

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (Zerlegung)

9/2/1

\mathfrak{z} ist eine Zerlegung (oder Partition) von I

$\overline{\text{Df}}$ \mathfrak{z} ist eine endliche Folge (a_0, \dots, a_{n+1}) von reellen Zahlen a_0, \dots, a_{n+1} , so daß
 $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$.

Definition. (ausgezeichnete Zerlegungsfolge)

9/2/15

Es sei $(\mathfrak{z}_\nu)_{\nu=0,1,2,\dots}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls I .

(\mathfrak{z}_ν) heißt ausgezeichnete Zerlegungsfolge von I

$\overline{\text{Df}}$ $\lim_{\nu \rightarrow \infty} d(\mathfrak{z}_\nu) = 0$.

9.3 Integrierbarkeitskriterien

Satz 9.9 Es sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt. Dann gilt:

9/3/6

f ist in I integrierbar gdw für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge (\mathfrak{z}_ν) und jede Folge (τ_ν) von zugehörigen Zwischenstellensystemen τ_ν gilt:

Es existiert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$ (und der Limes ist gleich dem Integral $\int_a^b f(x) dx$.)

9.8 Länge von Kurven

Es sei $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ zunächst eine Kurve und $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Verbindet man die Bildpunkte $f(a_0), \dots, f(a_{n+1}) \in \mathfrak{k}$ von a_0, \dots, a_{n+1} der Reihe nach durch Verbindungsstrecken, dann entsteht ein der Kurve einbeschriebener Polygonzug $P_{\mathfrak{z}}$ (vgl. Abb. 9.23). Der Abstand zwischen je zwei „benachbarten“ Bildpunkten $f(a_i)$ und $f(a_{i+1})$ auf der Kurve beträgt $|f(a_{i+1}) - f(a_i)|$. Folglich ist die Länge des Polygonzuges gegeben durch

9/8/5

$$l(P_{\mathfrak{z}}) = \sum_{i=1}^n |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

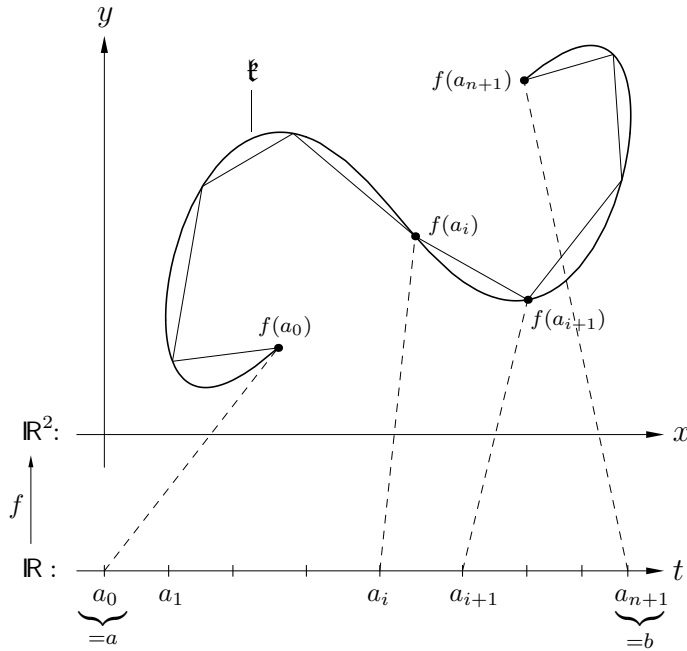


Abb. 9.23 Die Abbildung zeigt eine Kurve im \mathbb{R}^2 mit einem eingeschriebenen Polygonzug. Dabei ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig und $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$. Ist $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dann liegen die Bildpunkte $f(a_i)$, $i = 0, \dots, n+1$, auf der Kurve \mathfrak{k} .

Wir definieren jetzt, was unter der Länge einer Kurve zu verstehen ist.

Definition. (*Länge einer Kurve*)

9/8/6

Sei \mathfrak{k} eine Kurve mit der Parameterdarstellung $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$.

\mathfrak{k} ist *rektifizierbar* (d.h. \mathfrak{k} besitzt eine Länge)

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert $\sup\{l(P_{\mathfrak{z}}) : \mathfrak{z} \text{ beliebige Zerlegung von } [a, b]\}$.

Das Supremum heißt, falls es existiert, *Länge der Kurve* und wird mit $l(\mathfrak{k})$ bezeichnet.

Lemma. Es sei \mathfrak{k} eine durch $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ definierte und stetig differenzierbare Kurve. Weiterhin sei (\mathfrak{z}_ν) eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von $[a, b]$, und (τ_ν) sei eine Folge zugehöriger Zwischenstellensysteme von (\mathfrak{z}_ν) . Dann folgt:

9/8/8

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein ν_0 , so daß für jedes $\nu \geq \nu_0$ gilt:

$$|l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)| < \varepsilon, \text{ wobei } g(t) = |f'(t)| = \sqrt{\sum_{j=1}^k (f'_j(t))^2}.$$

Satz 9.23 Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist \mathfrak{k} rektifizierbar, und es gilt

9/8/10

$$l(\mathfrak{k}) = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^k (f'_i(t))^2} dt.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß die Menge

9/8/11

$$M = \{l(P_{\mathfrak{z}}) : \mathfrak{z} \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$$

nach oben beschränkt ist (\implies es existiert $\sup M$, und somit ist \mathfrak{k} rektifizierbar).

Angenommen, M ist nicht nach oben beschränkt. Dann gibt es eine Folge (\mathfrak{z}_ν) von Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$, so daß die Folge $(l(P_{\mathfrak{z}_\nu}))$ nicht nach oben beschränkt ist. Sei o.B.d.A. (\mathfrak{z}_ν) eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge (durch entsprechende Verfeinerungen läßt sich dies immer erreichen; und aufgrund der Dreiecksungleichung wird bei einer verfeinerten Zerlegung der einbeschriebene Polygonzug höchstens länger). Nach dem Lemma gilt dann für $g(t) = |f'(t)|$.

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(\underbrace{l(P_{\mathfrak{z}_\nu})}_{=\alpha_\nu} - \underbrace{S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)}_{=\beta_\nu} \right) = 0.$$

Wegen der Stetigkeit von $g(t) = |f'(t)|$ in $[a, b]$ ist $|f'(t)|$ als reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen in $[a, b]$ integrierbar. Folglich gilt nach Satz 9.9

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \beta_\nu = \int_a^b |f'(t)| dt := d \in \mathbb{R}.$$

Da $\beta_\nu \rightarrow d$ und $(\alpha_\nu - \beta_\nu)$ eine Nullfolge ist, muß auch die Folge (α_ν) gegen d konvergieren. Dies führt zum Widerspruch.

Folglich gilt $\alpha_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} l(\mathfrak{k})$, und damit ist $l(\mathfrak{k}) = \int_a^b |f'(t)| dt$. \square