

# Kapitel 9

## Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

### 9.8 Länge von Kurven

#### Definition.

9/8/4

Sei  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  eine Kurve mit der Parameterdarstellung  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

(1)  $\mathfrak{k}$  ist *stetig differenzierbar* in  $[a, b]$

$\stackrel{\text{Df}}{=} f$  ist stetig differenzierbar in  $[a, b]$ .

(2)  $\mathfrak{k}$  ist *glatt* in  $[a, b]$

$\stackrel{\text{Df}}{=} f$  ist stetig differenzierbar in  $[a, b]$  und  $f'(t) \neq 0$  für jedes  $t \in [a, b]$ .

(3)  $\mathfrak{k}$  ist *stückweise glatt* in  $[a, b]$

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert eine Zerlegung } \mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1}) \text{ von } [a, b], \text{ so daß } \mathfrak{k} \text{ in jedem Teilintervall } [a_i, a_{i+1}] \text{ glatt ist.}$

#### Definition. (*Länge einer Kurve*)

9/8/6

Sei  $\mathfrak{k}$  eine Kurve mit der Parameterdarstellung  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ .

$\mathfrak{k}$  ist *rektifizierbar* (d.h.  $\mathfrak{k}$  besitzt eine Länge)

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert } \sup\{l(P_{\mathfrak{z}}) : \mathfrak{z} \text{ beliebige Zerlegung von } [a, b]\}.$

Das Supremum heißt, falls es existiert, *Länge der Kurve* und wird mit  $l(\mathfrak{k})$  bezeichnet.

**Satz 9.23** *Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist  $\mathfrak{k}$  rektifizierbar, und es gilt*

9/8/10

$$l(\mathfrak{k}) = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^k (f'_i(t))^2} dt.$$