

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.7 Uneigentliche Integrale

Beim Riemann-Integral wurde stets vorausgesetzt, daß die zu integrierenden Funktionen in einem abgeschlossenen (endlichen) Intervall definiert und beschränkt sind. Für manche Zwecke ist es vorteilhaft, auch Integrale über unendlichen Intervallen oder über unbeschränkten Funktionen zuzulassen. Dies führt zum sogenannten *uneigentlichen Integral*.

9/7/0

Definition. (*uneigentliches Integral über unendlichen Intervallen*)

9/7/1

Es sei a eine reelle Zahl, f sei für alle $x \geq a$ definiert und in $[a, x]$ integrierbar,

und es sei $F(x) := \int_a^x f(t) dt$.

f ist in $[a, \infty) = \{x : a \leq x\}$ *uneigentlich integrierbar*

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.

Der Limes heißt dann *uneigentliches Integral* von f in $[a, \infty)$.

$$\text{Bez.: } \int_a^\infty f(t) dt$$

Ist f in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann heißt $\int_a^\infty f(t) dt$ *konvergent*, anderenfalls *divergent*.

Ist $|f|$ in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann heißt $\int_a^\infty f(t) dt$ *absolut konvergent*.

Analog definiert man das uneigentliche Integral von f in $(-\infty, a]$. Hierbei sei f für jedes $x \leq a$ definiert und in $[x, a]$ integrierbar.

Man betrachtet dann $F(x) := \int_x^a f(t) dt$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

Definition. f ist in $(-\infty, \infty)$ *uneigentlich integrierbar*

9/7/2

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so daß f in $(-\infty, a]$ und in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar ist.

$\int_{-\infty}^\infty f(t) dt \overline{\text{Df}} \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^\infty f(t) dt$ heißt *uneigentliches Integral* von f in $(-\infty, \infty)$.

Beispiele.

(1). Es sei $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

9/7/3/1

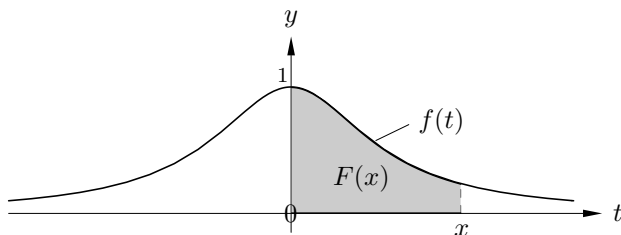


Abb. 9.17 a Der Flächeninhalt der schattierten Fläche ist durch das bestimmte Integral $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ gegeben.

Für $x \rightarrow \infty$ entsteht das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t) dt$.

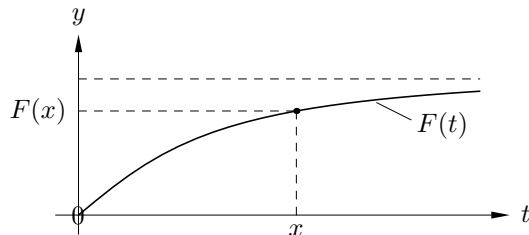


Abb. 9.17 b Für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist $F(x) = \arctan x$ eine Stammfunktion von f , folglich gibt $F(x)$ den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^x f(t) dt$ (Inhalt der schattierten Fläche aus Abb. 9.17 a) an.

Gesucht ist das uneigentliche Integral von f in $(-\infty, \infty)$.

Es ist $\int_{-\infty}^\infty f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^\infty f(t) dt$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dx = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_0^x \\ &= \arctan x - \underbrace{\arctan 0}_{=0} = \arctan x. \end{aligned}$$

Damit gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$. Also

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Analog ist

$$G(x) = \int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} dt = \arctan 0 - \arctan x = -\arctan x$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\arctan x) = -(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

Folglich ist

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und somit} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Bemerkung. $\arctan x$ könnte auch durch $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ definiert werden.

Interpretiert man das uneigentliche Integral als Fläche, dann schließt die Funktion

$f(x) = \frac{1}{1+t^2}$ mit der x -Achse in dem unendlichen Intervall $(-\infty, \infty)$ eine „endliche“ Fläche ein.

(2). Wir betrachten jetzt die Funktion $f(t) = \frac{1}{t}$ und zeigen, daß das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ nicht konvergiert. Dies bedeutet anschaulich gesprochen, daß die „Fläche“, die von oben durch die Funktion und von unten durch die x -Achse in dem Intervall $[1, \infty)$ begrenzt wird, unendlich groß ist (vgl. Abb. 9.18).

9/7/3/2

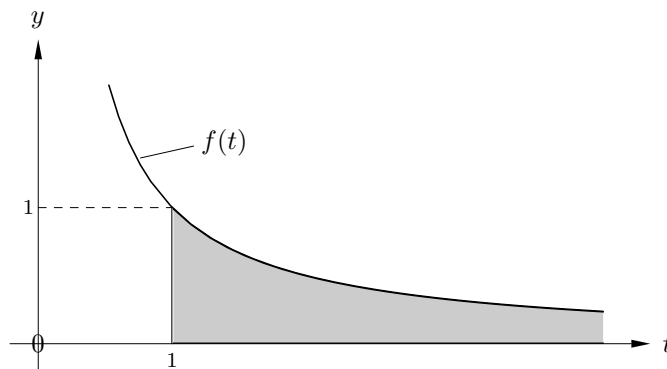


Abb. 9.18 Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ konvergiert nicht, denn $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = \infty$.

Es ist

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty;$$

d.h. der Limes existiert nicht.

Wir betrachten jetzt uneigentliche Integrale über unbeschränkten Funktionen.

9/7/4

Definition. (*uneigentliche Integrale über unbeschränkten Funktionen*)

9/7/5

Es sei $a < b$ und es gelte eine der Bedingungen:

- (1) f ist in $[a, b)$ definiert und für jedes $x \in [a, b)$ in $[a, x]$ integrierbar.
- (2) f ist in $(a, b]$ definiert und für jedes $x \in (a, b]$ in $[x, b]$ integrierbar.
- (3) $a < c < b$, und f ist für jedes $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $a \leq x_1 < c < x_2 \leq b$ in $[a, x_1]$ und in $[x_2, a]$ integrierbar.

f ist in $[a, b]$ *uneigentlich integrierbar*

- \equiv Df (1) $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f(t) dt$ existiert bzw.
- (2) $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \int_x^b f(t) dt$ existiert bzw.
- (3) $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \int_a^x f(t) dt$ und $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \int_x^b f(t) dt$ existieren.

Diese Limites heißen – falls sie existieren – *uneigentliche Integrale* von f in $[a, b]$, und $\int_a^b f(t) dt$ heißt dann *konvergent*, anderenfalls *divergent*.

Die folgenden Abbildungen sollen einige Möglichkeiten für die Bildung von uneigentlichen Integralen über beschränkten Intervallen und unbeschränkten Funktionen veranschaulichen.

9/7/6

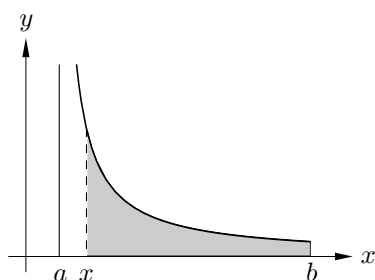


Abb. 9.19 a

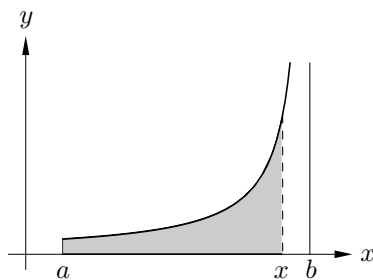


Abb. 9.19 b

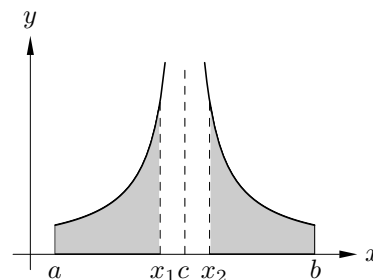


Abb. 9.19 c

Beispiel. Es sei $[a, b] = [0, 1]$ und $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

9/7/7

Es soll $\int_0^1 f(t) dt$ berechnet werden, falls das uneigentliche Integral konvergiert.

Für $0 < x \leq 1$ ist f in $[x, 1]$ stetig und damit auch integrierbar. Es ist

$$F(x) := \int_x^1 f(t) dt = \int_x^1 t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\sqrt{t} \Big|_x^1 = 2(1 - \sqrt{x}).$$

Folglich gilt

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2(1 - \sqrt{x}) = 2.$$

Die verschiedenen Typen von uneigentlichen Integralen über unendlichen Intervallen bzw. über unbeschränkten Funktionen lassen sich natürlich auch kombinieren.

9/7/8

Tieferegehende Untersuchungen über uneigentliche Integrale findet man z.B. in der Literaturangabe [3], Band II, XII Uneigentliche Integrale, Seite 574 – 676.