimmte Integral bezüglich x in den Grenzen von $-r$ bis r berechnen. Dazu müßten noch die Grenzen entsprechend der Substitutionen transformiert oder die Substitutionen rückgängig gemacht werden. Folgende Substitutionen wurden vorgenommen:

$$t = \sin z \implies z = \arcsin t \quad \text{und} \quad \frac{x}{r} = t \implies z = \arcsin \frac{x}{r}.$$

Für $-r \leq x \leq r$ gilt $-1 \leq \frac{x}{r} \leq 1$ und schließlich $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{r} \leq \frac{\pi}{2}$.

In den betrachteten Intervallen sind die Transformationen bijektiv, folglich ist

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx &= \frac{r^2}{2} \left(\sin(\arcsin \frac{x}{r}) \cdot \sqrt{1 - \left(\sin(\arcsin \frac{x}{r}) \right)^2} + \arcsin \frac{x}{r} \right) \Big|_{-r}^r \\
&= \frac{r^2}{2} \left(\frac{x}{r} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r} \right)^2} + \arcsin \frac{x}{r} \right) \Big|_{-r}^r \\
&= \frac{r^2}{2} \left(\arcsin 1 - \arcsin(-1) \right) \\
&= \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \\
&= \frac{r^2 \pi}{2}
\end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, indem die Integrationsgrenzen entsprechend transformiert werden:

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx &= \frac{r^2}{2} \left(\sin z \cos z + z \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \\
&= \frac{r^2 \pi}{2}.
\end{aligned}$$

Also

$$V = 4\pi R \cdot \frac{r^2 \pi}{2} = 2r^2 R \pi^2.$$