

Lösungen der Übungsaufgaben

Im Folgenden sind auf den Seiten A.1 bis A.279 paar Übungen als Auswahl zusammengestellt. Die Nummerierung der Übungsaufgaben bezieht sich auf die Ziffern des Textteiles. So kennzeichnet beispielsweise 7.1.16 die 16-te Übungsaufgabe zum Inhalt der Ziffer 7.1. Die Seitennummerierung ist gemäß A.x angegeben. Die meisten Aufgaben können "von Hand" ohne Hilfsmittel, d.h. unter Klausurbedingungen, gelöst werden. Sehr umfangreiche Übungen sind nur teilweise als Klausuraufgaben geeignet und werden zu diesem Zweck entsprechend modifiziert und gekürzt.

Einige Übungsaufgaben enthalten im Anschluss an die "zu Fuß-Rechnung" einen Computerausdruck. Hierbei wurde die Software "MAPLE V, Release 8" verwendet. MAPLE ist ein "*mathematisches Formelmanipulations-Programm*", mit dem interaktiv gearbeitet werden kann. Mit Hilfe solcher "Formelmanipulations-Systeme" (FMS) ist es möglich, Berechnungen mit unausgewerteten Ausdrücken (*Symbolen*) durchzuführen.

Die sogenannte *Computer-Algebra* ist in den letzten Jahren verstärkt entwickelt worden – MAPLE etwa seit Anfang der 80-er Jahre. Weitere Programme sind MATHCAD (basierend auf MAPLE), MATHEMATICA, MACSYMA, REDUCE und AXIOM, die ebenfalls sehr leistungsstark und anwenderfreundlich sind. Je nach Einsatzgebiet bietet das eine oder andere System mehr oder weniger Vorteile.

Die zusammengestellten Übungsaufgaben sollen den Vorlesungsstoff ergänzen und vertiefen. Es werden auch Übungen aus Aufgabengebieten angeboten, die im Textteil aus Platzgründen nicht behandelt werden konnten. So werden beispielsweise im ersten Band Aufgaben aus der *Wärmeübertragung*, *elektrische* und *hydraulische Netzwerke*, *Schwingungsaufgaben* etc. ausführlich durchgerechnet.

Weiterhin werden im ersten Band an Übungsbeispielen verschiedene Verfahren gegenübergestellt, z.B.: *Finite-Elemente-Methode* / *Finite-Differenzen-Methode* / *Lumped-Mass-Methode* / *Übertragungsmatrizenverfahren*.

Die Übungen des vorliegenden zweiten Bandes stellen einen Katalog der für die FEM grundlegenden *Variationsaufgaben* mit und ohne Nebenbedingungen zusammen. Anwendungen des *Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials*, des *Prinzips der virtuellen Verschiebungen* bzw. *Kräfte*, der *Sätze von Castigliano* werden ausführlich diskutiert. Näherungslösungen nach RITZ, GALERKIN (*gewichtete Residuen*) werden mit FE-Lösungen verglichen.

Ausführlicher als im ersten Band werden numerische Integrationen (Quadraturen) vorgeschlagen und an zahlreichen Beispielen diskutiert.

Behandelt werden **u.a.** *stationäre und instationäre, isotrope und anisotrope Wärmeleitung, Torsion von Stäben*. In diesem Zusammenhang werden gewöhnliche *lineare und nichtlineare Differentialgleichungen sowie partielle Differentialgleichungen* mit Hilfe der FEM behandelt. *Selbstadjungierte Operatoren* werden untersucht. Großer Wert wird auf Fehlerbetrachtungen gelegt.

Zum Kapitel 8 konnten aus Platzgründen keine Übungen aufgenommen werden. Im Textteil sind jedoch genügend Beispiele durchgerechnet und diskutiert, die *geometrische und/oder physikalische bzw. tensorielle Nichtlinearität* beinhalten. Darüber hinaus werden in einigen Übungen der vorausgegangenen Kapitel nichtlineare Probleme behandelt, so dass zum Thema “*Nichtlinearitäten*“ als Einstieg für Studierende ein genügend umfangreicher Übungsstoff vorliegt.

Lösungen der Übungsaufgaben, Kapitel 5

Ü 5.1.1

Die Oberfläche eines Rotationskörpers kann durch das Integral

$$S = 2\pi \int_P^Q y \, ds = 2\pi \int_P^Q y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} \, dx \quad (1)$$

ausgedrückt werden. Für die *Variationsaufgabe* kann darin der Faktor 2π unberücksichtigt bleiben:

$$J[y] = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} \, dx = \int_a^b F(y, y') \, dx = \text{Minimum}. \quad (2)$$

Die in Ziffer 5.1 hergeleitete *EULERSche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (5.21a)$$

bzw. die ausdifferenzierte Form

$$y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (5.21b)$$

reduziert sich wegen $F = F(y, y')$ um den Term $\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} = 0$, so dass nach

Multiplikation von (5.21b) mit y' folgt:

$$y' \left(y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{d}{dx} \left[y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} - F(y, y') \right]. \quad (3)$$

Von der Richtigkeit dieses Zusammenhanges kann man sich leicht überzeugen, wenn man die rechte Seite in (3) unter Berücksichtigung der Produktregel ausdifferenziert. Hierbei ist zu beachten, dass

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} F(y, y') = \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y''$$

gilt. Da (3) wegen (5.21b) verschwinden muss, folgt durch Integration, dass die eckige Klammer in (3) konstant sein muss, z.B. gleich $-C_1$:

$$\boxed{F(y, y') - y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} = C_1}. \quad (4)$$

Wegen $F(y, y') = y\sqrt{1+y'^2}$ gemäß (2) erhält man aus (4) *als erstes Integral der EULERSchen Differentialgleichung*:

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{y y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1. \quad (5)$$

Multipliziert man (5) auf beiden Seiten mit $\sqrt{1+y'^2}$ und löst anschließend nach y'^2 auf, so erhält man:

$$C_1 y' = \sqrt{y^2 - C_1^2}. \quad (6)$$

Durch Trennung der Variablen folgt:

$$\frac{C_1 dy}{\sqrt{y^2 - C_1^2}} = dx, \quad (7)$$

und nach Integration findet man:

$$x + C_2 = C_1 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - C_1^2}} = C_1 \operatorname{arcosh} \frac{y}{C_1}$$

mit der Umkehrung

$$\boxed{y = C_1 \cosh \frac{C_2 + x}{C_1}}. \quad (8)$$

Dieses ist die Gleichung der *Kettenlinie*. Die Konstanten C_1 und C_2 bestimmt man aus den Randbedingungen

$$y_a = C_1 \cosh \frac{C_2 + a}{C_1} \quad \text{und} \quad y_b = C_1 \cosh \frac{C_2 + b}{C_1}.$$

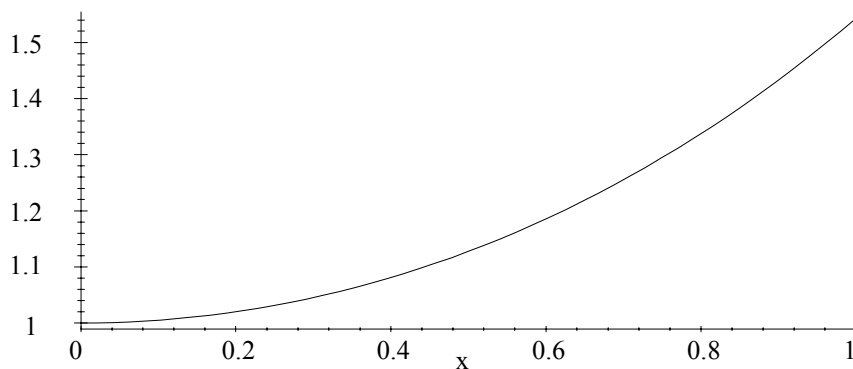
Im folgenden Computerausdruck ist die Kettenlinie mit Hilfe der Software MAPLE V, Release 8 graphisch dargestellt:

```
>y:=C[1]*cosh((C[2]+x)/C[1]);
```

$$y := C_1 \cosh\left(\frac{C_2 + x}{C_1}\right)$$

Annahme: $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $a = 0$, $y_a = 1$, $b = 1$, $y_b(1) = 1.543$; damit ergibt sich folgende Darstellung:

`>plot(cosh(x),x=0..1);`



Ü 5.1.2

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann der Endpunkt P in den Koordinatenursprung gelegt werden. Wegen $v(b) = 0$ erhält man aus dem *Energiesatz*:

$$\frac{m}{2} v^2(x) \equiv \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = mg(h - y). \quad (1)$$

Setzt man in (1) das Bogenelement

$$ds = -\sqrt{1 + y'^2} dx \quad (2)$$

ein und löst nach dt auf, so erhält man:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h - y)}} = -\sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(h - y)}} dx \quad (3)$$

und nach Integration die Fallzeit

$$T = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x=b}^0 \sqrt{\frac{1 + y'^2}{h - y}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{h - y}} dx, \quad (4)$$

die minimal werden soll. Mithin lautet die *Variationsaufgabe*:

$$J[y(x)] = \int_0^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{h-y}} dx = \int_0^b F(y, y') dx = \text{Minimum.} \quad (5)$$

Der Faktor $1/\sqrt{2g}$ in (4) ist für die Variationsaufgabe (5) unbedeutend. Wie in (5) angedeutet, kommt x im Integranden *explizit* nicht vor:

$$F = F(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{h-y}}. \quad (6)$$

Mithin kann (4) aus Ü 5.1.1 benutzt werden, $F(y, y') - y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} = C_1$,

so dass man mit (6) das Zwischenergebnis

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{h-y}} - y' \frac{y'}{\sqrt{(h-y)(1+y'^2)}} = C_1 \quad (7)$$

erhält. Analog Ü 5.1.1 multipliziert man (7) mit $\sqrt{(h-y)(1+y'^2)}$ und findet:

$$C_1^2 (h-y)(1+y'^2) = 1 \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{1-C_1^2(h-y)}{C_1^2(h-y)}}. \quad (8)$$

Wegen $y' = dy/dx$ erhält man aus (8) durch Trennung der Veränderlichen und anschließender Integration:

$$\int \sqrt{\frac{C_1^2(h-y)}{1-C_1^2(h-y)}} dy = \int dx = x + C_2. \quad (9)$$

Es ist naheliegend, die Substitution $C_1^2(h-y) \equiv \eta$ einzuführen:

$$x + C_2 = -\frac{1}{C_1^2} \int \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} d\eta. \quad (10)$$

Wegen $h \geq y$ muss $\eta \geq 0$ sein. Andererseits darf η nicht eins sein wegen (10), so dass

$$0 \leq \eta < 1 \quad (11)$$

gelten muss. Somit bietet sich eine weitere Substitution an:

$$\eta \equiv C_1^2(h-y) \equiv \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi) \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi < \pi, \quad (12)$$

aus der man

$$y = h - \frac{1}{2C_1^2}(1 - \cos \varphi) \quad (13)$$

abliest und die, in (10) eingesetzt, auf

$$x + C_2 = -\frac{1}{C_1^2} \int \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi = -\frac{1}{2C_1^2}(\varphi - \sin \varphi) \quad (14)$$

führt. Anstelle von (12) würde sich auch die Substitution $\eta \equiv \sin^2 \vartheta$ anbieten. Zur Bestimmung der Parameter C_1, C_2 in (13) und (14) stehen die Randbedingungen (Skizze in der Aufgabenstellung)

$$y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(b) = h \quad (15a,b)$$

zur Verfügung. Die Bedingung (15b) kann mit (13) in Einklang gebracht werden, wenn $\varphi = 0$ für $x = b$ gilt. Damit folgt aus (14) unmittelbar $C_2 = -b$. Setzt man noch $1/2C_1^2 \equiv c$, so folgt aus (13) und (14) schließlich die Parameterdarstellung einer *gewöhnlichen Zyklode*:

$$\boxed{x = b - c(\varphi - \sin \varphi) \quad y = h - c(1 - \cos \varphi)} \quad (16a,b)$$

Gemäß der Skizze in der Aufgabenstellung ist $y = 0$ für $x = 0$, so dass damit die Konstante c aus (16a,b) bestimmt werden kann:

$$\left. \begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow \cos \varphi = 1 - \frac{h}{c} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(1 - \frac{h}{c}\right) \\ x = 0 &\Rightarrow \frac{b}{c} = \varphi - \sin \varphi = \varphi - \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{b}{c} = \arccos\left(1 - \frac{h}{c}\right) - \sqrt{\frac{h}{c}\left(2 - \frac{h}{c}\right)}} \quad (17)$$

Diese transzendente Gleichung für $c \geq h/2$ kann z.B. mit Hilfe der MAPLE-Software bestimmt werden, so dass dann (16a,b) im Bereich $0 \leq \varphi < \pi$ ausgewertet werden kann, wie der nachstehende Output zeigt.

```
>x:=b-c*(phi-sin(phi)); y:=h-c*(1-cos(phi));
      x = b - c (phi - sin(phi))
      y := h - c (1 - cos(phi))
```

Die Werte b und h geben die Lage des Startpunktes Q an. Der Wert c wird aus der transzenten Gleichung

```
>b/c=arccos(1-h/c)-sqrt(h*(2-h/c)/c);
```

$$\frac{b}{c} = \arccos\left(1 - \frac{h}{c}\right) - \sqrt{\frac{h\left(2 - \frac{h}{c}\right)}{c}}$$

ermittelt. Beispielsweise sei $b = h = 1$, dann wird:

`>eqn:=1/c=arccos(1-1/c)-sqrt((2-1/c)/c);`

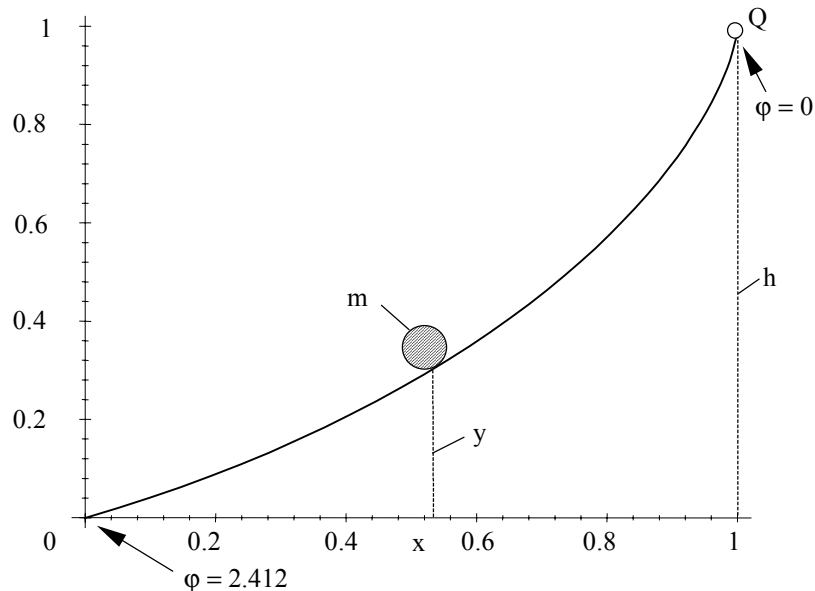
$$eqn := \frac{1}{c} = \arccos\left(1 - \frac{1}{c}\right) - \sqrt{\frac{2 - \frac{1}{c}}{c}}$$

`>c:=fsolve(eqn,c,0..1);`

$$c := .5729170375$$

Es existiert nur eine Lösung $c > h/2$. Mit diesem c -Wert wird die Zyклоide gerechnet und grafisch dargestellt.

`>plot([1-c*(phi-sin(phi)),1-c*(1-cos(phi)), phi=0..2.412]);`



Ü 5.1.3

Unter den gegebenen Voraussetzungen und wegen

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

kann die Variationsaufgabe (1) gemäß

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(y)} dx \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \quad (2)$$

ausgedrückt werden. Wie in den Übungen 5.1.1 und 5.1.2 kommt im Integranden die Variable x nicht explizit vor, $F = F(y, y')$, so dass man vom *ersten Integral der EULERSchen Differentialgleichung* ausgehen kann:

$$\boxed{F(y, y') - y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} = C_1}.$$

Wegen $F(y, y') = \sqrt{1 + y'^2} / v(y)$ folgt daraus:

$$\sqrt{1 + y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 v(y).$$

Die Auflösung nach y' ergibt:

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - C_1^2 v^2(y)} / C_1 v(y),$$

so dass man durch Trennung der Veränderlichen und anschließender Integration das allgemeine Ergebnis

$$\boxed{x + C_2 = \int \frac{C_1 v(y)}{\sqrt{1 - C_1^2 v^2(y)}} dy} \quad (3)$$

erhält.

Für die in der Aufgabenstellung angegebenen Spezialfälle erhält man aus (3) folgende Ergebnisse

a) $v(y) = cy \Rightarrow x + C_2 = \int \frac{C_1 cy}{\sqrt{1 - C_1^2 c^2 y^2}} dy.$

Mit der Substitution $C_1 cy \equiv \sin \varphi$ wird:

$$x + C_2 = \frac{1}{C_1 c} \int \sin \varphi d\varphi = -\frac{1}{C_1 c} \cos \varphi.$$

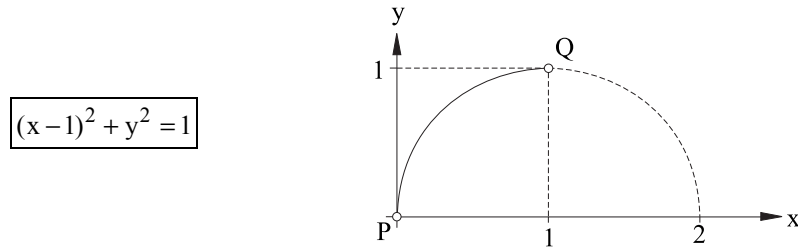
Quadriert man auf beiden Seiten, so folgt unter Berücksichtigung der oben eingeführten Substitution:

$$(x + C_2)^2 = \frac{1}{C_1^2 c^2} \cos^2 \varphi = \frac{1}{C_1^2 c^2} (1 - \sin^2 \varphi) = \frac{1}{C_1^2 c^2} - y^2,$$

d.h., man erhält Kreise mit dem Radius $R = \sqrt{1 / C_1 c}$, deren Mittelpunkt auf der x -Achse um $x_0 = -C_2$ verschoben ist:

$$\boxed{(x + C_2)^2 + y^2 = 1 / C_1^2 c^2} . \quad (4)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 sind durch die Lage der Punkte P und Q bestimmt (Skizze). Beispielsweise sei $P = (0,0)$ und $Q = (1,1)$. Dann wird $C_2^2 = 1 / C_1^2 c^2$ und $C_2 = -1$, so dass damit unabhängig von c aus (4) der um 1 verschobene Einheitskreis folgt:



$$\text{b) } v(y) = c\sqrt{y} \Rightarrow x + C_2 = \int \frac{C_1 c \sqrt{y}}{\sqrt{1 - C_1^2 c^2 y}} dy .$$

Mit der *Substitution* $C_1 c \sqrt{y} \equiv \sin \varphi$ wird:

$$x + C_2 = \frac{2}{C_1^2 c^2} \int \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{C_1^2 c^2} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right)$$

oder: $x = -C_2 + \frac{1}{2C_1^2 c^2} (2\varphi - \sin 2\varphi).$

Aus obiger Substitution und mit der Abkürzung $\frac{1}{2C_1^2 c^2} \equiv r$ folgt:

$$y = \frac{1}{C_1^2 c^2} \sin^2 \varphi = r(1 - \cos 2\varphi) \equiv r(1 - \cos \psi).$$

Somit lautet das Ergebnis zusammengefasst:

$$\boxed{x = -C_2 + r(\psi - \sin \psi)} \quad \boxed{y = r(1 - \cos \psi)} . \quad (5a,b)$$

Dies ist die Parameterdarstellung von *Zykloiden* (Ü 5.1.2). Legt man den Punkt P in den Koordinatenursprung (0,0), so folgt aus (5b) der Parameter $\psi = 0$ und damit aus (5a) die Konstante $C_2 = 0$. Mithin vereinfacht sich (5a,b) zu:

$$\boxed{x = r(\psi - \sin \psi)} \quad \boxed{y = r(1 - \cos \psi)} . \quad (6a,b)$$

Darin kann r als Radius eines Kreises gedeutet werden, der ohne Gleiten auf einer flachen Bahn (x -Achse) rollt, wobei ein Punkt auf dem Kreis eine *Zykloide* beschreibt, die gemäß (6a,b) in Parameterform gegeben ist (Bild mit $r = 1$).

```
>x:=psi-sin(psi);y:=1-cos(psi);
```

$$x := \psi - \sin(\psi)$$

$$y := 1 - \cos(\psi)$$

```
>xi:=2-sin(psi);eta:=1-cos(psi);
```

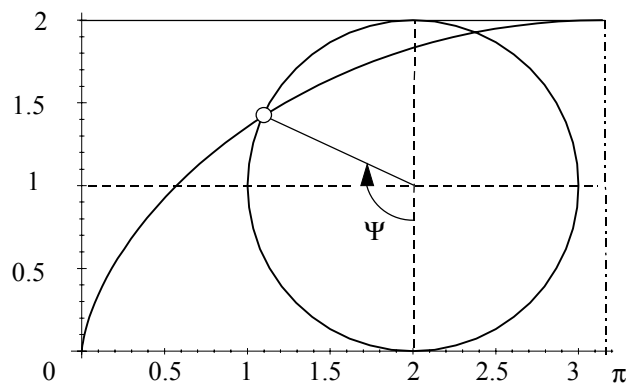
$$\xi := 2 - \sin(\psi)$$

$$\eta := 1 - \cos(\psi)$$

```
>with(plots):
```

```
>plot1:=plot([x,y,psi=0..Pi]): plot2:=plot([xi,eta,psi=0..2*Pi]):
```

```
>plots[display]({plot1,plot2},scaling=constrained);
```



$$\text{c) } v(y) = c/\sqrt{y} \Rightarrow x + C_2 = \int \frac{C_1 c / \sqrt{y}}{\sqrt{1 - C_1^2 c^2 / y}} dy$$

Mit der *Substitution*

$$C_1 c / \sqrt{y} \equiv \sin \varphi \Rightarrow y = \frac{C_1^2 c^2}{\sin^2 \varphi} \quad (7)$$

wird:

$$x + C_2 = -2C_1^2 c^2 \int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = 2C_1^2 c^2 \cot \varphi . \quad (8)$$

Durch Elimination von $\sin \varphi$ erhält man aus (7) und (8) die Parabel:

$$\boxed{y = q + \frac{1}{4q}(x + C_2)^2 \quad \text{mit} \quad q \equiv C_1^2 c^2} \quad (9)$$

mit dem *Scheitelpunkt* $(x_0, y_0) = (-C_2, q)$.

Bemerkung: Multipliziert man (1) mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und berücksichtigt man, dass

$$c / v = n \quad (10)$$

der *Brechungsindex* ist, so kann man die Variationsaufgabe (1) auch gemäß

$$\int_P^Q n \, ds \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \quad (11)$$

formulieren. Dieses Integral wird als "*Lichtweg*" bezeichnet. Das *FERMATsche Prinzip* wird auch *Prinzip des kürzesten Lichtweges* genannt und stellt das *Grundproblem der geometrischen Optik* dar.

Ü 5.1.4

Das Integral des Funktionals ist vom Typ $F = F(x, u, u')$, so dass die *zugehörige EULERSche Differentialgleichung* allgemein durch

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \quad (5.21a)$$

bestimmt ist. Setzt man darin

$$F = F(x, u, u') = \frac{1}{2} \left[p(x) u'^2(x) - \lambda q(x) u^2(x) \right] \quad (2)$$

ein, so erhält man wegen

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\lambda q(x) u(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial u'} = p(x) u'(x)$$

das Ergebnis

$$\boxed{\frac{d}{dx} [p(x) u'(x)] + \lambda q(x) u(x) = 0} \quad (3)$$

Wählt man beispielsweise $p = x^2$ und $\lambda q(x) = q_0 = \text{const.}$, so geht aus (3) die spezielle *EULERSche Differentialgleichung*

$$x^2 u'' + 2xu' + q_0 u = 0 \quad (4)$$

hervor, die vermöge der Substitution

$$x = e^t, \quad u(e^t) = v(t) \quad (5a, b)$$

in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für $v(t)$ übergeht:

$$\boxed{\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} + q_0 v(t) = 0} . \quad (6)$$

Um das zu zeigen, bilde man aus der Substitution (5a, b):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = u' e^t = xu' . \quad (7)$$

Daraus erhält man:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{d(xu')}{dx} \frac{dx}{dt} = (u' + xu'') e^t = xu' + x^2 u'' . \quad (8)$$

Die Summe von (7) und (8) stimmt mit den ersten beiden Termen in (4) überein, so dass schließlich mit (5b) die Differentialgleichung (4) in (6) übergeht.

Bemerkung: Die Lösungen der Variationsaufgabe (1) sind auch Lösungen der Differentialgleichung (3). Umgekehrt muss nicht jede Lösung von (3) auch eine Lösung von (1) sein; denn die EULERSche Differentialgleichung (3) ist ja nur eine *notwendige Bedingung* dafür, dass (1) extremal wird. Häufig kann man Näherungslösungen einer Dgl. etwa der Form (3) dadurch finden, dass man sie auf das zugehörige Variationsproblem (1) zurückführt.

Ü 5.1 5

Wegen

$$F(u, u', u'') = u''^2(x) - \alpha u'^2(x) - \beta u^2(x) \quad (2)$$

geht man von der allgemeinen Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) = 0 \quad (5.27)$$

aus. Mit (2) wird im Einzelnen:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -2\beta u, \quad \frac{\partial F}{\partial u'} = -2\alpha u', \quad \frac{\partial F}{\partial u''} = 2u''.$$

Damit erhält man aus (5.27) schließlich die gesuchte *EULERSche Differentialgleichung*

$$\boxed{u^{(4)}(x) + \alpha u''(x) - \beta u(x) = 0} , \quad (3)$$

die dem Variationsproblem (1) zugeordnet ist.

Bemerkung: Die Übungen Ü5.1.4 und Ü5.1.5 zeigen, wie man zu einer gestellten Variationsaufgabe die entsprechende *EULERSche Differentialgleichung* leicht ermitteln kann. Umgekehrt ist es oft schwierig, zu einer gegebenen Differentialgleichung die zugehörige Variationsaufgabe zu formulieren. Darüber hinaus existiert nicht immer ein entsprechendes Variationsproblem. Im Zusammenhang mit der Überprüfung der *selbstadjungierten* Eigenschaften von Differentialoperatoren wird die *Existenz eines Variationsprinzips* in den Ziffern 7.2 / 7.3 und in entsprechenden Übungen näher untersucht.

Die Suche nach einer *Variationsformulierung* lohnt sich, da die Variationsaufgabe, insbesondere im Zusammenhang mit der FEM, meistens eleganter und erfolgreicher gelöst werden kann. Ein Beispiel wird in Ü5.1.6 erläutert.

Ü 5.1.6

Mit den Abkürzungen $p(x) \equiv 1$ und $\lambda q(x) \equiv P / EI(x)$ geht die *EULERSche Differentialgleichung* (3) aus Ü 5.1.4 in die obige Differentialgleichung des Knickstabes über. Mithin kann die entsprechende Variationsaufgabe gemäß Ü 5.1.4 folgendermaßen formuliert werden:

$$J[w(x)] = \int_0^{\ell} \left[w'^2(x) - \underbrace{\lambda q(x)}_{P/EI(x)} w^2(x) \right] dx = \text{Extremum} . \quad (2)$$

Bemerkung: Da die Differentialgleichung (1) bei veränderlicher Biegesteifigkeit nur schwierig gelöst werden kann, ist ein Ausweichen auf die Variationsaufgabe ratsam. Zur Lösung von Variationsaufgaben bietet sich das *RAYLEIGH-RITZ-Verfahren* an, auf das in Ziffer 7.1 und in entsprechenden Übungen näher eingegangen wird. Dieses *klassische* Verfahren ist auch grundlegend für die FEM.

Ü 5.1.7

Mit $I_y(x) = \frac{\pi}{64} d^4(x)$ ist die Differentialgleichung der elastischen Linie

(Ü 5.1.6) gemäß

$$w''(x) + \frac{P}{EI(x)} w(x) \equiv w''(x) + \frac{64P}{\pi E} \frac{w(x)}{d^4(x)} = 0 \quad (1)$$

gegeben, woraus man

$$d^4(x) = -\lambda^2 \frac{w(x)}{w''(x)} \quad (2)$$

erhält. Darin ist zur Abkürzung

$$\lambda^2 \equiv 64P / \pi E \quad (3)$$

eingeführt. Aus der Formel für das Stabvolumen,

$$V = \frac{\pi}{4} \int_0^{\ell} d^2(x) dx, \quad (4)$$

erhält man mit (2) die Beziehung

$$\frac{4V}{\pi \lambda} = \int_0^{\ell} \sqrt{-w / w''} dx. \quad (5)$$

Die Knicklast P wird nach (3) *maximal*, wenn λ *maximal* ist. Mithin muss bei vorgegebenem Stabvolumen V die Beziehung (5) minimal werden, so dass die *Variationsaufgabe*

$$J[w(x)] = \int_0^{\ell} \sqrt{-w / w''} dx \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \quad (6)$$

unter Berücksichtigung der homogenen Randbedingungen

$$w(0) = w(\ell) = 0 \quad (7)$$

zu lösen ist.

Da der Integrand in (6) nur w und w'' enthält, reduziert sich die *EULERSche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) = 0 \quad (5.27)$$

zu

$$\frac{\partial F}{\partial w} + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) = 0, \quad (8)$$

so dass man wegen

$$F = F(w, w'') = \sqrt{-w / w''} \quad (9)$$

die *EULERSche Differentialgleichung*

$$\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{-w / w''^3} + 1 / \sqrt{-w w''} = 0$$

bzw. mit der Substitution $v^2 \equiv -w / w''^3$ die Darstellung

$$v''w - v w'' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} (v'w - v w') = 0 \quad (10a,b)$$

erhält. Aus (10a,b) folgt durch Integration:

$$v'w - v w' = A. \quad (11)$$

Wegen $w(0) = 0$ gilt aufgrund der Substitution $v^2 \equiv -w / w''^3$ auch $v(0) = 0$, so dass damit die Konstante A in (11) verschwindet:

$$v'w - v w' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{v}{w} \right) = 0. \quad (12a,b)$$

Durch Integration erhält man aus (12b):

$$\left. \begin{array}{l} v = Bw \Rightarrow v^2 = B^2 w^2 \\ \text{Substitution: } v^2 = -\frac{w}{w''^3} \end{array} \right\} \Rightarrow w w''^3 = -1/B^2.$$

Da die Durchbiegungsfunktion $w(x)$ nur bis auf einen multiplikativen Faktor bestimmt ist, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit $B = 1$ setzen, so dass die Dgl.

$$w = -1/w''^3 \quad \text{bzw.} \quad w'' = -1/w^{1/3} \quad (13)$$

gilt. Damit findet man:

$$\frac{d}{dx}(w'^2) = 2w'w'' = -2w'/w^{1/3} = -3 \frac{d}{dx}(w^{2/3}).$$

Durch Integration auf beiden Seiten folgt:

$$w'^2 = -3w^{2/3} + C_1 \Rightarrow \frac{dw}{dx} \equiv w' = \sqrt{C_1 - 3w^{2/3}}. \quad (14)$$

Nach Trennung der Veränderlichen und mit $c^2 = C_1 / 3$ erhält man:

$$x + C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dw}{\sqrt{c^2 - w^{2/3}}} = \frac{1}{2} \sqrt{3} c^2 \left[\arcsin \frac{w^{1/3}}{c} - \frac{w^{1/3}}{c} \cdot \sqrt{1 - \frac{w^{2/3}}{c^2}} \right]. \quad (15)$$

Die Richtigkeit von (15) wurde mit der MAPLE-Software überprüft. Aus der Randbedingung $w(0) = 0$ folgt: $C_2 = 0$. Aus der Randbedingung $w(\ell) = 0$ folgt mit $C_2 = 0$ aus (15):

$$\ell = \frac{1}{2} \sqrt{3} c^2 \arcsin 0. \quad (16)$$

Daraus folgt: $\varphi = \frac{2\ell}{\sqrt{3}c^2} = \arcsin 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi = \pi}$;

denn $\varphi = 0$ muss man wegen $\ell \neq 0$ ausschließen.

Somit erhält man:

$$\ell = \frac{1}{2} \sqrt{3} c^2 \pi \Rightarrow \boxed{c^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\ell}{\pi}}. \quad (17)$$

Setzt man (13) in (2) ein, so findet man mit (3) und (17):

$$d = \sqrt{\lambda} w^{1/3} \Rightarrow \boxed{\frac{w^{1/3}}{c} = \frac{d}{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\ell}{\pi} \lambda}} \equiv \frac{d}{d_0}}. \quad (18)$$

Darin ist als Bezugswert

$$d_0 \equiv \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\ell}{\pi} \lambda} = 4 \sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{3} \pi}} \sqrt{\frac{P}{\pi E}} \Rightarrow \boxed{d_0^4 = \frac{256}{3\pi^3} \frac{\ell^2 P}{E}} \quad (19)$$

eingeführt. Unter Berücksichtigung von (17) und (18) kann man (15) gemäß

$$\boxed{\xi \equiv \frac{x}{\ell} = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \eta - \eta \sqrt{1 - \eta^2} \right) \quad \left| \begin{array}{l} \eta \equiv d / d_0 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \end{array} \right.} \quad (20)$$

ausdrücken. Aus (20) liest man ab, dass $d \leq d_0$, d.h., der durch (19) eingeführte Bezugswert d_0 kann als größter Durchmesser angesehen werden, der aus Symmetriegründen in Stabmitte ($x = \ell/2$) auftritt, wie auch aus (20) folgt. Somit ist durch (19) auch die *maximale Knicklast* P_{krit} unmittelbar gegeben:

$$\boxed{P_{\text{krit}} = \frac{3\pi^3}{256} \cdot \frac{E}{\ell^2} d_0^4}. \quad (21)$$

Um diese Last angeben zu können, muss d_0 noch bestimmt werden. Dazu löst man die transzendente Gleichung (20) nach d/d_0 auf und setzt die Lösung $d = d_0 f(x)$ in (4) ein, so dass man d_0 bei gegebenem V aus der Formel

$$\boxed{d_0^2 = \frac{4V}{\ell \pi \int_0^1 f^2(x) dx}} \quad (22)$$

bestimmen kann.

Die Bestimmung des optimalen Durchmessers $d(x)$ bzw. $\eta \equiv d(x)/d_0$ und der Knicklast des optimierten Stabes kann bequem mit der MAPLE - Software durchgeführt werden, wie der folgende Output zeigt.

```
>xi:=(arcsin(eta)-eta*sqrt(1-eta^2))/Pi;
```

$$\xi := \frac{\arcsin(\eta) - \eta \sqrt{1 - \eta^2}}{\pi}$$

```
>Diff(xi,eta)=diff(xi,eta);
```

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\arcsin(\eta) - \eta \sqrt{1 - \eta^2}}{\pi} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} - \sqrt{1 - \eta^2} + \frac{\eta^2}{\sqrt{1 - \eta^2}}}{\pi}$$

> simplify(");

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{\arcsin(\eta) + \eta \sqrt{1 - \eta^2}}{\pi} \right) = 2 \frac{\eta^2}{\sqrt{1 - \eta^2} \pi}$$

Das Integral über ξ geht damit über in ein Integral über η :

> (4/Pi)*Int(eta^4/sqrt(1-eta^2), eta=0..1)=(4/Pi)*int(eta^4/sqrt(1-eta^2), eta=0..1);

$$4 \frac{\int_0^1 \frac{\eta^4}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta}{\pi} = \frac{3}{4}$$

Den Durchmesser in Stabmitte erhält man somit zu

> d[0]:=4*sqrt(V/3/Pi/l);

$$d_0 := \frac{4}{3} \sqrt{3} \sqrt{\frac{V}{\pi l}}$$

Damit ergibt sich die Knicklast des optimierten Stabes zu:

> P[krit]:=Pi*E*V^2/3/l^4;

$$P_{krit} := \frac{1}{3} \frac{\pi E V^2}{l^4}$$

Im Vergleich dazu ist die Knicklast des Stabes mit konstantem Durchmesser durch

> P[krit]:=Pi*E*V^2/4/l^4;

$$P_{krit} := \frac{1}{4} \frac{\pi E V^2}{l^4}$$

gegeben, so dass man als Vergleich das Verhältnis $4/3$ erhält, d.h., der optimierte Stab kann bei gleichem Volumen bzw. Gewicht eine um 33% größere Knicklast ertragen!

Der Durchmesser in Stabmitte des optimierten Stabes ist um den Faktor

> 2/sqrt(3)=evalf(2/sqrt(3));

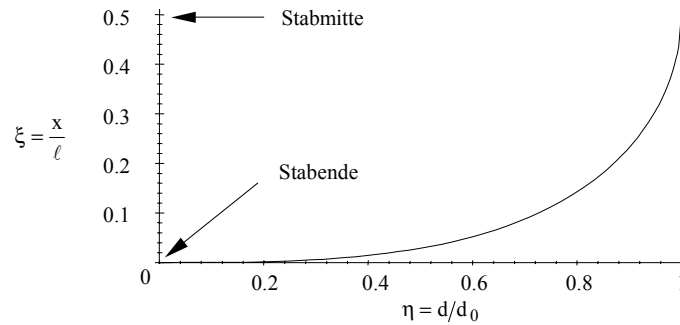
$$\frac{2}{3} \sqrt{3} = 1.154700539$$

d.h. um 15% größer als der konstante Durchmesser des nicht optimierten Stabes!

> xi:=(1/Pi)*(arcsin(eta)-eta*sqrt(1-eta^2));

$$\xi := \frac{\arcsin(\eta) - \eta \sqrt{1 - \eta^2}}{\pi}$$

>plot(xi,eta=0..1);



Ü 5.2.1

Das Quadrat des Abstandes eines gegebenen Punktes P_i von einem variablen Punkt x_i ist gegeben durch die Beziehung

$$R^2 = (x_i - P_i)(x_i - P_i) \equiv (x_1 - P_1)^2 + (x_2 - P_2)^2 + (x_3 - P_3)^2. \quad (2)$$

Die Koordinaten x_i müssen die Beziehung (1) erfüllen, d.h., der variable Punkt x_i liegt auf der gegebenen Ebene. Das Minimum des Ausdrucks (2) unter der "Nebenbedingung" (1) wird ermittelt, indem man von der Funktion

$$\Phi = (x_i - P_i)(x_i - P_i) - \lambda(A_i x_i + B) \quad (3)$$

ausgeht und ihre partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 2(x_i - P_i) \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_k}}_{\delta_{ik}} - \lambda A_i \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_k}}_{\delta_{ik}} = 2(x_k - P_k) - \lambda A_k \quad (4)$$

zum Verschwinden bringt:

$$\partial \Phi / \partial x_k = 0_k \Rightarrow x_k = P_k + \frac{1}{2} \lambda A_k \quad \text{bzw.} \quad x_i = P_i + \frac{1}{2} \lambda A_i. \quad (5)$$

Setzt man (5) in die "Nebenbedingung" (1) ein, so erhält man unmittelbar den *LAGRANGE'schen Multiplikator*:

$$A_i P_i + \frac{1}{2} \lambda A_i A_i + B = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \frac{A_i P_i + B}{A_k A_k} \equiv -2 \frac{A_1 P_1 + \dots + A_3 P_3 + B}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}. \quad (6)$$

Durch Einsetzen von (5) in die Beziehung (2) erhält man schließlich:

$$R_{\min}^2 = \frac{1}{4} \lambda^2 A_i A_i \equiv \frac{1}{4} \lambda^2 (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2). \quad (7)$$

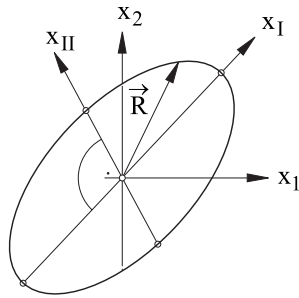
Darin ist λ gemäß (6) einzusetzen.

Den Abstand der Ebene (1) vom Koordinatenursprung ($P_i = 0_i$) ermittelt man aus (7) zu :

$$\boxed{R = B/\sqrt{A_k A_k}} \quad (8)$$

Darin ist $\pm 1/\sqrt{A_k A_k}$ ein *normierender Faktor*, mit dem man (1) auf die *HESSEsche Normalform* bringen kann.

Ü 5.2.2



$$N = A_{ij} x_i x_j - 1 = 0. \quad (1)$$

Den Abstand $|\vec{R}| \equiv |\vec{x}|$ eines Flächenpunktes, der die "Nebenbedingung" (1) erfüllt, erhält man aus

$$R^2 = x_i x_i. \quad (2)$$

Er ist (*notwendig*) extremal, wenn die ($k=1,2,3$) partiellen Ableitungen $\partial \Phi / \partial x_k$ der Funktion

$$\Phi = x_i x_i - \mu (A_{ij} x_i x_j - 1) \quad (3)$$

sämtlich verschwinden:

$$\partial \Phi / \partial x_k = 2x_k - \mu (A_{jk} + A_{kj}) x_j \stackrel{!}{=} 0_k. \quad (4)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann in (1) die Symmetrie $A_{ij} = A_{ji}$ angenommen werden. Dann folgt aus (4) die Beziehung:

$$x_i = \mu A_{ij} x_j. \quad (5)$$

Überschiebt man (5) mit x_i , so erhält man unter Berücksichtigung von (1) und (2) das Ergebnis:

$$R_{\text{extr.}}^2 = \mu A_{ij} x_i x_j = \mu \Rightarrow \boxed{R_{\text{extr.}} = \sqrt{\mu}}. \quad (6)$$

Substituiert man $\boxed{\mu \equiv 1/\lambda}$, so geht (4) unter Berücksichtigung der *Austauschregel* $x_k = \delta_{kj} x_j$ und mit $A_{ij} = A_{ji}$ in das *charakteristische Gleichungssystem* über:

$$\boxed{(A_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_j = 0_i}. \quad (7)$$

Aus $\det(A_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0$ gewinnt man die *Hauptwerte* $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$, und mit (6) ergeben sich die *Halbachsen* der *Tensorquadrik* zu:

$$R_I = 1/\sqrt{\lambda_I}, \dots, R_{III} = 1/\sqrt{\lambda_{III}}.$$

Ü 5.2.3

Das Transformationsgesetz eines Tensors 2-ter Stufe ist gegeben durch

$$A_{ij}^* = a_{ip} a_{jq} A_{pq} = A_{ji}^* . \quad (1)$$

Die Aufgabe besteht darin, die *Transformationsmatrix* a_{ij} so zu bestimmen, dass A_{11}^* , A_{22}^* und A_{33}^* extremal werden. Dabei ist die *Nebenbedingung* (*Orthonormierungsbedingung*)

$$M_{ij} = a_{ip} a_{jp} - \delta_{ij} = 0_{ij} \quad (2)$$

zu erfüllen. Im Sinne der *Multiplikatorenmethode* geht man von der (modifizierten) Grundfunktion

$$\Phi_{ij} = a_{ip} a_{jq} A_{pq} - \lambda (a_{ip} a_{jp} - \delta_{ij}) \quad (3)$$

aus und bildet: $\partial \Phi_{11} / \partial a_{1k} = \dots = \partial \Phi_{33} / \partial a_{3k} = 0_k$, d.h.:

$$\frac{\partial \Phi_{(rr)}}{\partial a_{(r)k}} \stackrel{!}{=} 0_{rk} \Rightarrow \boxed{(A_{ij} - \lambda_{(r)} \delta_{ij}) a_{(r)j} = 0_{ri}} \quad (4)$$

mit drei charakteristischen Zahlen $\lambda_{(1)} \equiv \lambda_I$ usw. und drei Eigenvektoren $n_i^{(1)} \equiv n_i^I, \dots, n_i^{(3)} \equiv n_i^{III}$, wobei

$$\boxed{n_i^{(r)} = (a_{r1}, a_{r2}, a_{r3})} \quad (5)$$

der r -te Zeilenvektor in der Matrix a_{ij} ist. Da in einer *orthonormierten Matrix* Zeilen-(oder Spalten-) vektoren paarweise orthogonal sind, stehen die Eigenvektoren paarweise aufeinander senkrecht.

Man erhält das charakteristische Gleichungssystem (4) auch, wenn man in (3) die Elemente Φ_{12}, Φ_{23} und Φ_{31} gleich null setzt [BETTEN, 1987].

Ü 5.2.4

Die Quadratische Form in X_{ij} lautet:

$$F=F(\mathbf{X}) = A_{ijkl} X_{ij} X_{kl} . \quad (1)$$

Darin sind A_{ijkl} die Koordinaten eines Tensors \mathbf{A} vierter Stufe.

Gesucht sind Bedingungen für das "stationäre Verhalten". Dabei sind die "Nebenbedingungen"

$$L = \delta_{ij} \delta_{kl} X_{ij} X_{kl} - S_1^2 = 0 , \quad (2a)$$

$$M = (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) X_{ij} X_{kl} - 2 S_2 = 0 , \quad (2b)$$

$$N = \left(\delta_{jk} \delta_{p\ell} + \delta_{j\ell} \delta_{pk} \right) \frac{X_{ip}}{X_{qq}} X_{ij} X_{k\ell} - 2 \frac{S_3}{S_1} = 0 \quad (2c)$$

zu erfüllen. Die *Integritätsbasis* ist durch $S_1 = \text{tr} \mathbf{X}$, $S_2 = \text{tr} \mathbf{X}^2$, $S_3 = \text{tr} \mathbf{X}^3$ gegeben. Die "modifizierte" quadratische Form lautet:

$$\Phi = F - \lambda L - \mu M - \nu N \stackrel{!}{=} \text{Extremum} \quad (3)$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_{rs}} \stackrel{!}{=} 0_{rs} \Rightarrow \left(A_{ijk\ell} - I_{ijk\ell} \right) X_{k\ell} = \nu \left(\frac{3}{S_1} X_{ij}^{(2)} - \frac{S_3}{S_1^2} \delta_{ij} \right)$$

mit dem *isotropen Tensor* $I_{ijk\ell} = \lambda \delta_{ij} \delta_{k\ell} + \mu (\delta_{ik} \delta_{j\ell} + \delta_{il} \delta_{jk})$. Für $\nu = 0$ folgt das homogene lineare Gleichungssystem:

$$\left(A_{ijk\ell} - I_{ijk\ell} \right) X_{k\ell} = 0_{ij} \Rightarrow \det \left(A_{ijk\ell} - I_{ijk\ell} \right) = 0$$

Die Übungen FEM 5.2.1 bis FEM 5.2.4 werden ausführlicher von BETTEN (1987) behandelt.

Ü 5.2.5

Isoperimetrische Probleme lassen sich aufgrund des *EULERSchen Satzes* auf gewöhnliche Variationsaufgaben ohne Nebenbedingungen zurückführen. Der Satz von EULER lautet für obiges Problem (1) mit (2):

Erteilt die Funktion $u(x)$ dem Integral (1) unter der *Nebenbedingung* (2) und den gewöhnlichen Randbedingungen

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b$$

einen *Extremwert* und ist $u(x)$ keine *Extremale* des Integrals in (2), so existiert eine Konstante λ (*LAGRANGEScher Multiplikator*) derart, dass $u(x)$ eine *Extremale* des Integrals

$$\int_a^b H(x, u, u') dx \quad \text{mit} \quad H := F + \lambda G \quad (3)$$

darstellt.

Zum Beweis dieses Satzes wird zu $u(x)$ analog (5.5) eine *Nachbarfunktion*

$$\tilde{u}(x) = u(x) + \varepsilon_1 \eta_1(x) + \varepsilon_2 \eta_2(x) \quad (4)$$

eingeführt. Darin sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ kleine Parameter und $\eta_1(x), \eta_2(x)$ Funktionen, die in den Randpunkten des Integrationsintervalls verschwinden sollen. In (1) wird die

Lösungsfunktion $u(x)$ durch die Nachbarfunktion (4) ersetzt. Somit erhält man analog (5.7) eine Funktion

$$\tilde{J}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_a^b F(x, u + \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2, u' + \varepsilon_1 \eta'_1 + \varepsilon_2 \eta'_2) dx, \quad (5)$$

die für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ stationär sein muss im Vergleich mit allen (absolut genommen) hinreichend kleinen Werten ε_1 und ε_2 , für die

$$\tilde{K}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_a^b G(x, u + \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2, u' + \varepsilon_1 \eta'_1 + \varepsilon_2 \eta'_2) dx = \ell \quad (6)$$

wird. Nach der LAGRANGESchen Multiplikatorenmethode und mit Erweiterung von (5.8) muss somit gefordert werden:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} [\tilde{J}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \lambda \tilde{K}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)] \right)_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} \stackrel{!}{=} 0, \quad (7a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} [\tilde{J}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \lambda \tilde{K}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)] \right)_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} \stackrel{!}{=} 0. \quad (7b)$$

Daraus können analog (5.23) die Integrale

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \lambda \left[\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial u'} \right) \right] \right\} \eta_k dx = 0; \quad k = 1, 2 \quad (8a)$$

bzw.

$$\int_a^b \left[\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial u'} \right) \right] \eta_k dx = 0 \quad \text{mit} \quad H := F + \lambda G \quad (8b)$$

gefolgt werden, so dass wegen der Willkür von η_k und aufgrund des Fundamentallemmas analog (5.21a) die EULERSche Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial u'} \right) = 0 \quad \text{mit} \quad H := F + \lambda G} \quad (9)$$

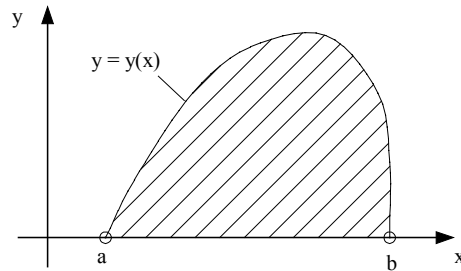
notwendig erfüllt sein muss.

Im allgemeinen Integral der EULERSchen Differentialgleichung (9) tritt außer den beiden Integrationskonstanten noch der LAGRANGESche Multiplikator λ auf.

Diese drei Parameter sind aus den *Randbedingungen* und der *Nebenbedingung* (2) zu bestimmen.

Ü 5.2.6

Zweckmäßigerweise legt man die beiden Punkte auf die x-Achse mit den Koordinaten $P(a,0)$ und $Q(b,0)$, wie in der Skizze angedeutet.



Den zu optimierenden Flächeninhalt kann man durch das *Funktional*

$$J[y(x)] = \int_a^b y \, dx = \text{Maximum} \quad (1)$$

darstellen, wobei als *Nebenbedingung*

$$\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, dx = \ell = \text{const.} \quad (2)$$

gefordert wird mit $\ell > b - a$. Mithin liegt ein *isoperimetrisches Problem* vor, das nach Ü 5.2.5 durch die *EULERSche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{mit} \quad H := F + \lambda G \quad (3)$$

charakterisiert wird, wobei

$$H(y, y') = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \quad (4)$$

gilt. Damit erhält man

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial y'} = \lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

und nach einigen Umformungen die *EULERSche Differentialgleichung*

$$(1 + y'^2)^{3/2} = \lambda y'' \equiv \lambda \frac{dy'}{dx}.$$

Trennung der Veränderlichen (x, y') führt auf:

$$dx = \frac{\lambda dy'}{(1+y'^2)^{3/2}} \Rightarrow x - A = \lambda \int \frac{dy'}{(1+y'^2)^{3/2}} = \lambda \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}. \quad (5a)$$

Die Beziehung (5a) löst man nach y' auf,

$$y' = \frac{x - A}{\sqrt{\lambda^2 - (x - A)^2}}, \quad (5b)$$

und erhält unmittelbar durch Integration:

$$y = \int \frac{x - A}{\sqrt{\lambda^2 - (x - A)^2}} dx = -\sqrt{\lambda^2 - (x - A)^2} + B$$

oder die Darstellung:

$$\boxed{(x - A)^2 + (y - B)^2 = \lambda^2}. \quad (6)$$

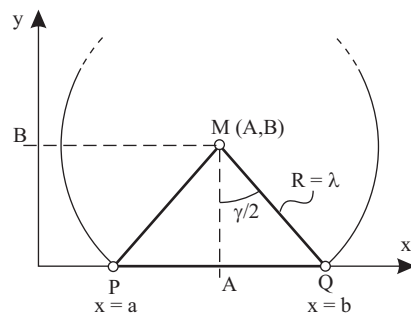
Das Ergebnis ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt (A, B) und dem Radius λ . Die Integrationskonstanten (A, B) ermittelt man aus der Lage der vorgegebenen Punkte $P(a, 0)$ und $Q(b, 0)$ zu:

$$A = (a + b) / 2 \quad \text{und} \quad B = \pm \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}(b - a)^2}. \quad (7a, b)$$

Zur Bestimmung des LAGRANGESchen Multiplikators λ setze man (5b) in die Nebenbedingung (2) ein:

$$\ell = \int_a^b \frac{\lambda dx}{\sqrt{\lambda^2 - (x - A)^2}} = 2\lambda \arcsin \frac{b - a}{2\lambda}, \quad \boxed{\frac{b - a}{2\lambda} = \sin \frac{\ell}{2\lambda}}. \quad (8a, b)$$

Diese transzendente Gleichung in λ kann bei vorgegebener Länge $\ell > b - a$ und je nach Lage der Punkte $P(a, 0)$ und $Q(b, 0)$ bequem mit dem MAPLE-Programm analog Ü3.5.7 gelöst werden.



Die Punkte P und Q bilden mit dem Mittelpunkt $M(A, B)$ des Kreises (6) ein gleichschenkliges Dreieck, aus dem man die Beziehung

$$\boxed{\frac{b - a}{2\lambda} = \sin \frac{\gamma}{2}}$$

entnehmen kann. Darin ist γ der Winkel PMQ, d.h. der Winkel, unter dem die Strecke \overline{PQ} , vom Mittel-

punkt des Kreises aus betrachtet, erscheint. Vergleicht man (9) mit (8b), so erhält man das Ergebnis

$$\boxed{\lambda = \ell/\gamma}$$

Im Grenzfall ist $\gamma = \pi$. Dann ist $\lambda = (b-a)/2$ nach (9) und $B = 0$ nach (7b).

Ü 5.2.7

Nach dem *Prinzip von TORRICELLI* nimmt der Schwerpunkt des Seiles die tiefste Lage ein ($y_s \rightarrow \text{Minimum}$). Nach der ersten *GULDINschen Regel* kann der Schwerpunkt einer ebenen Kurve homogener Massenbelegung bestimmt werden:

$$y_s L = \int_a^b y \, ds. \quad (1)$$

Damit lautet die Variationsaufgabe:

$$y_s L = \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} \, dx \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \quad (2)$$

mit der *Nebenbedingung*

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2} \, dx = L = \text{const.} \quad (3)$$

Mit dem *LAGRANGEschen Multiplikator* λ wird:

$$\int_a^b (F + \lambda G) \, dx \stackrel{!}{=} \text{Minimum}, \quad (4)$$

und gemäß Ü 5.2.5 lautet die *EULERSche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{mit} \quad H := F + \lambda G, \quad (5)$$

die wegen

$$H = (y + \lambda) \sqrt{1+y'^2} = H(y, y') \quad (6)$$

nach Gl. (4) der Übung 5.1.1 auf das *erste Integral*

$$\boxed{H(y, y') - y' \frac{\partial H(y, y')}{\partial y'} = C_1} \quad (7)$$

führt, woraus man wegen (6) folgende Differentialgleichung erhält:

$$\eta' = \frac{1}{C_1} \sqrt{\eta^2 - C_1^2} \quad \text{mit} \quad \eta \equiv \lambda + y. \quad (8)$$

Wegen $\eta' = d\eta / dx$ folgt durch Trennung der Veränderlichen und anschließender Integration:

$$dx = \frac{C_1 d\eta}{\sqrt{\eta^2 - C_1^2}} \Rightarrow \frac{x + C_2}{C_1} = \operatorname{arcosh} \frac{\eta}{C_1}.$$

Mithin erhält man die *Kettenlinie*

$$\boxed{\eta \equiv y + \lambda = C_1 \cosh \frac{x + C_2}{C_1}}. \quad (9)$$

Zur Ermittlung der Integrationskonstanten C_1, C_2 und des *LAGRANGEschen Multiplikators* λ stehen zwei *Randbedingungen* (Skizze in der Aufgabenstellung)

$$y_a + \lambda = C_1 \cosh \frac{a + C_2}{C_1}, \quad y_b + \lambda = C_1 \cosh \frac{b + C_2}{C_1} \quad (10a,b)$$

und die *Nebenbedingung* (3) zur Verfügung, aus der man durch Einsetzen von (9) den Zusammenhang

$$\sinh \frac{b + C_2}{C_1} - \sinh \frac{a + C_2}{C_1} = L / C_1 \quad (11)$$

findet.

Mit (10a,b), (11) steht ein Gleichungssystem zur Bestimmung der drei Größen C_1, C_2, λ zur Verfügung. Legt man ohne Einschränkung der Allgemeinheit den Punkt P in den Koordinatenursprung ($a = 0, y_a = 0$) und den Punkt Q in ($b = 1, y_b = 1$), so geht das Gleichungssystem (10a,b), (11) über in:

$$C_1 \cosh \frac{C_2}{C_1} = \lambda, \quad C_1 \cosh \frac{1 + C_2}{C_1} = 1 + \lambda, \quad \sinh \frac{1 + C_2}{C_1} - \sinh \frac{C_2}{C_1} = \frac{L}{C_1}. \quad (12a,b,c)$$

Für dieses Gleichungssystem findet das MAPLE - Programm V, Release 8, zunächst keine Lösung, obwohl bei Vorgabe einer Länge L die Konstanten bestimmt werden können. Dazu wird das Gleichungssystem (12a,b,c) etwas umgeformt. Setzt man (12a) in (12b) ein, so erhält man mit (12c) die zwei Gleichungen

$$\sinh \frac{1 + C_2}{C_1} - \sinh \frac{C_2}{C_1} = \frac{L}{C_1}, \quad \cosh \frac{1 + C_2}{C_1} - \cosh \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{C_1} \quad (13a,b)$$

in den Unbekannten C_1 und C_2 .

Die Summe und Differenz *hyperbolischer Funktionen* kann man durch Produkte gemäß

$$\sinh \xi \pm \sinh \eta = 2 \sinh \frac{\xi \pm \eta}{2} \cosh \frac{\xi \mp \eta}{2}, \quad (14a)$$

$$\cosh \xi + \cosh \eta = 2 \cosh \frac{\xi + \eta}{2} \cosh \frac{\xi - \eta}{2}, \quad (14b)$$

$$\cosh \xi - \cosh \eta = 2 \sinh \frac{\xi + \eta}{2} \sinh \frac{\xi - \eta}{2} \quad (14c)$$

ausdrücken. Mit (14a) geht (13a) über in:

$$\sinh \frac{1}{2C_1} \cosh \frac{1+2C_2}{2C_1} = \frac{L}{2C_1}. \quad (15a)$$

Entsprechend wendet man (14c) auf (13b) an und erhält:

$$\sinh \frac{1}{2C_1} \sinh \frac{1+2C_2}{2C_1} = \frac{1}{2C_1}. \quad (15b)$$

Dividiert man (15b) durch (15a), so folgt weiter:

$$\boxed{\tanh \frac{1+2C_2}{2C_1} = \frac{1}{L}}. \quad (16)$$

Setzt man (15a,b) in die Beziehung

$$\left(\cosh \frac{1+2C_2}{2C_1} \right)^2 - \left(\sinh \frac{1+2C_2}{2C_1} \right)^2 = 1 \quad (17)$$

ein, so findet man die *transzendente Gleichung*

$$\boxed{2C_1 \sinh \frac{1}{2C_1} = \sqrt{L^2 - 1}}, \quad (18)$$

aus der man mit Hilfe der MAPLE - Software die Konstante C_1 bei vorgegebener Länge L bestimmen kann. Anschließend wird dieser Wert in (16) zur Bestimmung von C_2 eingesetzt:

$$\boxed{C_2 = -\frac{1}{2} + C_1 \operatorname{artanh} \frac{1}{L}}. \quad (19)$$

Mit den so ermittelten Konstanten C_1 und C_2 kann der *LAGRANGEsche Multiplikator* unmittelbar gemäß (12a) berechnet werden:

$$\boxed{\lambda = C_1 \cosh \frac{C_2}{C_1}}. \quad (12a)$$

In der beschriebenen Reihenfolge $\{(18), (19), (12a)\}$ kann das MAPLE - Programm aufgestellt werden. Alternativ kann auch das Gleichungssystem $\{(16), (18), (12a)\}$ gleichzeitig eingegeben werden, wie der folgende *Output* am Beispiel $L = 2$ zeigt.

```
>eqns:={2*C[1]*sinh(1/2/C[1])=sqrt(2^2-1), tanh((1+2*C[2])/2/C[1])=1/2,
>C[1]*cosh(C[2]/C[1])=lambda};
```

$$eqns := \left\{ \tanh\left(\frac{1}{2} \frac{1 + 2 C_2}{C_1}\right) = \frac{1}{2}, C_1 \cosh\left(\frac{C_2}{C_1}\right) = \lambda, 2 C_1 \sinh\left(\frac{1}{2} \frac{1}{C_1}\right) = \sqrt{3} \right\}$$

```
>vars:={C[1],C[2],lambda};
```

```
>fsolve(eqns,vars);
```

$$\left\{ \lambda = .5445360421, C_2 = -.3564516243, C_1 = .2613267250 \right\}$$

Mit den so ermittelten Konstanten kann die Kettenlinie gezeichnet werden:

```
>y:=-lambda+C[1]*cosh((x+C[2])/C[1]);
```

$$y := -\lambda + C_1 \cosh\left(\frac{x + C_2}{C_1}\right)$$

```
> y:=subs(lambda=0.544536,C[1]=0.261327, C[2]=-0.356452,");
```

$$y := -.544536 + .261327 \cosh(3.826623349 x - 1.364007546)$$

In der nachstehenden Tabelle sind weitere Beispiele, die mit dem MAPLE - Programm gerechnet worden sind, aufgelistet.

L	1,45	1,4958	2	$\sqrt{5}$
C_1	0,91964	0,61876	0,26133	0,22964
C_2	0,27921	0	-0,3565	-0,3895
λ	0,96235	C_1	0,54454	0,64713

Mit diesen Parametern sind die *Kettenlinien* (9) verschiedener Längen mit Hilfe der *MAPLE - Grafik* im nachstehenden Bild dargestellt.

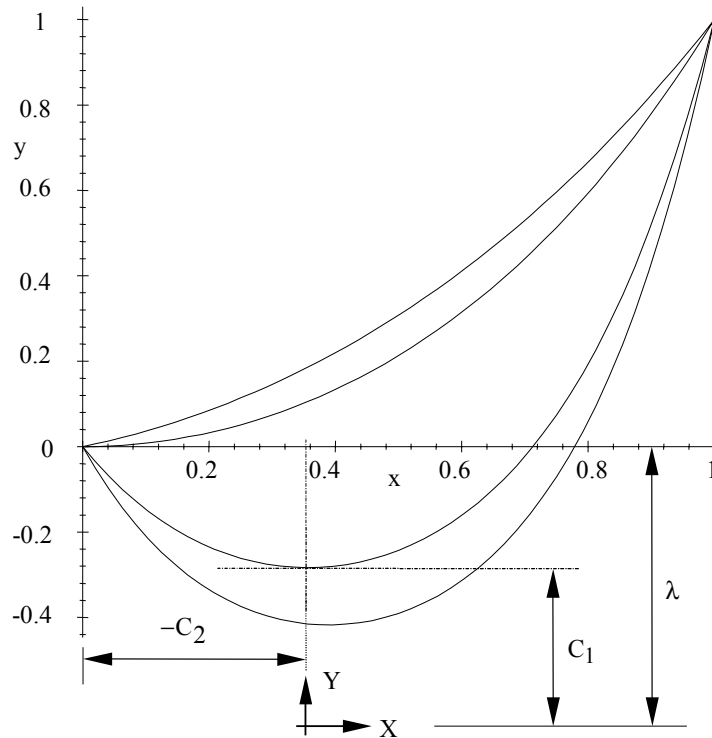
Für die Kettenlinie der Länge $L = 2$ sind zusätzlich die Parameter C_1, C_2, λ eingetragen, die das Minimum festlegen und ein neues Koordinatensystem (X,Y) bestimmen, in dem die Kettenlinie (9) in der einfachen Form

$$Y = \cosh X \quad (20)$$

ausgedrückt werden kann. Das Minimum fällt in den Koordinatenursprung ($x = 0$, $y = 0$) für $C_2 = 0$ und $C_1 = \lambda$. Damit ergibt sich eine spezielle Länge von $L = 1,4958$, die auch in obiger Tabelle eingetragen ist und gemäß

$$L = \sqrt{1 + 2C_1} \quad (21)$$

einfach bestimmt werden kann. Diese Beziehung findet man aus (16) und (18) für $C_2 = 0$.



Die Kettenlinie (9) kann auch folgendermaßen hergeleitet werden. Aus nachstehender Skizze folgen die Gleichgewichtsbedingungen am Seilelement ds :

$$\frac{dH}{ds} + q_x = 0,$$

$$\frac{dV}{ds} + q_y = 0. \quad (22a,b)$$

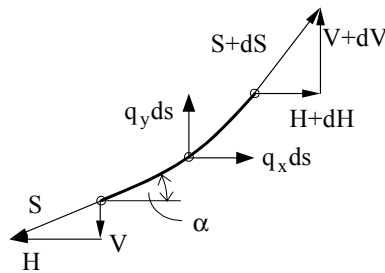
Aus der Skizze liest man folgende Beziehungen ab:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (23a)$$

$$\text{und } y' = \tan \alpha = V / H. \quad (23b)$$

Für ein *homogenes Seil* konstanten Querschnitts unter Eigengewicht

($q_x = 0, q_y = -q$) ohne Windkraftbelastung



etc. folgt aus (22a), dass der *Horizontalzug* H konstant ist, während (22b) in $dV/ds = q$ übergeht. Mithin erhält man aus (23a,b) folgende Differentialgleichung:

$$\left. \begin{aligned} y' = V/H &\Rightarrow y'' = \frac{1}{H} \frac{dV}{dx} = \frac{1}{H} \frac{dV}{ds} \frac{ds}{dx}, \\ y'' &= \frac{q}{H} \sqrt{1+y'^2}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

die durch Trennung der Veränderlichen (x, y') gelöst wird:

$$\begin{aligned} \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} &= \frac{q}{H} x \Rightarrow \operatorname{arsinh} y' = \frac{q}{H} x + k_1 \\ &\Downarrow \\ y' &= \sinh\left(\frac{q}{H} x + k_1\right). \end{aligned}$$

Eine weitere Integration führt unmittelbar auf die *Kettenlinie*

$$\boxed{y + k_2 = \frac{H}{q} \cosh \frac{x + C_2}{H/q}}. \quad (25)$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit (9), so erkennt man: $k_2 \equiv \lambda$ und insbesondere: $C_1 \equiv H/q$. Damit kann die Konstante C_1 mechanisch gedeutet werden. Der *Horizontalzug* ergibt sich bei gegebenem Wert q mit der Konstanten C_1 aus obiger Tabelle zu

$$\boxed{H = qC_1} \quad (26)$$

und damit der *Vertikalzug* V zu

$$\boxed{V = Hy' = H \sinh \frac{x + C_2}{H/q}}. \quad (27)$$

Darin ist die Konstante C_2 obiger Tabelle zu entnehmen. Schließlich erhält man die Zugkraft selbst zu:

$$S = \sqrt{H^2 + V^2} = H\sqrt{1+y'^2} = H \cosh \frac{x + C_2}{C_1}. \quad (28)$$

Für eine flach durchhängende Kette muss das Argument in der *Hyperbelfunktion* (25) klein sein, d.h.: $H/q \gg 1$. Mithin hat ein *flacher Durchhang* immer einen großen *Horizontalzug* zur Folge. Weiterhin kann dann die *Kettenlinie* (25) durch eine *quadratische Parabel* angenähert werden, wie man der Reihenentwicklung der *Hyperbelfunktion* entnimmt.

Ü 5.2.8

Mit dem veränderlichen Flächenträgheitsmoment $I(x) = \frac{\pi}{4} r^4(x)$ und dem Biegemoment (1) erhält man nach der elementaren Biegetheorie folgende Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$w'' \approx \kappa = \frac{M_y}{EI} = -\frac{4}{\pi} \frac{P}{E} \frac{x}{r^4(x)} . \quad (2)$$

Zu beachten sind die Randbedingungen

$$w(\ell) = 0 \quad \text{und} \quad w'(\ell) = 0. \quad (3a,b)$$

Damit erhält man durch Integration von (2):

$$w'(x) = -\frac{4}{\pi} \frac{P}{E} \int_{\ell}^x \frac{\xi}{r^4(\xi)} d\xi . \quad (4)$$

Mit $w(\ell) = 0$ gilt:

$$w(x) = \int_{\ell}^x w'(\eta) d\eta . \quad (5)$$

Die größte Durchbiegung erfährt der Kragbalken an der Stelle $x = 0$ in Richtung der Kraft P :

$$-w(0) = \int_0^{\ell} w'(x) dx = \frac{4}{\pi} \frac{P}{E} \int_0^{\ell} \left\{ \int_x^{\ell} \frac{\xi}{r^4(\xi)} d\xi \right\} dx . \quad (6)$$

Darin wird auf das äußere Integral die partielle Integration

$$\int_0^{\ell} u'v dx = uv \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} u v' dx \quad (7)$$

angewendet, wobei $u' \equiv 1$ und $v \equiv \int_x^{\ell} \frac{\xi}{r^4(\xi)} d\xi$ betrachtet wird. Mit $v' = -\frac{x}{r^4(x)}$

erhält man somit aus (6) und (7):

$$-\frac{\pi}{4} \frac{E}{P} w(0) = \left\{ x \int_x^{\ell} \frac{\xi}{r^4(\xi)} d\xi \right\}_{x=0}^{\ell} + \int_0^{\ell} \frac{x^2}{r^4(x)} dx .$$

Wenn man die Grenzen einsetzt, verschwindet der erste Term auf der rechten Seite, so dass die Durchbiegung am freien Ende des Kragbalkens $[-w(0)]$ aus

$$-\frac{\pi E}{4 P} w(0) = \int_0^{\ell} \frac{x^2}{r^4(x)} dx \quad (8)$$

ermittelt werden kann. Darin soll nach Aufgabenstellung $r(x)$ so gefunden (*variiert*) werden, dass $w(0)$ möglichst klein bleibt bei vorgegebenem "Bauvolumen" des Balkens. Mithin lautet die *Variationsaufgabe*:

$$\int_0^{\ell} \frac{x^2}{r^4(x)} dx \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \quad (9)$$

mit der *Nebenbedingung* (konstantes Volumen)

$$\int_0^{\ell} r^2(x) dx = V / \pi = \text{const.} \quad (10)$$

Somit geht die *EULERSche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial r'} \right) = 0 \quad \text{mit} \quad H = \frac{x^2}{r^4(x)} + \lambda r^2(x) \quad (11)$$

über in:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{x^2}{r^4(x)} + \lambda r^2(x) \right] = -4x^2 r^{-5} + 2\lambda r = 0,$$

so dass folgt:

$$r^6 = 2x^2 / \lambda. \quad (12)$$

Zur Bestimmung von λ setze man (12) in die Nebenbedingung (10) ein:

$$\lambda = \frac{54}{125} \left(\frac{\pi}{V} \right)^3 \ell^5. \quad (13)$$

Damit erhält man aus (12) schließlich als Ergebnis eine *kubische Parabel*:

$$\boxed{r(x) = \sqrt[3]{\frac{5V}{3\pi\ell} \left(\frac{x}{\ell} \right)^{1/3}}}. \quad (14)$$

In dieser Aufgabe vereinfacht sich die *EULERSche Differentialgleichung* (11) zu einer algebraischen Gleichung (12), da die *Grundfunktion* $H = H(x, r)$ in (11) die Ableitung r' nicht enthält.

Ü 5.4.1

Für ein *Funktional* der Form

$$J[u(x, y)] = \iint F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy \quad (5.57)$$

gilt die *EULERSche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right) = 0 \quad (5.64)$$

(mit $u' \equiv \partial u / \partial x$ und $\dot{u} \equiv \partial u / \partial y$), die man unmittelbar für a) und b) ansetzen kann:

$$\text{a)} \quad F = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \equiv u'^2 + \dot{u}^2. \quad (1)$$

Aus (1) ergibt sich:

$$\partial F / \partial u' = 2u' \equiv 2 \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{und} \quad \partial F / \partial \dot{u} = 2\dot{u} \equiv 2 \frac{\partial u}{\partial y},$$

und somit geht (5.64) über in die *LAPLACESche Differentialgleichung*:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv \Delta u = 0}. \quad (2)$$

$$\text{b)} \quad F = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2u f \equiv u'^2 + \dot{u}^2 + 2u f. \quad (3)$$

Aus (3) ergibt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2f, \quad \frac{\partial F}{\partial u'} = 2u' \equiv 2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = 2\dot{u} \equiv 2 \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Somit geht die *EULERSche Differentialgleichung* (5.64) über in die *POISSONSche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\Delta u = f(x, y)}. \quad (4)$$

c) In diesem Beispiel kommen höhere Ableitungen vor, so dass man von der *EULERSchen Differentialgleichung*

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{u}} \right) = 0 \quad (5.66)$$

ausgehen muss. Wegen

$$F = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \equiv (u'')^2 + (\ddot{u})^2 + 2(\dot{u}')^2 \quad (5)$$

gilt im Einzelnen:

$$\frac{\partial F}{\partial u''} = 2u'' \equiv 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{u}'} = 4\dot{u}' \equiv 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad (6a,b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{u}} = 2\ddot{u} \equiv 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (6c)$$

so dass damit die EULERSche Differentialgleichung (5.66) übergeht in die *Bipotentiale Gleichung*

$$\boxed{\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \equiv \Delta \Delta u = 0}, \quad (7)$$

die z.B. in der Elastizitätstheorie ebener Probleme eine fundamentale Rolle spielt. Darin ist $u = u(x, y)$ die *AIRYSche Spannungsfunktion* [BETTEN, 2001].

Ü 5.4.2

Da $(\Delta u)^2$ mit dem Integranden von Ü5.4.1c übereinstimmt, kann man das Ergebnis $\Delta \Delta u = 0$ aus Ü5.4.1c verwenden. Es kommt jedoch der Term $\partial F / \partial u$ aus (5.66) hinzu, der wegen (1) gemäß

$$\partial F / \partial u = -2f(x, y) \quad (2)$$

zu berücksichtigen ist, so dass in Ergänzung zum Ergebnis (7) aus Ü5.4.1c schließlich die *EULERSche Differentialgleichung*

$$\boxed{\Delta \Delta u = f(x, y)} \quad (3)$$

folgt, die beispielsweise in der *KIRCHHOFFschen Plattentheorie* als *Plattengleichung* bezeichnet wird. Darin ist $u = u(x, y)$ die *Durchbiegungsfläche*, während in $f(x, y) \equiv p(x, y)/N$ die *Druckbelastung* $p = p(x, y)$ und die *Plattensteifigkeit* $N := Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ einer isotropen linearelastischen Platte (Elastizitätsmodul E , Querkonzentrationszahl ν) der Dicke h eingeht.

Als weiteres Beispiel zu (3) sei die *AIRYSche Spannungsfunktion* erwähnt mit $f(x, y) = -(1 - \nu)\Delta \kappa$ bei *ebenem Spannungszustand* und

$f(x, y) = -(1 - 2\nu) \Delta \kappa / (1 - \nu)$ bei *ebenem Verzerrungszustand*. Darin sind ν die elastische Querkontraktionszahl und κ das Potentialfeld der Volumenkraft $\mathbf{k} = -\text{grad } \kappa$. Falls die Volumenkraft keine Ortsfunktion ist oder die Divergenz $\text{div } \mathbf{k}$ verschwindet, gilt $\Delta \kappa = 0$, d.h., κ ist dann eine *harmonische Funktion*, und die rechte Seite in (3) verschwindet, so dass die *AIRYSche Spannungsfunktion biharmonisch* wird. Bei fehlender Volumenkraft genügt die *AIRYSche Spannungsfunktion* $F = F(x, y)$ erst recht einer *Bipotentialgleichung* ($\Delta \Delta F = 0$) und ist dann *biharmonisch*.

Ü 5.4.3

Gesucht ist die Differentialgleichung einer Funktion $u(x, y)$, die das *Funktional* (1) *extremal* macht. Dazu muss gemäß (5.59) die *erste Variation* notwendigerweise verschwinden. Der *Variationsoperator* δ wirkt nur auf die Funktion $u(x, y)$ und deren Ableitungen, nicht jedoch auf die gegebenen Koeffizientenfunktionen $k_x(x, y)$, \dots , $g_x(x, y)$ und $p(s)$, $q(s)$. Somit wird:

$$\begin{aligned} \delta J[u(x, y)] = & \iint_B \left[k_x \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial u}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - f \delta u - g u \delta u \right] dx dy + \\ & + \int [p(s) \delta u + q(s) u \delta u] \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Im nächsten Zwischenschritt können die Rechenregeln

$$\delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) \quad \text{und} \quad \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) \quad (5.15a)$$

benutzt und danach die ersten beiden Gebietsintegrale in (2) analog (5.60) folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} & \iint_B \left[\left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) \right] dx dy = \\ & = \iint_B \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta u \right] \right\} dx dy - \\ & - \iint_B \delta u \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (3)$$

Darin kann das erste Gebietsintegral auf der rechten Seite mit Hilfe der *GREENschen Formel*

$$\iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_S P dx + Q dy \quad (5.61a)$$

und den Substitutionen

$$k_y \frac{\partial u}{\partial y} \delta u \equiv -P, \quad k_x \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \equiv Q \quad (4a,b)$$

gemäß

$$\iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_S \delta u \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} dy - k_y \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) \quad (5)$$

ausgedrückt werden. Mit (3) und (5) folgt schließlich aus (2) die Forderung:

$$\begin{aligned} & \iint_B \delta u \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f(x, y) + g(x, y)u \right] dx dy - \\ & - \int_S \delta u \left[k_x \frac{\partial u}{\partial x} dy - k_y \frac{\partial u}{\partial y} dx \right] - \int_S \delta u [p(s) + q(s)u] ds \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Darin können die beiden Linienintegrale wegen $dx = -n_y ds$ und $dy = n_x ds$ nach Bild 5.3 zu einem Integral zusammengefasst werden, das aufgrund der Forderung (6) verschwinden muss:

$$\int_S \delta u \left[k_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y + p(s) + q(s)u \right] ds \stackrel{!}{=} 0. \quad (7)$$

Nimmt man an, dass auf einem Teilstück S_1 des Randes S die *DIRICHLETSche Randbedingung*

$$\boxed{u = U(s) \quad \text{auf} \quad S_1} \quad (8)$$

gegeben ist, so muss auf diesem Teilstück $\delta u = 0$ sein, so dass sich aus (7) keine weitere Bedingung auf S_1 ergibt. Auf dem Teilstück $S_2 = S - S_1$ sind jedoch Variationen δu der Feldgröße u zulässig, so dass dann (7) nur erfüllt werden kann, wenn die *natürliche Randbedingung*

$$\boxed{k_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y + p(s) + q(s)u = 0 \quad \text{auf} \quad S_2} \quad (9)$$

erfüllt ist. Diese Bedingung wird auch als *CAUCHYsche Randbedingung* bezeichnet.

Aus der Forderung (6) kann ferner gefolgert werden, dass die eckige Klammer im Integranden des Gebietsintegrals verschwinden muss, da die Variation $\delta u(x,y)$ innerhalb des Gebietes B beliebig ist:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + g(x,y)u = -f(x,y)} \quad (10)$$

Damit ist die *EULERSche Differentialgleichung* aufgestellt, die eine *notwendige Bedingung* dafür darstellt, dass das gegebene Funktional (1) *extremal* wird.

Bemerkenswert ist, dass bei der Formulierung der *Randwertaufgabe* durch (10) mit (8) die *natürliche Randbedingung* (9) nicht angegeben wird. Sie ist implizit im Randintegral des *Funktional*s (1) enthalten und wird automatisch von der Lösungsfunktion erfüllt. Darin zeigt sich der Vorteil der Formulierung der Randwertaufgabe durch das *Extremalprinzip*, d.h., man braucht auf diese Weise nur die bedeutend einfachere *DIRICHLETSche Randbedingung* (8) zu berücksichtigen, die man auch als *Zwangsbedingung*, als *wesentliche Randbedingung* oder je nach Problem auch als *geometrische Randbedingung* bezeichnet.

Im Folgenden seien einige *Sonderfälle* erwähnt.

Stationäre anisotrope Wärmeleitung (Ü7.2.11)

$k_x \equiv \lambda_x, k_y \equiv \lambda_y \hat{=}$ Wärmeleitzahlen in den Hauptrichtungen x,y , $g(x,y) \equiv 0$,

$f(x,y) \equiv \dot{q}_E \hat{=}$ spezifische Ergiebigkeit der Wärmequelle,

$u(x,y) \equiv T(x,y) \hat{=}$ gesuchtes Temperaturfeld.

HELMHOLTZ-Gleichung

Für $k_x = k_y = 1$ und $f = 0$, $g = \lambda^2$ erhält man aus (10) die *HELMHOLTZsche Differentialgleichung*

$$\boxed{\Delta u + \lambda^2 u = 0}, \quad (11)$$

die beispielsweise die *Amplitudenfunktion* $u = u(x,y)$ einer gemäß $w = u \exp(i\omega t)$ harmonisch schwingenden vorgespannten Membran liefert. Die Eigenwerte sind λ_n ($n = 1, 2, \dots$), die zugehörigen Lösungen sind u_n . Es gilt:

$$\lambda^2 = \rho h \omega^2 / S \quad \text{bzw.} \quad \omega = \lambda \sqrt{S / \rho h}. \quad (12)$$

Darin sind S die nach allen Richtungen gleiche Vorspannung, ρ die Dichte und h die Membrandicke. Die HELMHOLTZ-Gleichung ist auch grundlegend zur Untersuchung von *Flachwasserwellen*.

POISSON-Gleichung

Für $k_x = k_y = 1$ und $f \neq 0$, $g = 0$ geht (10) über in die *POISSONsche Differentialgleichung*

$$\boxed{\Delta u = -f(x, y)}, \quad (13)$$

die beispielsweise gemäß (7.39) die *Torsionsfunktion* $u \equiv \Phi = \Phi(x, y)$ eines Stabes liefert. Mit $f(x, y) = p(x, y)/S$ liefert (13) die Durchbiegungsfläche $u(x, y) \equiv w(x, y)$ einer *Membran* (\rightarrow Membrangleichnis). Ersetzt man darin die Druckverteilung $p(x, y)$ durch die *Trägheitskraft* $-\rho h \ddot{w}$, so geht die POISSON-Gleichung $\Delta w = \rho h \ddot{w}$ mit dem Ansatz für zeitlich *harmonische Schwingungen* $w = u \exp(i\omega t)$ in die *HELMHOLTZ-Gleichung* (11) mit (12) über.

LAPLACE-Gleichung

Schließlich ist auch die *LAPLACEsche Differentialgleichung* $\Delta u = 0$ für $k_x = k_y = 1$ und $f = g = 0$ als Sonderfall in (10) enthalten.

Lösungen der Übungsaufgaben, Kapitel 6

Ü 6.1.1

a) In *Matrizenschreibweise* lautet das *Gesamtpotential*:

$$\Pi = U + \Pi_a = \frac{1}{2} \{u\}^t [K] \{u\} - \{u\}^t \{P\}. \quad (6.12)$$

Gesucht ist:

$$\partial \Pi / \partial \{u\} \stackrel{!}{=} \{0\} \Rightarrow [K] \{u\} = \{P\}. \quad (6.13)$$

Es müssen also folgende Ableitungen gebildet werden:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \{u\}^t [K] \{u\}}{\partial \{u\}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \{u\}^t \{P\}}{\partial \{u\}}.$$

Das Matrizenprodukt $[K] \{u\}$ liefert die Spaltenmatrix

$$[K] \{u\} = \begin{Bmatrix} K_{11}u_1 + K_{12}u_2 + \dots + K_{1n}u_n \\ K_{21}u_1 + K_{22}u_2 + \dots + K_{2n}u_n \\ \vdots \\ K_{n1}u_1 + K_{n2}u_2 + \dots + K_{nn}u_n \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Darin ist n die Anzahl der Freiheitsgrade. Durch weitere Matrizenmultiplikation erhält man die im gesamten System gespeicherte *Verzerrungsenergie* U gemäß:

$$2U = \{u\}^t [K] \{u\} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} 2U = & K_{11}u_1^2 + (K_{12} + K_{21})u_1u_2 + (K_{13} + K_{31})u_1u_3 + \dots \\ & + (K_{1n} + K_{n1})u_1u_n + \dots + (K_{pq} + K_{qp})u_pu_q + \dots + K_{nn}u_n^2. \end{aligned} \quad (2b)$$

Daraus ermittelt man die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial u_1} &= K_{11}u_1 + \frac{1}{2}(K_{12} + K_{21})u_2 + \dots + \frac{1}{2}(K_{1n} + K_{n1})u_n \\
\frac{\partial U}{\partial u_2} &= \frac{1}{2}(K_{21} + K_{12})u_1 + K_{22}u_2 + \dots + \frac{1}{2}(K_{2n} + K_{n2})u_n \\
&\vdots \\
\frac{\partial U}{\partial u_n} &= \frac{1}{2}(K_{n1} + K_{1n})u_1 + \frac{1}{2}(K_{n2} + K_{2n})u_2 + \dots + K_{nn}u_n
\end{aligned}$$

Jede dieser Ableitungen kann folgendermaßen aufgespalten werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial u_1} &= \frac{1}{2}(K_{11}u_1 + K_{12}u_2 + \dots + K_{1n}u_n) + \frac{1}{2}(K_{11}u_1 + K_{21}u_2 + \dots + K_{n1}u_n) \\
\frac{\partial U}{\partial u_2} &= \frac{1}{2}(K_{21}u_1 + K_{22}u_2 + \dots + K_{2n}u_n) + \frac{1}{2}(K_{12}u_1 + K_{22}u_2 + \dots + K_{n2}u_n) \\
&\vdots \\
\frac{\partial U}{\partial u_n} &= \frac{1}{2}(K_{n1}u_1 + K_{n2}u_2 + \dots + K_{nn}u_n) + \frac{1}{2}(K_{1n}u_1 + K_{2n}u_2 + \dots + K_{nn}u_n)
\end{aligned}$$

so dass man in Matrixform

$$\partial U / \partial \{u\} = \frac{1}{2}[K]\{u\} + \frac{1}{2}[K]^t \{u\} \quad (3)$$

erhält. Da die Steifigkeitsmatrix symmetrisch ist ($[K] = [K]^t$), folgt schließlich:

$$\boxed{\partial U / \partial \{u\} = [K]\{u\}} \quad (4)$$

Die Ableitung des Potentials der äußeren Lasten ist einfacher:

$$-\partial \Pi_a / \partial \{u\} = \frac{\partial \{u\}^t \{P\}}{\partial \{u\}} = \begin{Bmatrix} -\partial \Pi_a / \partial u_1 \\ -\partial \Pi_a / \partial u_2 \\ \vdots \\ -\partial \Pi_a / \partial u_n \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Wegen

$$\{u\}^t \{P\} = u_1 P_1 + u_2 P_2 + \dots + u_n P_n \quad (6)$$

wird

$$-\partial \Pi_a / \partial u_1 = P_1, \quad -\partial \Pi_a / \partial u_2 = P_2, \quad \dots, \quad -\partial \Pi_a / \partial u_n = P_n, \quad (7)$$

so dass sich schließlich

$$\boxed{-\partial \Pi_a / \partial \{u\} = \{P_1 \quad P_2 \dots P_n\}^t = \{P\}} \quad (8)$$

ergibt. Somit lautet das gesuchte Ergebnis:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{u\}} = [K]\{u\} - \{P\} \stackrel{!}{=} \{0\} \Rightarrow \boxed{[K]\{u\} = \{P\}}. \quad (9)$$

b) In der *Indexschreibweise* lautet das *Gesamtpotential*:

$$\Pi = \frac{1}{2} u_i K_{ij} u_j - u_i P_i; \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (10a)$$

Darin wird über Indexpaare von 1 bis zum Freiheitsgrad n summiert (*EINSTEINsche Summationsvereinbarung*). Diese Indizes nennt man *stumm*. Sie können durch andere Indizes ersetzt werden, ohne dass sich am Ergebnis etwas ändert:

$$\Pi = \frac{1}{2} u_p K_{pq} u_q - u_r P_r. \quad (10b)$$

Zu beachten ist, dass Summationsindizes (stumme Indizes) nur *paarweise* auftreten dürfen, damit die Summationsvorschrift eindeutig ist [BETTEN, 1987].

Auf (10b) wendet man die Ableitung nach den Freiheitsgraden u_i an:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = \frac{1}{2} K_{pq} \left(u_q \frac{\partial u_p}{\partial u_i} + u_p \frac{\partial u_q}{\partial u_i} \right) - P_r \frac{\partial u_r}{\partial u_i}. \quad (11)$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass K_{pq} von u_i unabhängig ist (*lineare Theorie*).

Die äußeren Lasten P_r wirken in den Knotenpunkten während der Verformung von null bis zum Gleichgewichtszustand u_r in voller Größe (*Potentialkräfte*). Wegen

$\partial u_p / \partial u_i = \delta_{pi}$ etc. geht (11) über in:

$$\partial \Pi / \partial u_i = \frac{1}{2} K_{pq} (u_q \delta_{pi} + u_p \delta_{qi}) - P_r \delta_{ri}.$$

Unter Berücksichtigung der *Austauschregel*,

$$K_{pq} \delta_{pi} \equiv K_{iq}, \quad K_{pq} \delta_{qi} \equiv K_{pi}, \quad P_r \delta_{ri} \equiv P_i,$$

folgt weiter:

$$\partial \Pi / \partial u_i = \frac{1}{2} (K_{iq} u_q + K_{pi} u_p) - P_i.$$

Aufgrund der Symmetrie $K_{ip} = K_{pi}$ und nach Austausch stummer Indizes ($K_{iq} u_q \equiv K_{ip} u_p \equiv K_{ij} u_j$) erhält man schließlich analog (9) das gesuchte Ergebnis:

$$\partial \Pi / \partial u_i = K_{ij} u_j - P_i \stackrel{!}{=} 0_i \Rightarrow \boxed{K_{ij} u_j = P_i}. \quad (12)$$

Vergleicht man die Rechenschritte miteinander, so stellt man fest, dass die Indexschreibweise gegenüber der Matrixschreibweise eine wesentliche Erleichterung darstellt und mit weniger Fehlerquellen behaftet ist.

Die zweite Ableitung erhält man aus (12) zu

$$\partial^2 \Pi / \partial u_i \partial u_j = K_{ij}, \quad (13)$$

und da die Steifigkeitsmatrix $[K_{ij}]$ *positiv definit* ist, liegt ein *Minimum* vor.

Ü 6.1.2

Analog (6.9) erhält man für das skizzierte System:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} k_1 u_2^2 + \frac{1}{2} k_2 (u_3 - u_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (u_3 - u_2)^2 + \frac{1}{2} k_4 (u_4 - u_2)^2 \\ & + \frac{1}{2} k_5 (u_4 - u_3)^2 - \sum_{i=2}^4 R_i u_i, \end{aligned} \quad (1)$$

woraus mit der Forderung $\partial \Pi / \partial u_i \stackrel{!}{=} 0, \quad i = 2, 3, 4$, das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0 & \Rightarrow (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) u_2 - (k_2 + k_3) u_3 - k_4 u_4 = R_2 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = 0 & \Rightarrow -(k_2 + k_3) u_2 + (k_2 + k_3 + k_5) u_3 - k_5 u_4 = R_3 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_4} = 0 & \Rightarrow -k_4 u_2 - k_5 u_3 + (k_4 + k_5) u_4 = R_4 \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

folgt, das man durch die *Matrixgleichung*

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) & -(k_2 + k_3) & -k_4 \\ -(k_2 + k_3) & (k_2 + k_3 + k_5) & -k_5 \\ -k_4 & -k_5 & (k_4 + k_5) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} \quad (2b)$$

ausdrücken kann. Das Ergebnis stimmt mit Ü 3.1.5 überein. Die gefundene Matrixgleichung kann symbolisch gemäß

$$\boxed{[K]\{u\} = \{R\}} \quad (2c)$$

ausgedrückt werden.

Das Gesamtpotential (1) kann in der Matrixform

$$\boxed{\Pi = \frac{1}{2} \{u\}^t [K] \{u\} - \{u\}^t \{R\}} \quad (3)$$

angegeben werden, wie man durch Einsetzen der entsprechenden Matrizen aus (2b) leicht überprüfen kann. Aus der Forderung $\partial\Pi/\partial\{u\} \stackrel{!}{=} 0$ erhält man mit (3) die Matrixgleichung (2c). Setzt man diese wiederum in (3) ein, so folgt

$$\Pi = -\frac{1}{2}\{u\}^t \{R\} .$$

Ergänzend sei bemerkt, dass (1) gemäß

$$\Pi = \sum_{i=1}^5 U_i + \sum_{i=2}^4 (\Pi_a)_i \quad (4)$$

geschrieben werden kann. Darin sind U_i die im i -ten Element gespeicherte Verzerungsenergie und $(\Pi_a)_i$ das Potential der äußeren Last im i -ten Knotenpunkt. Die Summe im ersten Term in (4) erstreckt sich über die Anzahl der Elemente, während im zweiten Term über die Anzahl der Knoten summiert wird.

Man beachte die Schlussfolgerungen in Ziffer 6.1 im Anschluss an (6.11) und im Zusammenhang mit den Beispielen in Bild 6.1 und Bild 6.3.

Ü 6.1.3

In den Knotenpunkten ① und ② greifen in horizontaler und vertikaler Richtung Knotenkräfte (P_i, Q_i) an, die eine Längenänderung des Stabes bewirken:

$$e = u_2^* - u_1^* . \quad (1)$$

Darin beziehen sich die gesterntten Größen auf das *lokale Koordinatensystem* (x^*, y^*) .

Hält man zunächst den Knotenpunkt ② fest, dann liest man aus der Skizze die Beziehung

$$u_1^* = a + b \equiv u_1 \cos \alpha + v_1 \sin \alpha \quad (2a)$$

ab. Entsprechend erhält man:

$$u_2^* = u_2 \cos \alpha + v_2 \sin \alpha \quad (2b)$$

und damit:

$$\boxed{e = (u_2 - u_1) \cos \alpha + (v_2 - v_1) \sin \alpha} . \quad (3)$$

Mit der Federkonstante $k = AE/\ell$ des linear-elastischen Stabelementes ergibt sich das Gesamtpotential zu:

$$\boxed{\Pi = \frac{1}{2} k e^2 - P_1 u_1 - Q_1 v_1 - P_2 u_2 - Q_2 v_2} . \quad (4)$$

Setzt man die partiellen Ableitungen nach den Freiheitsgraden (u_1, v_1, u_2, v_2) gleich null, so erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow -k(u_2 - u_1)c^2 - k(v_2 - v_1)cs = P_1 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v_1} &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow -k(u_2 - u_1)cs - k(v_2 - v_1)s^2 = Q_1 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow k(u_2 - u_1)c^2 + k(v_2 - v_1)cs = P_2 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v_2} &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow k(u_2 - u_1)cs + k(v_2 - v_1)s^2 = Q_2\end{aligned}$$

das man in Übereinstimmung mit (3.53) in der Matrizenform

$$\frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ P_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

schreiben kann. Darin sind die Abkürzungen $c \equiv \cos \alpha$ und $s \equiv \sin \alpha$ eingeführt worden.

Ü 6.1.4

Das Fachwerk werde zunächst von den Auflagern befreit. Die Randbedingungen werden später in der Steifigkeitsbeziehung berücksichtigt. Dann ergibt sich das Gesamtpotential analog Ü 6.1.3 zu:

$$\Pi = \frac{1}{2} k_a e_a^2 + \frac{1}{2} k_b e_b^2 + \frac{1}{2} k_c e_c^2 - \sum_{i=1}^3 P_i u_i - \sum_{i=1}^3 Q_i v_i. \quad (1)$$

Darin sind die Stabverlängerungen gemäß Ü 6.1.3 durch

$$e_a = u_2 - u_1, \quad e_c = v_3 - v_1 \quad (2a,c)$$

und

$$e_b = (u_3 - u_2) \cos \alpha_2 + (v_3 - v_2) \sin \alpha_2 = -0,6(u_3 - u_2) + 0,8(v_3 - v_2) \quad (2b)$$

auszudrücken. Mit den Forderungen

$$\boxed{\partial \Pi / \partial u_i \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad \partial \Pi / \partial v_i \stackrel{!}{=} 0, \quad i = 1, 2, 3} \quad (3a,b)$$

erhält man die folgenden sechs *Gleichgewichtsbedingungen*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0 &\Rightarrow -k_a(u_2 - u_1) - P_1 = 0, \\
\frac{\partial \Pi}{\partial v_1} = 0 &\Rightarrow -k_c(v_3 - v_1) - Q_1 = 0, \\
\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0 &\Rightarrow k_a(u_2 - u_1) + k_b[-0,36(u_3 - u_2) + 0,48(v_3 - v_2)] - P_2 = 0, \\
\frac{\partial \Pi}{\partial v_2} = 0 &\Rightarrow k_b[0,48(u_3 - u_2) - 0,64(v_3 - v_2)] - Q_2 = 0, \\
\frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = 0 &\Rightarrow k_b[0,36(u_3 - u_2) - 0,48(v_3 - v_2)] - P_3 = 0, \\
\frac{\partial \Pi}{\partial v_3} = 0 &\Rightarrow k_c(v_3 - v_1) + k_b[-0,48(u_3 - u_2) + 0,64(v_3 - v_2)] - Q_3 = 0,
\end{aligned}$$

die man in Matrizenform folgendermaßen zusammenfassen kann:

$$\begin{bmatrix} k_a & 0 & -k_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 & 0 & -k_c \\ -k_a & 0 & k_a + 0,36k_b & -0,48k_b & -0,36k_b & 0,48k_b \\ 0 & 0 & -0,48k_b & 0,64k_b & 0,48k_b & -0,64k_b \\ 0 & 0 & -0,36k_b & 0,48k_b & 0,36k_b & -0,48k_b \\ 0 & -k_c & 0,48k_b & -0,64k_b & -0,48k_b & k_c + 0,64k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ v_2 = ? \\ u_3 = 0 \\ v_3 = ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 = ? \\ Q_1 = ? \\ P_2 = 0 \\ Q_2 = -Q \\ P_3 = ? \\ Q_3 = 0 \end{bmatrix}^t. \quad (4)$$

Darin sind die gegebenen Randbedingungen eingetragen. Streicht man die Zeilen, in denen $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ und $u_3 = 0$ steht, und die entsprechenden Spalten durch, so erhält man das reduzierte Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} k_a + 0,36k_b & -0,48k_b & 0,48k_b \\ -0,48k_b & 0,64k_b & -0,64k_b \\ 0,48k_b & -0,64k_b & k_c + 0,64k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Q \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5a)$$

Nimmt man an, dass alle Stäbe dieselbe Dehnsteifigkeit AE besitzen, dann wird

$$k_a = AE / 3, \quad k_b = AE / 5, \quad k_c = AE / 4,$$

so dass (5a) übergeht in:

$$\frac{AE}{5} \begin{bmatrix} 6,08/3 & -0,48 & 0,48 \\ -0,48 & 0,64 & -0,64 \\ 0,48 & -0,64 & 7,56/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Q \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5b)$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (5b) erfolgt mit Hilfe des MAPLE - Programms, Release 8, wie der folgende Output zeigt.

```
> solve({(AE/5)*((6.08/3)*u[2]-0.48*v[2]+0.48*v[3])=0 ,
>      (AE/5)*(-0.48*u[2]+0.64*v[2]-0.64*v[3])=-Q ,
>      (AE/5)*(0.48*u[2]-0.64*v[2]+(7.56/4)*v[3])=0 }, {u[2],v[2],v[3]});
      { v2 = -13.500000000  $\frac{Q}{AE}$ , v3 = -4.  $\frac{Q}{AE}$ , u2 = -2.250000001  $\frac{Q}{AE}$  }
```

Damit erhält man aus der Matrizengleichung (4) die Reaktionskräfte zu :

```
> P[1] := -(AE/3)*u[2]; Q[1] := -(AE/4)*v[3];
> P[3] := (AE/5)*(0.36*u[2]+0.48*v[2]-0.48*v[3]);
```

$$P_1 := -\frac{1}{3} AE u_2$$

$$Q_1 := -\frac{1}{4} AE v_3$$

$$P_3 := \frac{1}{5} AE (-.36 u_2 + .48 v_2 - .48 v_3)$$

```
> P[1] := (2.25/3)*Q;
```

$$P_1 := 0.7500000000 Q$$

```
> Q[1] := Q;
```

$$Q_1 := Q$$

```
> P[3] := evalf((-0.36*(-2.25)*Q+0.48*(-13.5)*Q-0.48*(-4)*Q)/5);
```

$$P_3 := -.7500000000 Q$$

Von der Richtigkeit der Reaktionskräfte kann man sich leicht überzeugen.

Ü 6.1.5

Bei einachsiger Belastung (σ) in Verbindung mit dem HOOKEschen Gesetz, $\sigma = E\varepsilon$, ist die *Verzerrungsenergie* im Element durch

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon \, dV = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon^2 \, dV \quad (1)$$

gegeben. Darin ist ε die elastische Verzerrung infolge der mechanischen Belastung. Die gesamte Verzerrung setzt sich gemäß

$$\varepsilon_{\text{ges.}} = \frac{du}{dx} = \varepsilon + \varepsilon_T \quad (2)$$

zusammen, wobei $\varepsilon_T = \alpha \Delta T$ die zusätzliche Dehnung infolge Temperaturänderung ausdrückt.

Aus (1) folgt unter Berücksichtigung von (2):

$$U = \frac{1}{2} E \int_V \left(\frac{du}{dx} - \alpha \Delta T \right)^2 dV. \quad (3)$$

Mit $dV = A dx$ und bei konstanten Werten von A und E geht (3) über in:

$$U = \frac{AE}{2} \int_0^\ell \left(\frac{du}{dx} - \alpha \Delta T \right)^2 dx. \quad (4)$$

Da das finite Element nur zwei Knotenpunkte besitzt, wird für $u = u(x)$ ein linearer Verschiebungsansatz gemacht,

$$u = \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) u_1 + \frac{x}{\ell} u_2, \quad (5)$$

der auf den konstanten Wert

$$du / dx = (u_2 - u_1) / \ell \quad (6)$$

führt, so dass der Integrand in (4) von x unabhängig ist. Somit geht (4) über in:

$$U = \frac{1}{2} \frac{AE}{\ell} (u_2 - u_1 - \ell \alpha \Delta T)^2 \quad (7a)$$

bzw.

$$\boxed{U = \frac{1}{2} k \tilde{e}^2 \quad \text{mit} \quad k \equiv \frac{AE}{\ell} \quad \text{und} \quad \tilde{e} = u_2 - u_1 - \ell \alpha \Delta T} \quad (7b)$$

Dieses Ergebnis hätte man auch durch einfache Überlegung sofort angeben können!

Quadriert man (7b) aus, so erscheint ein Term $k(\ell \alpha \Delta T)^2 / 2$, der allerdings von den Knotenverschiebungen unabhängig ist und auf die Extremwertbildung keinen Einfluss hat.

Ü 6.1.6

In Erweiterung von Ü 6.1.5 erhält man das *Gesamtpotential* zu

$$\Pi = U_a + U_b + U_c - \sum_{i=1}^4 P_i u_i. \quad (1)$$

Darin sind zunächst die Randbedingungen $u_1 = u_4 = 0$ noch nicht berücksichtigt.

Die Beiträge der einzelnen Elemente zur Verzerrungsenergie ermittelt man gemäß Ü 6.1.5 zu:

$$U_a = \frac{1}{2} k_a \tilde{e}_a^2, \dots, U_c = \frac{1}{2} k_c \tilde{e}_c^2. \quad (2a,b,c)$$

Darin sind

$$k_a = k_b \equiv A_b E / \ell_b = 0,4 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{mm}}; \quad k_c = 0,8 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad (3a,b,c)$$

und

$$\tilde{e}_a \equiv (u_2 - u_1 - \ell_a \alpha \Delta T), \dots, \tilde{e}_c \equiv (u_4 - u_3 - \ell_c \alpha \Delta T), \quad (4a,b,c)$$

bzw. mit den gegebenen Zahlenwerten:

$$\tilde{e}_a \equiv (u_2 - u_1 - 6 \cdot 10^{-2} \text{ mm}), \dots, \tilde{e}_c \equiv (u_4 - u_3 - 6 \cdot 10^{-2} \text{ mm}). \quad (5a,b,c)$$

Das *Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials* verlangt:

$$\partial \Pi / \partial u_i \stackrel{!}{=} 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (6)$$

Danach erhält man vier Gleichgewichtsbedingungen für die vier Knoten ①, ..., ④:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} \stackrel{!}{=} 0 &\Rightarrow -0,4 \cdot 10^6 (u_2 - u_1) \frac{\text{N}}{\text{mm}} = P_1 - 2,4 \cdot 10^4 \text{ N} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} \stackrel{!}{=} 0 &\Rightarrow 0,4 \cdot 10^6 (2u_2 - u_1 - u_3) \frac{\text{N}}{\text{mm}} = P_2 \equiv F_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ N} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} \stackrel{!}{=} 0 &\Rightarrow 0,4 \cdot 10^6 (3u_3 - u_2 - 2u_4) \frac{\text{N}}{\text{mm}} = -F_3 - 2,4 \cdot 10^4 \text{ N} = -3,4 \cdot 10^4 \text{ N} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_4} \stackrel{!}{=} 0 &\Rightarrow 0,8 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{mm}} (u_4 - u_3) = P_4 + 4,8 \cdot 10^4 \text{ N} \end{aligned}$$

die man in der *Matrixform*

$$0,4 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ u_3 = ? \\ u_4 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 - 2,4 \cdot 10^4 \text{ N} \\ 2 \cdot 10^4 \text{ N} \\ -3,4 \cdot 10^4 \text{ N} \\ P_4 + 4,8 \cdot 10^4 \text{ N} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ausdrücken kann. Daraus ergibt sich das reduzierte System zu:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \\ -8,5 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \end{bmatrix} \quad (8)$$

mit der Auflösung:

$$\boxed{u_2 = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \mid u_3 = -2,4 \cdot 10^{-2} \text{ mm}}. \quad (9a,b)$$

Damit ermittelt man aus (7) die Reaktionskräfte P_1 und P_4 in den Einspannungen zu:

$$P_1 = 2,4 \cdot 10^4 \text{ N} - 0,4 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{mm}} u_2 \Rightarrow \boxed{P_1 = +1,88 \cdot 10^4 \text{ N}}, \quad (10a)$$

$$P_4 = -4,8 \cdot 10^4 \text{ N} - 0,8 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{mm}} u_3 \Rightarrow \boxed{P_4 = -2,88 \cdot 10^4 \text{ N}}. \quad (10b)$$

Zur Kontrolle bilde man die Summe der äußeren Kräfte und der Reaktionskräfte (Gleichgewicht der Gesamtstruktur):

$$\boxed{\sum_{i=1}^4 P_i = (1,88 + 2 - 1 - 2,88) \cdot 10^4 \text{ N} = 0}. \quad (11)$$

Im Folgenden soll das Gleichgewicht der einzelnen Elemente überprüft werden. Die Axialkraft in einem finiten Stabelement kann durch

$$S = \sigma A = EA \varepsilon = EA (\varepsilon_{\text{ges.}} - \varepsilon_T) = EA \left(\frac{du}{dx} - \alpha \Delta T \right)$$

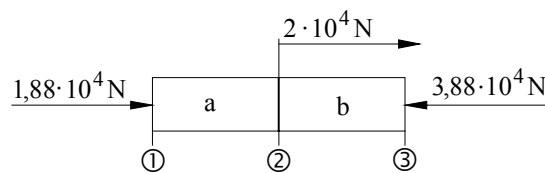
ausgedrückt werden. Bei einem linearen Verschiebungsansatz (finites Stabelement mit zwei Knoten) ist $du/dx = (u_2 - u_1) / \ell = \text{konstant}$ (Ü 6.1.5). Mithin wird:

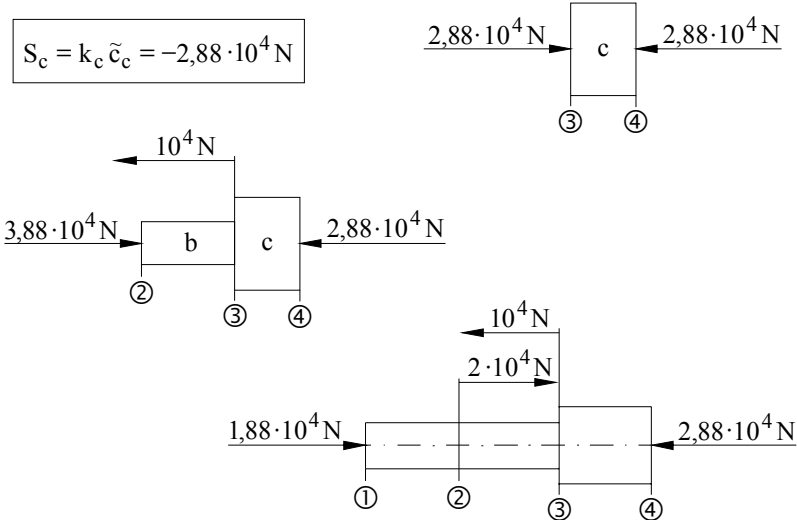
$$\boxed{S = \frac{EA}{\ell} (u_2 - u_1 - \ell \alpha \Delta T) \equiv k \tilde{e}}. \quad (12)$$

Für die einzelnen Elemente erhält man daraus:

$$\boxed{S_a = k_a \tilde{e}_a = -1,88 \cdot 10^4 \text{ N}} \quad \begin{array}{c} 1,88 \cdot 10^4 \text{ N} \rightarrow \boxed{\text{a}} \leftarrow 1,88 \cdot 10^4 \text{ N} \\ \text{①} \qquad \qquad \text{②} \end{array}$$

$$\boxed{S_b = k_b \tilde{e}_b = -3,88 \cdot 10^4 \text{ N}} \quad \begin{array}{c} 3,88 \cdot 10^4 \text{ N} \rightarrow \boxed{\text{b}} \leftarrow 3,88 \cdot 10^4 \text{ N} \\ \text{②} \qquad \qquad \text{③} \end{array}$$





Man vergleiche die Ergebnisse dieser Übung mit der Übung 3.2.1 aus dem ersten Band.

Ü 6.1.7

Wenn man zunächst die Randbedingungen $u_1 = u_3 = 0$ "offen" lässt, kann das Gesamtpotential folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (-\Delta \ell_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (u_3 - \Delta \ell_2)^2 - P_1 u_1 + P_{21} \Delta \ell_1 - P_{22} \Delta \ell_2 - P_3 u_3. \quad (1)$$

Das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial \Pi / \partial u_1 &= 0 \Rightarrow -k_1 (-\Delta \ell_1 - u_1) = P_1 \\ \partial \Pi / \partial \Delta \ell_1 &= 0 \Rightarrow k_1 (-\Delta \ell_1 - u_1) = -P_{21} = -P_{22} \\ \partial \Pi / \partial \Delta \ell_2 &= 0 \Rightarrow -k_2 (u_3 - \Delta \ell_2) = P_{22} \\ \partial \Pi / \partial u_3 &= 0 \Rightarrow k_2 (u_3 - \Delta \ell_2) = P_3 \end{aligned}$$

das man durch die Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ -\Delta \ell_1 = ? \\ \Delta \ell_2 = ? \\ u_3 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 = ? \\ -P_{22} = ? \\ P_{22} = ? \\ P_3 = ? \end{bmatrix} \quad (2)$$

darstellen kann. Daraus entnimmt man:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta \ell_1 \\ \Delta \ell_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{22} \\ P_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{P_{22} = k_1 \Delta \ell_1 = k_2 \Delta \ell_2}. \quad (3)$$

Unter Berücksichtigung der Nebenbedingung

$$\Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 = \Delta \ell \equiv \ell_1 + \ell_2 - \ell \quad (4)$$

erhält man aus (3) die Längenänderungen

$$\boxed{\Delta \ell_1 = \frac{\Delta \ell}{1 + k_1 / k_2}} \quad \boxed{\Delta \ell_2 = \frac{\Delta \ell}{1 + k_2 / k_1}} \quad (5a,b)$$

und damit ebenfalls aus (3) die Presskraft

$$\boxed{P_{22} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \Delta \ell}. \quad (6)$$

Die Reaktionskräfte an den Wänden ergeben sich aus (2) mit (5a,b) zu:

$$\boxed{P_1 = k_1 \Delta \ell_1 = P_{22}}, \quad \boxed{P_3 = -k_2 \Delta \ell_2 = -P_{22}}. \quad (7a,b)$$

Elegantier kann die Aufgabe mit Hilfe der *LAGRANGESchen Multiplikatorenmethode* gelöst werden. Dann ist Π durch die modifizierte Form

$$\Pi^* = \Pi + \lambda N \quad (8)$$

zu ersetzen. Darin ist λ ein *LAGRANGEScher Multiplikator* und

$$N = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 - \Delta \ell = 0 \quad (9)$$

die *Nebenbedingung* ($\ell = \text{konst.}$). Um Schreibarbeit zu sparen, sollen sofort die Randbedingungen $u_1 = u_3 = 0$ berücksichtigt werden. Das Potential Π in (8) besteht dann nur aus der im Gleichgewichtszustand aufgespeicherten Formänderungsenergie:

$$\Pi^* = \frac{1}{2} k_1 (\Delta \ell_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (\Delta \ell_2)^2 + \lambda (\Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 - \Delta \ell). \quad (10)$$

Daraus ermittelt man:

$$\partial \Pi^* / \partial \Delta \ell_1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow k_1 \Delta \ell_1 + \lambda = 0 \Rightarrow \Delta \ell_1 = -\lambda / k_1, \quad (11a)$$

$$\partial \Pi^* / \partial \Delta \ell_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow k_2 \Delta \ell_2 + \lambda = 0 \Rightarrow \Delta \ell_2 = -\lambda / k_2. \quad (11b)$$

Setzt man (11a,b) in die *Nebenbedingung* (9) ein, so erhält man den *LAGRANGESchen Multiplikator*:

$$-\lambda (1 / k_1 + 1 / k_2) = \Delta \ell \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \Delta \ell}, \quad (12)$$

der mit $-P_{22}$ gemäß (6) übereinstimmt. Schließlich setzt man (12) in (11a,b) ein und erhält (5a,b).

Ü 6.2.1

Man überschiebe zunächst (6.28) mit dem *virtuellen Verschiebungsvektor* und integriere über das Volumen des Körpers:

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + f_i) \delta u_i dV = 0. \quad (1)$$

Darin kann der erste Integrand unter Beachtung der Regel $(\delta u_i)_{,j} = \delta u_{i,j}$ folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\sigma_{ji,j} \delta u_i = (\sigma_{ji} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ji} \delta u_{i,j}. \quad (2)$$

Wegen

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{bzw.} \quad \delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \quad (3)$$

gilt unter Berücksichtigung der Symmetrie des *CAUCHYschen Spannungstensors* ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) und der *Austauschregel*:

$$\sigma_{ji} \delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ji} \delta u_{i,j} + \sigma_{ji} \delta u_{j,i}) = \frac{1}{2}(\sigma_{ji} \delta u_{i,j} + \sigma_{ij} \delta u_{j,i}) = \sigma_{ji} \delta u_{i,j}. \quad (4)$$

Damit wird (2) in (1) eingesetzt:

$$\int_V [(\sigma_{ji} \delta u_i)_{,j} + f_i \delta u_i - \sigma_{ji} \delta \epsilon_{ij}] dV = 0. \quad (5)$$

Das erste Volumenintegral in (5) kann aufgrund des *GAUSSschen Integralsatzes* durch ein Oberflächenintegral ausgedrückt werden:

$$\int_V (\sigma_{ji} \delta u_i)_{,j} dV = \int_{S_p} \sigma_{ji} \delta u_i n_j dS. \quad (6)$$

Dabei erstreckt sich das Oberflächenintegral nur über die Teilfläche $S = S_p$, auf der *virtuelle Verschiebungen* δu_i möglich sind - nicht jedoch über die Teilfläche S_u , auf der Randverschiebungen vorgegeben sind und somit virtuelle Verschiebungen verschwinden.

Aufgrund der Randbedingung (6.29) kann auf der rechten Seite in (6) die Verknüpfung $\sigma_{ji} n_j$ durch p_i ersetzt werden, so dass aus (5) mit (6) schließlich die Gleichheit

$$\boxed{\delta W_i \equiv \int_V \sigma_{ji} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_{S_p} p_i \delta u_i dS + \int_V f_i \delta u_i dV \equiv \delta W_a} \quad (6.32)$$

von *innerer* und *äußerer virtueller Arbeit* gefolgert werden kann. Damit ist das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* aus den *Gleichgewichtsbedingungen* (6.28) und den *Randbedingungen* (6.29) gewonnen.

Ü 6.2.2

Im Gegensatz zu Ü 6.2.1 werden im Folgenden *virtuelle Kräfte* und *virtuelle Spannungen*, d.h. die Variationen δf_i , δp_i und $\delta \sigma_{ij}$ betrachtet. Man wende auf die Gleichgewichtsbedingungen (6.28) und die Randbedingungen (6.29) den Variationsoperator an,

$$\delta \sigma_{ji,j} + \delta f_i = 0_i \quad \text{in } V, \quad (1)$$

$$\delta \sigma_{ji} n_j = \delta p_i \quad \text{auf } S_u, \quad (2)$$

und integriere zunächst (1) nach Überschieben mit dem Verschiebungsvektor u_i über das Volumen des Körpers:

$$\int_V u_i (\delta \sigma_{ji,j} + \delta f_i) dV = 0. \quad (3)$$

Darin kann der erste Integrand unter Beachtung der Vertauschbarkeit der Reihenfolge von Variation und Differentiation

$$\delta \sigma_{ji,j} = (\delta \sigma_{ji})_{,j} \quad (4)$$

folgendermaßen umgeformt werden:

$$u_i \delta \sigma_{ji,j} = (u_i \delta \sigma_{ji})_{,j} - u_{i,j} \delta \sigma_{ji}. \quad (5)$$

Weiterhin gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \end{array} \right\} \Rightarrow u_{i,j} \delta \sigma_{ji} = \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ji}. \quad (6)$$

Setzt man (5) mit (6) in (3) ein, so folgt weiter:

$$\int_V (u_i \delta \sigma_{ji})_{,j} dV - \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ji} dV + \int_V u_i \delta f_i dV = 0. \quad (7)$$

Das erste Volumenintegral in (7) kann nach dem *GAUSSschen Satz* in ein Oberflächenintegral umformuliert werden, das aber nur über die Teilfläche S_u erstreckt wird, da auf S_p keine virtuellen Oberflächenkräfte zugelassen sind:

$$\int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ji} dV = \int_{S_u} u_i \delta \sigma_{ji} n_j dS + \int_V u_i \delta f_i dV. \quad (8)$$

Berücksichtigt man darin die Beziehung (2), so erhält man schließlich das gesuchte Ergebnis:

$$\boxed{\delta W_i^* \equiv \int_V \epsilon_{ji} \delta \sigma_{ij} dV = \int_{S_u} u_i \delta p_i dS + \int_V u_i \delta f_i dV \equiv \delta W_a^*} . \quad (6.32^*)$$

Damit kann (3) als gesamte *virtuelle Ergänzungsarbeit* interpretiert werden:

$$\boxed{\delta W^* = \delta W_i^* - \delta W_a^* = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta W_i^* = \delta W_a^*} .$$

Ü 6.2.3

Falls keine Volumenkräfte vorhanden sind, vereinfacht sich das Prinzip (6.32*) zu:

$$\int_V \epsilon_{ji} \delta \sigma_{ij} dV = \int_{S_u} u_i \delta p_i dS. \quad (1)$$

Für ebene Probleme können die statisch zulässigen Spannungen aus einer *AIRY-schen Spannungsfunktion* $F = F(x,y)$ ermittelt werden:

$$\sigma_x := \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y := \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} := -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

Damit sind die Gleichgewichtsbedingungen (6.28) für $f_i = 0_i$ a priori erfüllt (statisch zulässiges Spannungsfeld).

Setzt man (2) in (1) ein, so folgt unter Beachtung der Vertauschbarkeit der Reihenfolge von Variation und Differentiation für die linke Seite in (1):

$$\int_V \epsilon_{ji} \delta \sigma_{ij} dV = \int_V \left(\epsilon_x \frac{\partial^2 \delta F}{\partial y^2} - 2\epsilon_{xy} \frac{\partial^2 \delta F}{\partial x \partial y} + \epsilon_y \frac{\partial^2 \delta F}{\partial x^2} \right) dV. \quad (3)$$

Durch zweimalige partielle Integration folgt daraus

$$\int_V \left(\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \right) \delta F dV = \text{Oberflächenwerte} . \quad (4)$$

Da die virtuellen Spannungen und damit δF beliebig sein können, wenn sie nur statisch zulässig sind, kann man aus (4) folgern, dass der Klammerausdruck unter dem Volumenintegral verschwinden muss:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = 0} . \quad (5)$$

Das ist die Verträglichkeitsbedingung bei ebenen Problemen. Die Verzerrungen ϵ_x, ϵ_y und $\epsilon_{xy} = \gamma_{xy} / 2$ können sich nicht unabhängig voneinander einstellen. Sie sind durch (5) miteinander verknüpft, so dass in jedem Punkt eines Kontinuums benachbarte Elemente *fugenlos* zusammenpassen.

Weitere Verträglichkeitsbedingungen erhält man aus (5) durch zyklische Vertauschungen ($x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \dots$) und sind in (6.30) enthalten. Aus der rechten Seite von (1) kann nach einigen Umformungen der Zusammenhang (6.31) gefolgt werden.

Ü 6.3.1

Aus der Skizze in der Aufgabenstellung erkennt man die Transformationen

$$u_1^* = u_1 \cos \alpha + v_1 \sin \alpha \equiv u_1 c + v_1 s, \quad (1a)$$

$$u_2^* = u_2 \cos \alpha + v_2 \sin \alpha \equiv u_2 c + v_2 s, \quad (1b)$$

die man in der Matrixform

$$\begin{Bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ausdrücken kann. Bei linearer Kraft-Verschiebungs-Kurve ist nach dem *Arbeitsatz* (6.8) die *Formänderungsenergie* des Stabelementes gleich der halben Arbeit, die von den Knotenkräften verrichtet wird:

$$U = \frac{1}{2} (F_1^* u_1^* + F_2^* u_2^*) \equiv \frac{1}{2} \{ F_1^* \quad F_2^* \} \begin{Bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Für ein Stabelement mit der *Dehnsteifigkeit* $k=EA/\ell$ ist nach (3.32) bzw. Ü 3.2.11 die Steifigkeitsbeziehung bezüglich des *lokalen Koordinatensystems* durch

$$\begin{Bmatrix} F_1^* \\ F_2^* \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{Bmatrix} \quad (4a)$$

bzw. in der transponierten Form durch

$$\{ F_1^* \quad F_2^* \} = \frac{EA}{\ell} \{ u_1^* \quad u_2^* \} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4b)$$

gegeben. Mit (2) und (4b) ergibt sich die Formänderungsenergie (3) in Matrizenform zu:

$$U = \frac{EA}{2\ell} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}^t \underbrace{\begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}}_{=\frac{\ell}{EA}[\mathbf{K}]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (5a)$$

bzw. symbolisch zu:

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^t [K] \{u\}. \quad (5b)$$

Nach dem *ersten Satz von CASTIGLIANO* gilt bezüglich des *globalen Koordinatensystems*:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial U / \partial u_1 \\ \partial U / \partial v_1 \\ \partial U / \partial u_2 \\ \partial U / \partial v_2 \end{Bmatrix}. \quad (6a)$$

Mit (5a,b) und Ü 6.1.1 erhält man schließlich:

$$\{F\} = \partial U / \partial \{u\} = [K] \{u\}. \quad (6b)$$

Die Steifigkeitsmatrix $[K]$ in (5b) erhält man durch Matrizenmultiplikation, die man aus (5a) ablesen kann und vom Computerprogramm MAPLE V, Release 8, übernommen wird. Der *Output* ist im Folgenden abgedruckt.

>with(linalg):

Steifigkeitsmatrix im lokalen Koordinatensystem [k]

> k:=(EA/l)*matrix(2,2,[1,-1,-1,1]);

$$k := \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

und Transformationsmatrix [T]:

>T:=matrix(2,4,[c,s,0,0,0,0,c,s]);

$$T := \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$$

Mit diesen Matrizen erhält man durch Multiplikationen die gesuchte Steifigkeitsmatrix $[K]$ des finiten Stabelementes bezüglich des globalen Koordinatensystems:

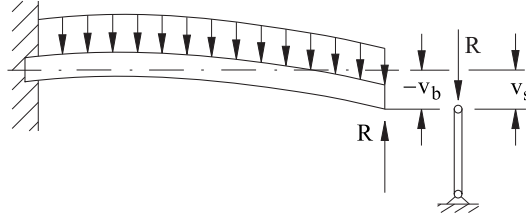
> K:=(EA/l)*evalm((multiply(transpose(T),k,T))*l/(EA));

$$K := \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & c s & -c^2 & -c s \\ c s & s^2 & -c s & -s^2 \\ -c^2 & -c s & c^2 & c s \\ -c s & -s^2 & c s & s^2 \end{bmatrix}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit Gleichung (3.53) und mit der Übung 6.1.3 überein!

Ü 6.3.2

Die Verschiebungen im Knotenpunkt ② sind in nachfolgender Skizze verdeutlicht.



Das Biegemoment an der Stelle x ist:

$$M(x) = Rx - \frac{1}{2}qx^2. \quad (1)$$

Damit ermittelt man die Verschiebung v_b des Balkens im Knotenpunkt ② nach dem zweiten Satz von CASTIGLIANO (6.50a,b) zu:

$$v_b = \frac{\partial U_b}{\partial R} = \frac{1}{EI} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial R} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(Rx - \frac{1}{2}qx^2 \right) x dx,$$

$$\boxed{v_b = \frac{RL^3}{3EI} - \frac{qL^4}{8EI} = \frac{L^3}{3EI} \left(R - \frac{3}{8}qL \right)}. \quad (2)$$

Der Stab hat eine Formänderungsenergie gespeichert der Größe

$$U_s = \int_0^\ell \frac{R^2}{2EA} dy = \frac{\ell R^2}{2EA}, \quad (3)$$

so dass sich die Verschiebung v_s des Stabes im Knotenpunkt ② zu

$$\boxed{v_s = \partial U_s / \partial R = \ell R / EA \equiv R / k} \quad (4)$$

ergibt. Aufgrund der Kompatibilität sind die Verschiebungen (2) und (4) betragsmäßig gleich. Sie unterscheiden sich aber durch ihre Richtung ($v_s = -v_b$), da ja auch die auf den Balken und Stab wirkenden Kräfte im Knotenpunkt entgegengesetzt gerichtet sind. Mithin muss gelten

$$\boxed{v_b + v_s = 0}, \quad (5)$$

so dass mit (2) und (4) schließlich das gesuchte Ergebnis folgt:

$$\frac{RL^3}{3EI} - \frac{qL^4}{8EI} + \frac{R\ell}{EA} = 0 \Rightarrow \boxed{R = \frac{3qAL^4}{8(AL^3 + 3\ell I)}}. \quad (6)$$

Bezeichnet man mit $U = U_b + U_s$ die *elastische Formänderungsenergie* des gesamten Systems (Balkenelement + Stabelement), so folgert man aus der *Kompatibilitätsbedingung* (5) die Bedingung:

$$v_b + v_s = \frac{\partial U_b}{\partial R} + \frac{\partial U_s}{\partial R} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial R} = 0 . \quad (7)$$

Die zweite Ableitung $\partial^2 U / \partial R^2$ erhält man durch Differentiation von (2) und (4) nach R:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} = \frac{\partial v_b}{\partial R} + \frac{\partial v_s}{\partial R} = \frac{L^3}{3EI} + \frac{\ell}{EA} > 0 . \quad (8)$$

Mithin liegt ein *Minimum* vor, d.h., die statisch unbestimmte Reaktionskraft R stellt sich so ein, dass die elastische Formänderungsenergie des gesamten Systems ein Minimum annimmt. Das Ergebnis (7) mit (8) drückt den *Satz von MENABREA* (2.2) aus:

In einem statisch unbestimmten System, das ohne äußere Belastung spannungsfrei ist, stellen sich die statisch unbestimmten Reaktionen (Kräfte oder Momente) so ein, dass die elastische Formänderungsenergie minimal wird!

Ü 6.3.3

In Balkenmitte wird eine Einzelkraft Q in Richtung der gesuchten Durchbiegung angenommen. Das Biegemoment an einer Stelle x ist durch

$$M(x) = R_1 x - \frac{1}{2} q x^2 = \frac{1}{2} (Q + q\ell) x - \frac{1}{2} q x^2 \quad (1)$$

gegeben. Aus der *elastischen Formänderungsenergie*

$$U = 2 \int_0^{\ell/2} \frac{M^2}{2EI} dx \quad (2)$$

ermittelt man die gesuchte Durchbiegung des Balkens nach dem zweiten Satz von CASTIGLIANO:

$$v = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{2}{EI} \int_0^{\ell/2} M \frac{\partial M}{\partial Q} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^{\ell/2} [(Q + q\ell) x - qx^2] x dx , \quad (3)$$

$$v = \frac{1}{EI} \left(\frac{Q\ell^3}{48} + \frac{5q\ell^4}{384} \right)$$

\Rightarrow

$v = \frac{5q\ell^4}{384EI} \quad \text{für} \quad Q = 0$
$v = \frac{Q\ell^3}{48EI} \quad \text{für} \quad q = 0$

Ü 6.4.1

Für ein finites Balkenelement **ohne** axiale Last, d.h. bei einem "Lastvektor"

$$\{F\} = \{Q_1 \quad M_1 \quad Q_2 \quad M_2\}^t \quad (6.58)$$

und entsprechendem "Verformungsvektor"

$$\{u\} = \{v_1 \quad \varphi_1 \quad v_2 \quad \varphi_2\}^t \quad (6.59)$$

gilt nach dem *ersten Satz von CASTIGLIANO*

$$F_i = \partial U / \partial u_i \equiv \partial U_b / \partial u_i \quad (6.48a)$$

mit

$$U \equiv U_b = \frac{EI}{2} \int_0^\ell \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (6.62)$$

Infolge einer axialen Belastung wird die Durchbiegung in Richtung einer Querbela-
stung F_1 vergrößert, d.h. umgekehrt: um eine Durchbiegung u_i in Richtung einer
Querbela-
stung F_1 zu erzielen, benötigt man infolge der Unterstützung durch P
eine geringere Querbela-
stung als $\partial U_b / \partial u_i$, so dass der erste Satz von
CASTIGLIANO (6.48a) entsprechend modifiziert werden muss:

$$\boxed{F_i = \frac{\partial}{\partial u_i} (U_b - W_n)} \quad (1)$$

Darin ist W_n die Arbeit, die von der Axialkraft P während der Durchbiegung
verrichtet wird, die von F_i verursacht wird. Die elastische Formänderungsenergie
 U_b wird während der Durchbiegung gespeichert. Die Arbeit W_n kann folgen-
dermaßen ermittelt werden.

Die Differenz zwischen einem Bogenelement ds und dx ist durch

$$ds - dx = \sqrt{dx^2 + dv^2} - dx = \left(\sqrt{1 + v'^2} - 1 \right) dx$$

bzw. nach Potenzreihenentwicklung durch die Näherung

$$ds - dx = \left(1 + \frac{1}{2} v'^2 - \frac{1}{8} v'^4 \pm \dots - 1 \right) dx \approx \frac{1}{2} v'^2 dx \quad (2)$$

gegeben. Mithin ergibt sich die horizontale Verschiebung des Knotenpunktes ② in
Richtung ① näherungsweise bei nicht zu großen Durchbiegungen zu:

$$\Delta \ell = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (3)$$

so dass die gesuchte Arbeit W_n bei konstanter axialer Last P gemäß

$$W_n := P \Delta \ell = \frac{P}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4)$$

darstellbar ist. In $\Delta \ell$ ist die axiale Dehnung des Stabes nicht berücksichtigt (*dehnstarrer* Stab), d.h.: die Länge der neutralen Faser bleibt erhalten (*inkompressibel*).

Die Durchbiegung $v = v(x)$, die in die Integrale (6.62) und (4) eingeht, entspricht der *Verschiebungsfunktion* (*HERMITESche Interpolation*)

$$v(x) = N_1(x) v_1 + N_2(x) \varphi_1 + N_3(x) v_2 + N_4(x) \varphi_2 \quad (6.55)$$

mit den *Formfunktionen* (*shape functions*) (6.56a,b,c,d), die in Bild 6.9 dargestellt sind. Aufgrund der Modifikation (1) muss auch die Steifigkeitsbeziehung (6.69a,b) modifiziert werden:

$$\{F\} = \left[[K] - [n] \right] \{u\}. \quad (5)$$

Darin ist $[K]$ die Steifigkeitsmatrix bei fehlender Axialbelastung mit den Elementen

$$k_{ij} := EI \int_0^{\ell} N_i''(x) N_j''(x) dx. \quad (6.68)$$

Die *inkrementelle Steifigkeitsmatrix* $[n]$, auch *geometrische Steifigkeitsmatrix* genannt, kann analog (6.68) gewonnen werden, wenn man (4) in (1) einsetzt:

$$\frac{\partial W_n}{\partial u_i} = P \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx. \quad (6)$$

Darin gilt wegen (6.55):

$$\partial v / \partial x = N_1'(x) v_1 + N_2'(x) \varphi_1 + N_3'(x) v_2 + N_4'(x) \varphi_2, \quad (7)$$

woraus man

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = N_i'(x) \quad (8)$$

folgern kann. Mit (7) und (8) geht (6) in die Formel

$$\frac{\partial W_n}{\partial u_i} = P \int_0^\ell [N'_1(x) v_1 + N'_2(x) \varphi_1 + N'_3(x) v_2 + N'_4(x) \varphi_2] N'_i(x) dx \quad (9a)$$

über, die man auch in verkürzter Schreibweise angeben kann:

$$\frac{\partial W_n}{\partial u_i} = n_{i1} v_1 + n_{i2} \varphi_1 + n_{i3} v_2 + n_{i4} \varphi_2 \equiv \sum_{j=1}^4 n_{ij} u_j \quad (9b)$$

wenn man die Größen n_{ij} analog (6.68) gemäß

$$n_{ij} := P \int_0^\ell N'_i(x) N'_j(x) dx \quad (10a)$$

definiert. Darin sind die Ableitungen

$$N'_1(x) = -6x / \ell^2 + 6x^2 / \ell^3, \quad N'_2(x) = 1 - 4x / \ell + 3x^2 / \ell^2, \quad (11a,b)$$

$$N'_3(x) = 6x / \ell^2 - 6x^2 / \ell^3, \quad N'_4(x) = -2x / \ell + 3x^2 / \ell^2 \quad (11c,d)$$

einzusetzen, die man aus (6.56a ÷ d) erhält und die im folgenden Computerausdruck mit $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ und $d(x)$ bezeichnet sind.

Das Computerprogramm MAPLE V, Release 8, liefert schließlich die Matrix (10a), wie nachfolgend ausgedruckt.

```
>
>with(linalg):
>a(x):=-6*x/l^2+6*x^2/l^3: b(x):=1-4*x/l+3*x^2/l^2:
>c(x):=6*x/l^2-6*x^2/l^3: d(x):=-2*x/l+3*x^2/l^2:
>J:=matrix(4,4,[a(x)*a(x),a(x)*b(x),a(x)*c(x),a(x)*d(x),b(x)*a(x),b(x)*b(x),
>b(x)*c(x),b(x)*d(x),c(x)*a(x),c(x)*b(x),c(x)*c(x),c(x)*d(x),d(x)*a(x),d(x)*b(x),
>d(x)*c(x),d(x)*d(x)]): n:=(P/10)*evalm((10)*map(int,J,x=0..l));
n := 1/10 P 
$$\begin{bmatrix} 12 \frac{1}{l} & 1 & -12 \frac{1}{l} & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} l & -1 & -\frac{1}{3} l \\ -12 \frac{1}{l} & -1 & 12 \frac{1}{l} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} l & -1 & \frac{4}{3} l \end{bmatrix} \quad (10b)$$

```

>

Die Matrix $[K]$ in (5) ist durch

$$[K] = \frac{EI}{\ell^2} \begin{bmatrix} 12/\ell & 6 & -12/\ell & 6 \\ 6 & 4\ell & -6 & 2\ell \\ -12/\ell & -6 & 12/\ell & -6 \\ 6 & 2\ell & -6 & 4\ell \end{bmatrix} \quad (6.69b)$$

gegeben.

Falls das Balkenelement in obiger Skizze nur durch die Axialkraft P belastet wird, ist in (5) der "Lastvektor" $\{F\} \equiv \{0\}$, so dass die Determinante der Differenzmatrix $[K] - [n]$ verschwinden muss:

$$\det([K] - [n]) = 0. \quad (11)$$

Da sich die erste und dritte Zeile der Differenzmatrix $[K] - [n]$ nur durch ein Vorzeichen unterscheiden, ist ihre Determinante identisch null, so dass (11) kein weiteres Ergebnis liefert.

Aufgrund der Randbedingungen

$$v_1 = v_2 = 0 \quad (12)$$

entnimmt man (5) das reduzierte Gleichungssystem

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\frac{EI}{\ell} - \frac{2}{15}P\ell & 2\frac{EI}{\ell} + \frac{1}{30}P\ell \\ 2\frac{EI}{\ell} + \frac{1}{30}P\ell & 4\frac{EI}{\ell} - \frac{2}{15}P\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

das wegen $\{F\} = \{0\}$ *homogen* ist. Mithin muss ihre Koeffizientendeterminante verschwinden, woraus unmittelbar die *Knicklast* P_{krit} folgt:

$$\boxed{P_{\text{krit}} = 12EI / \ell^2}. \quad (14)$$

Dieser Wert kann auch unmittelbar aus (13) abgelesen werden, ohne die Determinante bilden zu müssen; denn unter Berücksichtigung der Symmetriebedingung $\varphi_1 = -\varphi_2$ entnimmt man (13) über ein Zeilen-Spaltenprodukt den Zusammenhang:

$$0 = -\left(4\frac{EI}{\ell} - \frac{2}{15}P\ell\right)\varphi_2 + \left(2\frac{EI}{\ell} + \frac{1}{30}P\ell\right)\varphi_2,$$

woraus unmittelbar die kritische Axialkraft (14) folgt.

Eine andere Möglichkeit, die *Knicklast* zu gewinnen, geht von der Vorstellung aus, dass beim Übergang vom *stabilen Gleichgewichtszustand* zum *labilen Zustand* (Kollaps) das *Gesamtpotential* $U_b - W_n$ in (1) verschwindet:

$$U_b - W_n \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow P_{\text{krit}}. \quad (15)$$

Nach dieser Vorstellung erhält man mit (6.62) und (4) die Bestimmungsgleichung

$$P_{\text{krit}} = \frac{EI \int_0^\ell v''^2 dx}{\int_0^\ell v'^2 dx}. \quad (16)$$

Mit der Symmetriebedingung $\varphi_1 = -\varphi_2$ und unter Berücksichtigung der Randbedingungen $v_1 = v_2 = 0$ vereinfacht sich die Biegelinie (6.55) zu:

$$v(x) = [N_2(x) - N_4(x)]\varphi_1 = \varphi_1(1 - x/\ell)x. \quad (17)$$

Damit ermittelt man aus (16) die Näherung (14).

Im Gegensatz zu (17) ist die exakte Biegelinie durch

$$v(x) = v_0 \sin \frac{\pi}{\ell} x \quad (18)$$

gegeben, mit der man nach der Formel (16) den exakten Wert

$$P_{\text{krit}} = \pi^2 EI / \ell^2 \quad (19)$$

erhält. Somit ist der Näherungswert (14) mit einem Fehler von 21,6% behaftet.

Eine bessere Näherung als durch (16) erzielt man mit Hilfe des *RAYLEIGHschen Quotienten*

$$P_{\text{krit}} = \frac{EI \int_0^\ell v'^2 dx}{\int_0^\ell v^2 dx}, \quad (20)$$

der mit (18) wieder den exakten Wert (19) liefert und die Biegelinie mit (17) auf den Näherungswert

$$P_{\text{krit}} = 10 EI / \ell^2 \quad (21)$$

führt. Dieser Wert ist mit einem Fehler von nur 1,32% behaftet!

Aus (6.62) und (4) bildet man das *Funktional*

$$U_b - W_n = J[v(x)] = \frac{1}{2} \int_0^\ell [EI v''^2 - P v'^2] dx, \quad (22)$$

dessen Integrand von der Form $F = F(v', v'')$ ist, so dass die Lösungsfunktion $v = v(x)$ der *EULERSchen Differentialgleichung*

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial v'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial v''} \right) = 0 \quad (5.27)$$

genügen muss. Mit (22) folgt aus (5.27) die Differentialgleichung

$$\boxed{(EI v'')'' + P v'' = 0} \quad (23)$$

für den *Knickstab*.

Legt man das *Funktional*

$$K[v(x)] = \frac{1}{2} \int_0^\ell [EI v'^2 - P v^2] dx \quad (24)$$

zugrunde, dessen Verschwinden auf den RAYLEIGHschen Quotienten (20) führt, so erhält man als *EULERSche Differentialgleichung* (5.21a) im Gegensatz zu (23) die Form

$$\boxed{(EI v')' + P v = 0}. \quad (25)$$

Die Bestimmungsgleichungen (16) und (20) sind "ähnlich". Sie unterscheiden sich in den Integranden durch den Grad der Ableitungen. Man kann (16) interpretieren als den *RAYLEIGHschen Quotienten* des Funktionals (22) bzw. der Differentialgleichung (23), während (20) der *RAYLEIGHsche Quotient* des Funktionals (24) bzw. der Differentialgleichung (25) ist. Die Differentialgleichung (23), die höherer Ordnung ist als (25), führt somit auf die Approximation (16), die schlechter ist als (20).

Die Lösung (18) erfüllt beide Differentialgleichungen. Somit liefern auch beide Auswerteformeln [(16) und (20)] den EULERSchen Wert (19). Die auf der Basis der *HERMITESchen Interpolation* gewonnene Biegelinie (17) erfüllt *keine* der beiden Differentialgleichungen, d.h., weder in (23) noch in (25) verschwindet die rechte Seite, es verbleibt ein Rest, den man als *Residuum* $R(x)$ bezeichnet. Beispielsweise erhält man durch Einsetzen von (17) in die Differentialgleichung (25) das *Residuum*:

$$\boxed{R[v(x)] = \varphi_1 \left[P(x - x^2 / \ell) - 2 EI / \ell \right]}. \quad (26)$$

Um diesen Fehler möglichst klein zu halten, um dadurch eine möglichst geringe Abweichung der Knicklast vom EULERSchen Wert $P_{\text{krit}} = \pi^2 EI / \ell^2$ zu erzielen,

wird man fordern, dass das Residuum im Mittel über den gesamten Stab verschwindet:

$$\boxed{\int_0^\ell R[v(x)] dx \stackrel{!}{=} 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{\text{krit}} = 12 EI / \ell^2} . \quad (27)$$

Allgemeiner kann man nach der *Methode der gewichteten Residuen* fordern, dass das Residuum im gewichteten Mittel verschwindet:

$$\boxed{\int_0^\ell \eta(x) R[v(x)] dx \stackrel{!}{=} 0} . \quad (28)$$

Darin ist $\eta(x)$ eine *Wichtungsfunktion*, die beispielsweise beim *GALERKIN-Verfahren* mit dem Näherungsansatz $v(x)$ übereinstimmt:

$$\boxed{\int_0^\ell v(x) R[v(x)] dx \stackrel{!}{=} 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{\text{krit}} = 10 EI / \ell^2} . \quad (29)$$

Man erhält somit eine wesentliche Verbesserung. Die Näherungen (27) und (29) stimmen mit (14) und (21) überein und sind mit einem Fehler von 21,6 % bzw. 1,32 % behaftet, wie bereits oben erwähnt.

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie sich die *Wichtungsfunktion* beim *GALERKIN-Verfahren* $[\eta(x) \equiv v(x)]$ auf das *Residuum* (26) in Verbindung mit der *Knicklast* (27) in der dimensionslosen Form

$$\boxed{F(\xi) := \frac{\ell}{2EI} R(\xi) = 6(1-\xi)\xi - 1} \quad (30)$$

als Funktion von $\xi \equiv x / \ell$ dargestellt.

Die *Kollokationspunkte* ergeben sich aus $F(\xi) = 0$ zu $\xi = 0,2113$ und $\xi = 0,7887$.

Im Gegensatz zu (30) erhält man ein *gewichtetes Residuum* im Sinne von GALERKIN, d.h. den Integranden $v(x) R[v(x)]$ in (29) durch Einsetzen von (17) in (26) unter Berücksichtigung der *Knicklast* (29) nach kurzer Zwischenrechnung in der dimensionslosen Form

$$\boxed{G(\xi) := \frac{v(\xi) R(\xi)}{2EI \varphi_1^2} = (1-\xi)\xi [5(1-\xi)\xi - 1]} . \quad (31)$$

Aus $G(\xi) = 0$ erhält man vier *Kollokationspunkte*: $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\xi = 0,2764$ und $\xi = 0,7236$.

Die Beziehungen (30) und (31) sind im Bild auf der nächsten Seite mit Hilfe der MAPLE - Grafik gegenübergestellt. Zur Kontrolle sind auch die Integrale in (27) und (29) ausgedruckt, die verschwinden müssen.

Ergänzende Bemerkungen: Die Differentialgleichung (23) des Knickproblems gilt nur für kleine Verschiebungen $v(x)$. Man kann aus ihr nicht die Durchbiegungen für $P > P_{\text{krit}}$ ermitteln (*post buckling*). Für Gleichgewichtslagen *oberhalb* P_{krit} ist die Differentialgleichung der Biegelinie für große Deformationen

$$\boxed{EI \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + P \sin \varphi = 0} \quad (32)$$

heranzuziehen. In Verbindung mit $dv/ds = \sin \varphi$ erhält man die Biegelinie in der Form $v = v(s)$, die von EULER mit *Elastica* bezeichnet wurde.

>F:=xi->6*(1-xi)*xi-1;

$$F := \xi \rightarrow 6(1 - \xi)\xi - 1$$

>Int(F(xi),xi=0..1)=int(F(xi),xi=0..1);

$$\int_0^1 6(1 - \xi)\xi - 1 \, d\xi = 0$$

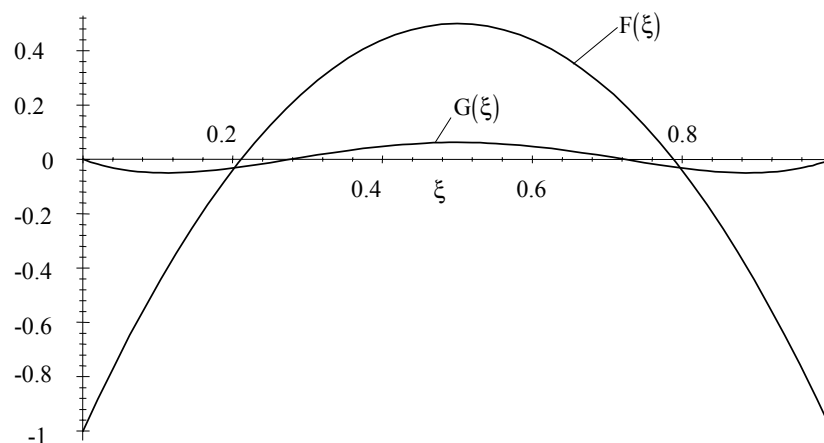
>G(xi):=(1-xi)*xi*(5*(1-xi)*xi-1);

$$G(\xi) := (1 - \xi)\xi(5(1 - \xi)\xi - 1)$$

>Int(G(xi),xi=0..1)=int(G(xi),xi=0..1);

$$\int_0^1 (1 - \xi)\xi(5(1 - \xi)\xi - 1) \, d\xi = 0$$

>plot({F(xi),G(xi)},xi=0..1);



Einseitig fest eingespannter Knickstab

Nimmt man an, dass der Knickstab im Knotenpunkt ① fest eingespannt ist und im Knotenpunkt ② zwei Freiheitsgrade ($v_2 \neq 0$, $\varphi_2 \neq 0$) besitzt, so sind entgegen (12) die geometrischen Randbedingungen durch

$$v_1 = \varphi_1 = 0 \quad (33)$$

gegeben. Damit entnimmt man (5) analog (13) das reduzierte Gleichungssystem

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\frac{EI}{\ell^2} - \frac{2}{5}P & -2\frac{EI}{\ell} + \frac{1}{30}P\ell \\ -2\frac{EI}{\ell} + \frac{1}{30}P\ell & \frac{4}{3}EI - \frac{2}{45}P\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}, \quad (34)$$

das wegen $\{F\} = \{0\}$ *homogen* ist. Mithin muss die Koeffizientendeterminante verschwinden, woraus unmittelbar die *Knicklast* P_{krit} folgt:

$$\boxed{P_{\text{krit}} = 2,486 \, EI/\ell^2}. \quad (35)$$

Dieser Wert weicht nur um 0.75% vom EULERSchen Wert $(\pi^2/4) EI/\ell^2 = 2,467$ nach oben ab ! Neben (35) erhält man aus der verschwindenden Determinante einen weiteren Wert von $32,181 EI/\ell^2$, der für die Knotenlast jedoch nicht maßgeblich ist.

Ü 6.4.2

Nach Ü 6.4.1 gilt die *Steifigkeitsbeziehung* eines Einzelelementes

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = [[K] - [n]] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Darin sind die Matrizen $[K]$ und $[n]$ folgendermaßen gegeben:

$$[K] = \frac{EI}{\ell^2} \begin{bmatrix} 12/\ell & 6 & -12/\ell & 6 \\ 6 & 4\ell & -6 & 2\ell \\ -12/\ell & -6 & 12/\ell & -6 \\ 6 & 2\ell & -6 & 4\ell \end{bmatrix}, \quad (6.69b)$$

$$[n] = \frac{P}{10} \begin{bmatrix} 12/\ell & 1 & -12/\ell & 1 \\ 1 & 4\ell/3 & -1 & -\ell/3 \\ -12/\ell & -1 & 12/\ell & -1 \\ 1 & -\ell/3 & -1 & 4\ell/3 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Aufgrund der Einspannbedingungen sind drei Freiheitsgrade des finiten Elementes der Länge $\ell = L/2$ gleich null:

$$v_1 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0. \quad (3)$$

Ferner ist im Knotenpunkt ② die Vertikalkraft $Q_2 = 0$. Mithin lautet die dritte Gleichung des Systems (1):

$$Q_2 = 0 = \left[\frac{EI}{\ell^2} \left(\frac{12}{\ell} \right) - \frac{P}{10} \left(\frac{12}{\ell} \right) \right] v_2 \quad \text{mit} \quad \ell = \frac{L}{2}, \quad (4)$$

woraus unmittelbar die gesuchte *Knicklast*

$$\boxed{P_{\text{krit}} = 40 EI / L^2} \quad (5)$$

folgt, die im Vergleich mit dem EULERSchen Wert $P_{\text{krit}} = 4\pi^2 EI / L^2$ mit einem Fehler von $\boxed{1,32\%}$ behaftet ist.

Eine Verbesserung des Ergebnisses wird durch eine Aufteilung der halben Stablänge in *zwei* finite Elemente mit der Länge $\ell = L/4$ erreicht. Für diese Aufteilung der halben Stablänge mit drei Knotenpunkten gilt analog (3):

$$v_1 = \varphi_1 = \varphi_3 = 0 \quad (6)$$

Da jetzt drei Knotenpunkte mit je zwei Freiheitsgraden vorliegen, ist die Gesamtsteifigkeitsmatrix eine 6×6 Matrix, die man dadurch erhält, dass man die Matrix (6.69b) eines Einzelelementes zweimal aufgreift und entsprechend überlappt:

$$[K] = \frac{EI}{\ell^2} \begin{bmatrix} (v_1) & (\varphi_1) & (v_2) & (\varphi_2) & (v_3) & (\varphi_3) \\ \begin{bmatrix} 12/\ell & 6 & -12/\ell & 6 \\ 6 & 4\ell & -6 & 2\ell \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -12/\ell & -6 \\ 6 & 2\ell \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 24/\ell & 0 \\ 0 & 8\ell \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -12/\ell & 6 \\ -6 & 2\ell \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & -12/\ell & -6 & 12/\ell & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2\ell & -6 & 4\ell \end{bmatrix} \begin{matrix} (v_1) \\ (\varphi_1) \\ (v_2) \\ (\varphi_2) \\ (v_3) \\ (\varphi_3) \end{matrix} \quad (7)$$

Ebenso erhält man die auf zwei Elemente erweiterte Gesamtmatrix $[n]$:

$$[n] = \frac{P}{10} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 12/\ell & 1 & -12/\ell & 1 \\ 1 & 4\ell/3 & -1 & -\ell/3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -12/\ell & -1 \\ 1 & -\ell/3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 24/\ell & 0 \\ 0 & 8\ell/3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -12/\ell & 1 \\ -1 & -\ell/3 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & -12/\ell & -1 & 12/\ell & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\ell/3 & -1 & 4\ell/3 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Da die drei Freiheitsgrade (6) verschwinden, können in den Matrizen (7) und (8) jeweils die zwei ersten Zeilen und die sechste Zeile mit den entsprechenden Spalten gestrichen werden, um das reduzierte Gleichungssystem zu erhalten:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{EI}{\ell^2} \begin{bmatrix} 24/\ell & 0 & -12/\ell \\ 0 & 8\ell & -6 \\ -12/\ell & -6 & 12/\ell \end{bmatrix} - \frac{P}{10} \begin{bmatrix} 24/\ell & 0 & -12/\ell \\ 0 & 8\ell/3 & -1 \\ -12/\ell & -1 & 12/\ell \end{bmatrix} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Darin verschwindet der Lastvektor ($Q_2 = M_2 = Q_3 = 0$) auf der linken Seite, so dass die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwinden muss. Zur Lösung dieses Eigenwertproblems wird die Software MAPLE V, Release 8, benutzt. Zur Abkürzung ist $\lambda \equiv P\ell^2 / 10EI$ gesetzt.

>with(linalg):

>K:=matrix(3,3,[24/l,0,-12/l,0,8*l,-6,-12/l,-6,12/l]);

$$K := \begin{bmatrix} 24 \frac{1}{l} & 0 & -12 \frac{1}{l} \\ 0 & 8l & -6 \\ -12 \frac{1}{l} & -6 & 12 \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

>n:=matrix(3,3,[24/l,0,-12/l,0,8*l/3,-1,-12/l,-1,12/l]);

$$n := \begin{bmatrix} 24 \frac{1}{l} & 0 & -12 \frac{1}{l} \\ 0 & \frac{8}{3}l & -1 \\ -12 \frac{1}{l} & -1 & 12 \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

>A:=multiply(K,inverse(n));

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{15}l & \frac{14}{5} & -\frac{8}{15}l \\ -\frac{1}{6} & -2\frac{1}{l} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

>cp:=charpoly(A,lambda);

$$cp := (\lambda - 1) \left(\lambda^2 - \frac{52}{15}\lambda + \frac{4}{5} \right)$$

>solve(cp);

$$1, \frac{26}{15} + \frac{4}{15}\sqrt{31}, \frac{26}{15} - \frac{4}{15}\sqrt{31}$$

Aus diesen charakteristischen Zahlen erhält man wegen $\ell = L/4$ die Knicklasten nach der Formel:

$\rightarrow P := \lambda \rightarrow (160 * EL / L^2) * \lambda;$

$$P := \lambda \rightarrow 160 \frac{EL \lambda}{L^2}$$

$\rightarrow \text{evalf}(P(26/15 - (4/15) * \sqrt{31}));$

$$39.77538704 \frac{EL}{L^2}$$

Der EULERSche Wert ist

$\rightarrow 4 * \pi^2 * EI / L^2;$

$$4 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

so dass der nach der FE-Methode ermittelte Wert mit einem Fehler von 0.75% behaftet ist. Die erste Näherung ist mit einem Fehler von 1.32% behaftet!

Mit den anderen Eigenwerten ergeben sich folgende Knicklasten:

$\rightarrow \text{evalf}(P(1)); \text{evalf}(P(26/15 + (4/15) * \sqrt{31}));$

$$160. \frac{EL}{L^2}$$

$$514.8912795 \frac{EL}{L^2}$$

Die entsprechenden EULERSchen Werte erhält man nach der Formel:

$\rightarrow P[n] := n \rightarrow 4 * n^2 * \pi^2 * EI / L^2;$

$$P_n := n \rightarrow 4 \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

für $n=2$ und $n=3$ zu:

$\rightarrow P[2] := \text{evalf}(P[n](2)); P[3] := \text{evalf}(P[n](3));$

$$P_2 := 157.9136705 \frac{EI}{L^2}$$

$$P_3 := 355.3057585 \frac{EI}{L^2}$$

so dass die entsprechenden Näherungswerte mit Fehlern von 1,32% und 44,9% behaftet sind!

Der zweite Eigenwert, der mit einem Fehler von 1,32% behaftet ist, stimmt mit der ersten Näherung überein!

Ü 6.6.1

Das *Gesamtpotential* eines linear-elastischen Stabes, $\Pi = U + \Pi_a$, ist bei einer äußeren Belastung $p = p(x)$ durch

$$\Pi = \int_0^\ell \left[\frac{EA}{2} \varepsilon^2 - p(x)u \right] dx \quad (1)$$

gegeben. Wegen $\varepsilon = \partial u / \partial x \equiv u'$, d.h. unter Einbeziehung der *Nebenbedingung*

$$u' - \varepsilon = 0 \quad (2)$$

wird das *modifizierte Potential*

$$\tilde{\Pi} = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2} EA \varepsilon^2 - pu + \lambda(x)(u' - \varepsilon) \right] dx \stackrel{!}{=} \text{Extremum} \quad (3)$$

stationär gemacht. Darin ist λ ein *LAGRANGEScher Multiplikator*, der zwar von x abhängig ist, aber nicht variiert wird. Mithin gilt:

$$\delta \tilde{\Pi} = \int_0^\ell (EA \varepsilon - \lambda) \delta \varepsilon dx - \int_0^\ell p \delta u dx + \int_0^\ell \lambda \delta u' dx = 0. \quad (4)$$

Darin kann das dritte Integral durch partielle Integration gemäß

$$\int_0^\ell \lambda \delta u' dx = \lambda \delta u \Big|_0^\ell - \int_0^\ell \lambda' \delta u dx \quad (5)$$

ausgedrückt werden, wobei die Vertauschbarkeit der Reihenfolge von Variation und Differentiation berücksichtigt wurde:

$$\delta u' \equiv \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta u). \quad (6)$$

Aufgrund der vorgegebenen kinematischen Randbedingungen $u(0) = u(\ell) = 0$ kann u am Rande nicht variiert werden, so dass der integralfreie Term in (5) identisch verschwindet. Somit geht (4) in

$$\delta \tilde{\Pi} = \int_0^\ell (EA \varepsilon - \lambda) \delta \varepsilon dx - \int_0^\ell (p + \lambda') \delta u dx = 0 \quad (7)$$

über. Daraus kann man folgern:

$$1) \quad EA\varepsilon = \lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \sigma A \equiv S} \quad (8)$$

$$2) \quad p + \lambda' = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \leftarrow S \\ \boxed{\begin{array}{c} \overrightarrow{p \, dx} \\ \overleftarrow{dx} \end{array}} \rightarrow S + dS \end{array} \quad (9)$$

Der *LAGRANGEsche Multiplikator* kann als *Stabkraft* gedeutet werden.

Ü 6.6.2

Im Gegensatz zu Ü 6.6.1 ist das *Gesamtpotential* durch

$$\Pi = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2} EA \varepsilon^2 - p(x) u \right] dx - P u(\ell) \quad (1)$$

gegeben. Unter Einbeziehung der Nebenbedingung $u' - \varepsilon = 0$ wird das *modifizierte Potential*

$$\tilde{\Pi} = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2} EA \varepsilon^2 - p u + \lambda(x)(u' - \varepsilon) \right] dx - P u(\ell) \stackrel{!}{=} \text{Extremum} \quad (2)$$

stationär gemacht:

$$\delta \tilde{\Pi} = \int_0^\ell (EA \varepsilon - \lambda) \delta \varepsilon dx - \int_0^\ell p \delta u dx + \int_0^\ell \lambda \delta u' dx - P \delta u(\ell) \stackrel{!}{=} 0 \quad (3)$$

Darin wird das dritte Integral partiell integriert:

$$\int_0^\ell \lambda \delta u' dx = \lambda \delta u \Big|_0^\ell - \int_0^\ell \lambda' \delta u dx = \lambda(\ell) \delta u(\ell) - \int_0^\ell \lambda' \delta u dx. \quad (4)$$

Aufgrund der Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u(\ell) \neq 0$ verschwindet der integralfreie Term jetzt **nicht** im Gegensatz zu Ü 6.6.1. Setzt man (4) in (3) ein, so erhält man

$$\delta \tilde{\Pi} = \int_0^\ell (EA \varepsilon - \lambda) \delta \varepsilon dx - \int_0^\ell (p + \lambda') \delta u dx + [\lambda(\ell) - P] \delta u(\ell) = 0 \quad (5)$$

Daraus kann man folgern:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad EA \varepsilon = \lambda \Rightarrow \lambda = \sigma A \equiv S \\ 2) \quad p + \lambda' = 0 \end{array} \right\} \text{ wie in Ü 6.6.1}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3) \quad \lambda(\ell) = P \\ \text{Aus 2) folgt mit 3):} \\ \lambda' = -p(x) \Rightarrow \lambda(x) = \int_x^\ell p(\xi) d\xi + P \end{array} \right\} \text{zusätzlich gegenüber Ü 6.6.1}$$

An der Einspannung ergibt sich die Stabkraft S zu: $S_0 \equiv \lambda(0) = \int_0^\ell p(x) dx + P$.

Euler DGL sei zusätzlich gesucht.

$$\Pi = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2} EA \varepsilon^2 - p(x) u \right] dx - Pu(\ell)$$

$$\boxed{\varepsilon = u'}; \quad Pu(\ell) = P \int_{u^*=0}^{u^*=u(\ell)} du^*$$

$$\varepsilon = u' \equiv \frac{du}{dx} \Rightarrow du = u' dx$$

$$Pu(\ell) = P \int_0^\ell u' dx$$

$$\Rightarrow \Pi = \int_0^\ell \left[\underbrace{\frac{1}{2} EA u'^2 - Pu' - p(x)u}_{F=F(u, u')} \right] dx$$

EULER:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u} = -p(x) \\ \frac{\partial F}{\partial u'} = EA(x)u' - P \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = (EA(x)u')' \end{array} \right\} -p(x) - (EA(x)u')' = 0 \quad \text{bzw.} \quad \boxed{(EA(x)u')' + p(x) = 0}$$

Diese DGL stimmt mit Tabelle 6.2 überein.

Ü 6.6.3

Das Gesamtpotential beträgt

$$\Pi[v(x)] = \frac{1}{2} \int_0^\ell [EI(x) v''^2 - 2q(x) v(x)] dx - Q v(\ell) , \quad (1)$$

das stationär werden soll:

$$\delta\Pi = 0 \Rightarrow \int_0^\ell [EI v'' \delta v'' - q \delta v] dx - Q \delta v(\ell) = 0. \quad (2)$$

Das erste Integral in (2) wird durch zweimalige partielle Integration folgendermaßen umgeformt:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell EI v'' \delta v'' dx &= EI v'' \delta v' \Big|_0^\ell - \int_0^\ell (EI v'')' \delta v' dx = \\ &= EI v'' \delta v' \Big|_0^\ell - (EI v'')' \delta v \Big|_0^\ell + \int_0^\ell (EI v'')'' v dx . \end{aligned} \quad (3)$$

Darin verschwinden die integralfreien Terme an der unteren Grenze, da aufgrund der Einspannbedingung in $x = 0$ keine virtuellen Verschiebungen und Verdrehungen zugelassen werden können:

$$\delta v(0) = \delta v'(0) \equiv 0 . \quad (4)$$

Mithin geht (2) unter Berücksichtigung von (3) und (4) über in:

$$\int_0^\ell [(EI v'')'' - q(x)] \delta v dx + EI v''(\ell) \delta v'(\ell) - [Q + (EI v'')'] \delta v(\ell) \stackrel{!}{=} 0 . \quad (5)$$

Daraus können folgende Ergebnisse gefolgert werden:

1) *Differentialgleichung der Biegelinie:*

$$\boxed{(EI v'')'' - q(x) = 0} \quad (6)$$

2) *Natürliche Randbedingungen:*

$$\boxed{EI(\ell) v''(\ell) = 0} \quad \text{und} \quad \boxed{Q + (EI(\ell) v''(\ell))' = 0} \quad (7a,b)$$

Die natürliche Randbedingung (7a) entspricht der statischen Randbedingung

$$M(\ell) = -EI(\ell) v''(\ell) = 0. \quad (8)$$

Damit erhält man aus (7b):

$$Q = M'(\ell). \quad (9)$$

Ü 6.6.4

Nimmt man an, dass $q(x)$ gegenüber S klein genug ist, so dass die Durchbiegung klein bleibt, dann kann S überall gleich entlang der Saite angenommen werden.

Die *Formänderungsenergie* U kann man sich aus zwei Anteilen zusammengesetzt denken: einem Anteil U_1 infolge der anfänglichen Anspannung, bevor die Querbelastung $q(x)$ einsetzt, und einem Anteil U_2 infolge der Streckung, die durch die Querbelastung hervorgerufen wird. Dieser Term ergibt sich als Produkt aus der *konstanten* Spannkraft S und der gesamten Verlängerung der Faser:

$$U_2 = S \int_0^\ell (ds - dx) = S \int_0^\ell \left(\sqrt{dx^2 + dv^2} - dx \right) . \quad (1)$$

Darin kann der Integrand bei kleinen Verformungen der Saite gemäß

$$\left(\sqrt{1 + v'^2} - 1 \right) dx \approx \left(1 + \frac{1}{2} v'^2 + \dots - 1 \right) dx \approx \frac{1}{2} v'^2 dx \quad (2)$$

angenähert werden, so dass man schließlich für das Gesamtpotential folgenden Ausdruck bekommt:

$$\Pi = U_1 + \frac{S}{2} \int_0^\ell v'^2 dx - \int_0^\ell q(x) v(x) dx , \quad (3)$$

der zu minimieren ist:

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \delta U_1 + \delta \left\{ \int_0^\ell \left[\frac{S}{2} v'^2 - q(x) v(x) \right] dx \right\} = 0. \quad (4)$$

Mit $F(x, v, v') = \frac{1}{2} S v'^2 - q(x) v(x)$ geht die *EULERSche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial v'} \right) = 0 \quad (5.21a)$$

über in die gesuchte Differentialgleichung der vorgespannten Saite:

$$\boxed{v'' = -q(x)/S} . \quad (5)$$

Für die Durchbiegungsfläche $w = w(x, y)$ einer vorgespannten Membran erhält man eine ähnliche Differentialgleichung:

$$\boxed{\Delta w = -q(x, y)/S} , \quad (6)$$

die als *POISSONSche Differentialgleichung* bekannt ist [BETTEN, 2001] und auch für die elastische Torsion eines Stabes grundlegend ist (*Membrangleichnis*).

Bei einer *Quetschströmung* zwischen zwei Platten, die mit der Geschwindigkeit v gegeneinander bewegt werden, baut sich der Druck $p = p(x,y)$ auf, der einer *REYNOLDS-POISSON-Differentialgleichung* gehorcht:

$$\Delta p = -12\eta v/h^3. \quad (7)$$

Darin sind η die *dynamische Zähigkeit* des "gequetschten" Flüssigkeitsfilmes und h der Plattenabstand.

Die Differentialgleichung (7) ist grundlegend für die *hydrodynamische Schmierungstheorie*.

Ü 6.6.5

Der Balken habe eine Länge L , während die Länge eines Einzelementes ℓ beträgt. Für dieses Element ergibt sich ein *Gesamtpotential* von

$$\Pi_{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI v''^2 dx - \int_0^\ell q(x) v dx. \quad (1)$$

Beim Zusammenbau des Gleichungssystems

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad (2)$$

für den gesamten Balken mit dem Spaltenvektor

$$\{d\} = \{v_1 \quad \varphi_1 \quad v_2 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad v_n \quad \varphi_n\}^t \quad (3)$$

aller Knotenvariablen und dem *globalen Belastungsvektor* $\{F\}$ ist darauf zu achten, dass die Verschiebungen an den Elementgrenzen *stetig* sind (*Kompatibilitätsforderung*). Das kann durch Benutzung von *BOOLEschen Matrizen* erfolgen, mit deren Hilfe man aus der Menge aller Knotenvariablen (*globale Menge*) die entsprechenden Größen eines Einzelementes (*lokale Menge*) "herauspicken" kann:

$$\{d_{(e)}\} = [b_{(e)}]\{d\}. \quad (4)$$

Für jedes finite Element "e" innerhalb des gesamten Systems ist eine solche Beziehung anzugeben.

Ein transversal belasteter Biegebalken hat pro Knoten zwei Freiheitsgrade (v_k, φ_k) , d.h., auf jedes finite Element mit zwei Knotenpunkten kommen *vier* Freiheitsgrade $(v_{n1}, \varphi_{n1}, v_{n2}, \varphi_{n2})$. Wählt man eine Diskretisierung mit n finiten Elementen, so ist die *BOOLEsche Matrix* in (4) eine $m \times M$ Rechteckmatrix, wobei m die Anzahl der unbekannten Knotenvariablen eines Einzelementes ist; bei transversal belasteten Balken gilt: $m = 4$. Die Spaltenzahl M stimmt überein mit der Gesamtanzahl der Freiheitsgrade der Struktur; bei transversal belasteten Balken, die in n finite Elemente diskretisiert werden, gilt: $M = 2(n+1)$.

Beispielsweise werde eine Diskretisierung des Balkens in zwei finite Elemente vorgenommen. Dann gilt:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}, \quad (5a)$$

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}. \quad (5b)$$

Die *BOOLEschen Matrizen* $[b_{(1)}]$ und $[b_{(2)}]$ in (5a,b) sind nur mit Einsen und Nullen besetzt.

Benutzt man für ein Balkenelement *HERMITESche Interpolationsfunktionen*, so kann das *Gesamtpotential* (1) eines *Einzelelementes* gemäß

$$\Pi_{(e)} = \frac{1}{2} \{d_{(e)}\}^t [K_{(e)}] \{d_{(e)}\} - \{d_{(e)}\}^t \{F_{(e)}\} \quad (6)$$

ausgedrückt werden. Darin sind

$$[K_{(e)}] := \left[EI \int_0^\ell N_i''(x) N_j''(x) dx \right] \quad (7)$$

die *Steifigkeitsmatrix* eines *Einzelelementes* und

$$\{F_{(e)}\} := \left\{ \int_0^\ell q(x) N_j(x) dx \right\} \quad (8)$$

der *Belastungsvektor* eines *Einzelelementes* (Ü 3.4.3). Aus der Summation über alle n finiten Elemente erhält man das *Gesamtpotential* des *gesamten* Balkens unter Berücksichtigung von (4) zu:

$$\Pi = \sum_{e=1}^n \Pi_{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^n \{d\}^t [b_{(e)}]^t [K_{(e)}] [b_{(e)}] \{d\} - \sum_{e=1}^n \{d\}^t [b_{(e)}]^t \{F_{(e)}\}. \quad (9)$$

Darin kann man den "*globalen Verschiebungsvektor*" $\{d\}$ bzw. seine *Transposition* $\{d\}^t$ außerhalb des Summenzeichens schreiben, da in ihm die Knotenvariablen aufgelistet sind, über die nicht summiert wird. Mithin gilt:

$$\Pi = \frac{1}{2} \{d\}^t [K] \{d\} - \{d\}^t \{F\} \quad (10)$$

mit der *globalen Steifigkeitsmatrix*

$$[K] = \sum_{e=1}^n [b_{(e)}]^t [K_{(e)}] [b_{(e)}] \quad (11)$$

und dem *globalen Belastungsvektor*

$$\{F\} = \sum_{e=1}^n \{b_{(e)}\}^t \{F_{(e)}\}. \quad (12)$$

Nach dem Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials muss die erste Variation $\delta\Pi = 0$ verschwinden (Ü 6.1.1):

$$\delta\Pi = \frac{1}{2} (\delta\{d\}^t [K] \{d\} + \{d\}^t [K] \delta\{d\}) - \delta\{d\}^t \{F\} \stackrel{!}{=} 0. \quad (13)$$

Da $[K]$ symmetrisch ist, stimmen die beiden Terme in der runden Klammer überein (Ü 6.1.1), so dass man folgern kann:

$$\delta\{d\}^t ([K] \{d\} - \{F\}) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow [K] \{d\} = \{F\}.$$

Die Freiheitsgrade $\{d\}$ werden sich im Gleichgewichtszustand so "einstellen", dass Π minimal wird (Bild 6.2).

Ü 6.7.1

Der Verschiebungsansatz kann nach Ü 3.1.22 durch

$$\{u(x)\} = [N] \{d\} \quad (1)$$

ausgedrückt werden mit $[N]$ als *Formfunktionsmatrix* und $\{d\}$ als Spaltenmatrix der *Knotenverschiebungen*.

Die *LAGRANGEsche Funktion* ist

$$L^e = T^e - \Pi^e = \frac{\rho A}{2} \int_0^\ell \{\dot{u}(x)\}^2 dx - \frac{EA}{2} \int_0^\ell \{u'(x)\}^2 dx + \{F\}^t \{d\}. \quad (2)$$

Darin setzte man (1) ein, wobei folgende Matrizenmultiplikationen zu beachten sind:

$$\{\dot{u}(x)\}^2 \equiv \{\dot{u}(x)\}^t \{\dot{u}(x)\} = \{[N] \{\dot{d}\}\}^t [N] \{\dot{d}\},$$

$$\boxed{\{\dot{u}(x)\}^2 = \{\dot{d}\}^t [N]^t [N] \{\dot{d}\}}, \quad (3)$$

$$\{u'(x)\}^2 \equiv \{u'(x)\}^t \{u'(x)\} = \{[N']\{d\}\}^t [N']\{d\},$$

$$\boxed{\{u'(x)\}^2 = \{d\}^t [N']^t [N'] \{d\}}. \quad (4)$$

Damit wird:

$$L^e = \frac{1}{2} \{\dot{d}\}^t [m] \{\dot{d}\} - \frac{1}{2} \{d\}^t [K^e] \{d\} + \{F\}^t \{d\}, \quad (6.142)$$

so dass die *EULERSche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial L^e}{\partial \{d\}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^e}{\partial \{\dot{d}\}} \right) = \{0\} \quad (6.143)$$

der Variationsaufgabe $\delta \int_{t_1}^{t_2} L^e dt \stackrel{!}{=} 0$ in die *Bewegungsgleichung*

$$\boxed{[m] \{\ddot{d}\} + [K^e] \{d\} = \{F\}} \quad (5)$$

übergeht. Darin sind zur Abkürzung die *konsistente Massenmatrix*

$$\boxed{[m] := \rho A \int_0^\ell [N]^t [N] dx = \rho A \ell \int_0^1 [N]^t [N] d\xi}$$

und die *Steifigkeitsmatrix*

$$\boxed{[K^e] := \frac{EA}{\ell} \int_0^1 [N'(\xi)]^t [N'(\xi)] d\xi}$$

eingeführt. Für ein finites Stabelement mit zwei Knotenpunkten und einem linearen Verschiebungsansatz

$$u(\xi) = N_1(\xi) u_1 + N_2(\xi) u_2 = (1 - \xi) u_1 + \xi u_2$$

erhält man:

$$[m] = \frac{\rho A \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad [K^e] = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Ergebnisse stimmen mit den in Ü 3.1.22 und Ü 3.2.11 gefundenen Ergebnissen überein.

Ü 6.7.2

Die *kinetische Energie* ist durch

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \rho A \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \quad (1)$$

gegeben. Das *Gesamtpotential* ist:

$$\Pi[v(x)] = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx - \int_0^{\ell} q v dx. \quad (6.113)$$

Nach dem *HAMILTONschen Prinzip* gilt:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt \stackrel{!}{=} 0. \quad (2)$$

Daraus folgt mit (1) und (6.113):

$$\int_0^{\ell} \int_{t_1}^{t_2} \rho A \frac{\partial v}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) dt dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} q \delta v dx dt = 0. \quad (3)$$

Durch partielle Integration erhält man:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial v}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} dt = \frac{\partial v}{\partial t} \delta v \bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v dt. \quad (4)$$

Darin verschwindet der integralfreie Term, da man $\delta v(t_1) = \delta v(t_2) = 0$ setzen kann. Analog erhält man:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx &= \int_0^{\ell} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta v) dx = \\ &= EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) \bigg|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) dx = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \delta v \bigg|_0^{\ell} + \int_0^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \delta v dx = \int_0^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \delta v dx. \quad (5) \end{aligned}$$

Die integralfreien Terme verschwinden wegen

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\delta v\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\delta v\right)_{x=\ell} = (\delta v)_{x=0} = (\delta v)_{x=\ell} = 0. \quad (6)$$

Setzt man (4) und (5) in (3) ein, so folgt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \left\{ -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + q \right\} \delta v \, dx \, dt \stackrel{!}{=} 0. \quad (7)$$

Da die Variation δv bis auf die Randbedingungen (6) willkürlich ist, muss der Integrand in (7) verschwinden:

$$\boxed{\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = q(x, t)}. \quad (8)$$

Ergänzung: Im Allgemeinen setzt sich die *kinetische Energie* eines transversal schwingenden Balkens im Gegensatz zu (1) aus zwei Termen zusammen:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho I_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right)^2 dx. \quad (1^*)$$

Der erste Term stellt die *kinetische Energie* infolge der *translatorischen Bewegung* $v = v(x, t)$ in vertikaler Richtung y dar. Der zweite Term berücksichtigt die *Winkelgeschwindigkeit* $\partial(\partial v / \partial x) / \partial t \equiv (\partial v / \partial x)^\bullet$ eines Balkenelementes dx um die z -Achse. Während $\rho A dx$ im ersten Integral die Masse des Balkenelementes dx ist, stellt $\rho I_z dx$ das *Massenträgheitsmoment* des Balkenelementes dx um die z -Achse dar. Mithin drückt der zweite Term in (1*) die *kinetische Energie* infolge der *Rotation* der Balkenelemente um die z -Achse aus. Dieser Beitrag kann in den meisten Fällen, insbesondere bei dünnen Balken, vernachlässigt werden.

Im Folgenden soll dies an einem Beispiel gezeigt werden. Dazu ist es zweckmäßig, in (1*) die dimensionslose Koordinate $\xi = x / \ell$ einzuführen:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \ell \int_0^1 \rho A \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 d\xi + \frac{1}{2} \ell \int_0^1 \rho \frac{I_z}{\ell^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \xi} \right)^2 d\xi}. \quad (1^{**})$$

Betrachtet man beispielsweise einen Balken mit konstanter Dichte ρ , konstanter Querschnittsfläche A und konstantem *Flächenträgheitsmoment* I_z , so kann (1**) durch

$$T = \frac{1}{2} \rho A \ell \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 d\xi + \frac{1}{2} \rho \frac{I_z}{\ell} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \xi} \right)^2 d\xi$$

ausgedrückt werden. Der Vergleich der Faktoren vor den beiden Integralen führt auf das Verhältnis

$$\frac{I_z}{A \ell^2} = \frac{\iint y^2 dy dz}{\ell^2 \iint dy dz}$$

das für einen Rechteckbalken der Breite b und Höhe h durch

$$I_z / A \ell^2 = (h / \ell)^2 / 12$$

gegeben ist. Hiernach wäre selbst für Balken mit $h / \ell = 1 / 3$ wie in Bild 4.6 der

Einfluss der *rotatorischen Trägheit* von $I_z / A \ell^2 = 1 / 108 \approx 0,01 \hat{=} 1\%$ vernachlässigbar.

Zur genaueren Berücksichtigung der Balkenmasse sei auch auf Ü 3.5.6 in Band 1 hingewiesen, wo die *Übertragungsmatrix* eines *harmonisch schwingenden Balkenfeldes* konstanter *Massenbelegung* mit und ohne *Drehträgheit* ermittelt wird.

Ü 6.7.3

Da Variation und Integration *kommutativ* sind, folgt aus (6.134b):

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_k, \dot{q}_k) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Darin kann $\delta \dot{q}_k = (\delta q_k)^\bullet$ gesetzt werden, da auch Variation und Differentiation nach der Zeit *kommutativ* sind. Somit kann folgende Identität eingeführt werden:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} (\delta q_k) \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) - \delta q_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right). \quad (2)$$

Damit geht (1) in

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (3)$$

über. Zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 verschwinden die *virtuellen Verschiebungen* δq_k gemäß (6.123) und damit der integralfreie Term in (3). Nach dem "*Fundamentallemma der Variationsrechnung*" kann weiterhin gefolgert werden, dass der Ausdruck in der eckigen Klammer unter dem Integralzeichen für jedes $k = 1, 2, \dots, n$ verschwinden muss, was der *EULERSchen Differentialgleichung* (6.121) entspricht.

Ü 6.7.4

Aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) und wegen (6.31) gilt analog (6.97) die Beziehung

$$\sigma_{ji} \delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ji} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \equiv \sigma_{ji} \delta u_{i,j}. \quad (1)$$

Damit kann das Volumenintegral auf der rechten Seite in (6.130) unter Berücksichtigung des *GAUSSschen Satzes* analog (6.99) folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV &\equiv \int_V [(\sigma_{ji} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ji,j} \delta u_i] dV = \\ &= \int_{S_p} \sigma_{ji} \delta u_i n_j dS - \int_V \sigma_{ji,j} \delta u_i dV. \end{aligned} \quad (2)$$

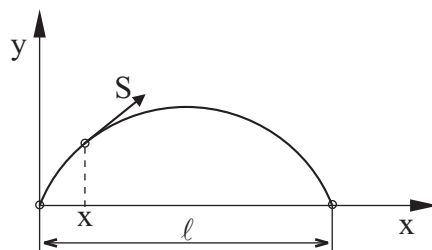
Damit kann (6.130) auf die Form

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + f_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_{S_p} (p_i - \sigma_{ji} n_j) \delta u_i dS \stackrel{!}{=} 0$$

gebracht werden. Darin muss jedes Integral für sich verschwinden, so dass aufgrund des *Fundamentallemmas der Variationsrechnung* unmittelbar die *Bewegungsgleichungen* (6.135) und die *natürlichen Randbedingungen* (6.29) folgen.

Ü 6.7.5

a) Die Bewegungsgleichung einer Saite kleiner Auslenkung



Biegesteifigkeit $EI \equiv 0$,
 $S \triangleq$ Spannkraft,
 $y = y(x, t) \triangleq$ Auslenkung
 aus der Ruhelage

Die Längenänderung ergibt sich zu

$$\Delta l = \int_0^\ell ds - \ell = \int_0^\ell \sqrt{1 + y'^2} dx - \ell. \quad (1a)$$

Bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in y'^2 gilt:

$$\sqrt{1 + y'^2} \approx 1 + \frac{1}{2} y'^2 + \dots, \text{ so dass sich (1a) zu}$$

$$\Delta \ell = \frac{1}{2} \int_0^\ell y'^2 dx \quad (1b)$$

vereinfacht. Damit wird aufgrund der konstanten Vorspannung S die *potentielle Energie* $S \cdot \Delta \ell$ gespeichert, die gleich der *Formänderungsarbeit* ist.

Es sei μ die Masse je Längeneinheit der Saite. Dann erhält man die *kinetische Energie* zu:

$$T = \int_{x=0}^\ell \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 ds \approx \frac{\mu}{2} \int_0^\ell \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (2)$$

Die *LAGRANGE-Funktion* wird:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - S \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2q(x, t) y(x, t) \right] dx. \quad (3)$$

Darin ist in Π zusätzlich ein *äußeres Potential* $\Pi_a = - \int_0^\ell q y dx$ infolge einer

Querbelastung $q = q(x, t)$ berücksichtigt.

Nach dem *HAMILTONschen Prinzip* (6.314a, b) gilt:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt \stackrel{!}{=} 0, \quad (4)$$

d.h., wegen (3) ist das Doppelintegral

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell [\mu \dot{y}^2 - S y'^2 + 2q(x, t) y] dx dt \quad (5)$$

stationär zu machen. Dazu entnehme man der allgemeinen Form (5.66) die *EULERSche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = 0, \quad (6)$$

die dem Funktional (5) zugeordnet ist, so dass mit

$$F := \mu \dot{y}^2 - S y'^2 + 2q(x, t) y \quad (7)$$

aus (6) unmittelbar die gesuchte *Bewegungsgleichung*

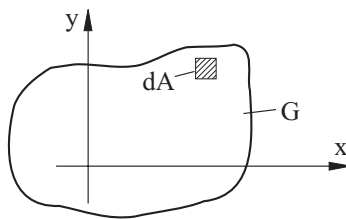
$$\boxed{\mu \ddot{y} = S y'' + q(x, t)} \quad (8)$$

folgt.

Zur Herleitung von (8) kann man auch wie in Ü6.7.2 vorgehen, d.h. von (4) ausgehen. Umgekehrt hätte man in Ü6.7.2 wie oben, d.h. vom entsprechenden Doppelintegral [analog (5)] ausgehen können! Im stabilen Gleichgewichtszustand folgt aus (8): $y'' = -q(x)/S$ gemäß Ü6.6.4.

b) Die Bewegungsgleichung einer Membran flacher Auslenkung

Bezüglich ihrer Belastbarkeit kann eine *Membran* als „zweidimensionale Saite“ bzw. als sehr dünne Platte **ohne Biegesteifigkeit** aufgefasst werden. Beispiele sind: dünne ebene Platten in Lautsprechern, Telefonapparaten, Mikrofonen zur Schallerzeugung bzw. -aufnahme, ferner Seifenhaut. Zur Herleitung der Differentialgleichung kann man analog zur Herleitung der Bewegungsgleichung für die Saite vorgehen.



Die Membran sei in der x-y-Ebene aufgespannt (Gebiet G). Ein Flächenelement im Ruhezustand ist durch $dA = dx dy$ gegeben. Aufgrund der Auslenkung $z(x, y, t)$ geht dieses Membranelement in das Oberflächenelement

$$dA^* = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dA \quad (9)$$

über [\Rightarrow Gl. (5.2)]. Bei *flachen* Auslenkungen kann unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung die Änderung des Flächeninhaltes analog (1b) durch

$$\Delta A = \iint_G dA \cdot -dA = \frac{1}{2} \iint_G \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (10)$$

ausgedrückt werden. Dabei wurde die Näherung $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ benutzt, die für genügend kleine Werte von ε brauchbar ist.

Nimmt man S als Spannkraft je Längeneinheit in der Membran an, so wird analog zur Saite die *potentielle Energie* $S \cdot \Delta A$ gespeichert. Die Membran sei durch eine Lastverteilung $q(x, y, t)$ fremderregt, so dass ein *äußeres Potential*

$$\Pi_a = - \iint q(x, y, t) dx dy \quad (11)$$

zu berücksichtigen ist.

Es sei μ die Masse je Flächeneinheit. Dann kann die kinetische Energie bei flacher Auslenkung durch

$$T = \frac{\mu}{2} \iint_G \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (12)$$

ausgedrückt werden.

Aus (10), (11) und (12) setzt sich die *LAGRANGE-Funktion* $L = T - \Pi$ zusammen, so dass nach dem *HAMILTONschen Prinzip* das Dreifachintegral

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \iint_G \left[\mu \dot{z}^2 - S(z_x^2 + z_y^2) + 2qz \right] dx dy dt \quad (13)$$

stationär zu machen ist. Darin bedeuten: $\dot{z} \equiv \partial z / \partial t$, $z_x \equiv \partial z / \partial x$ und $z_y \equiv \partial z / \partial y$.

Die *EULERSche Differentialgleichung* (5.66) für das Dreifachintegral (13) lautet:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial z_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial z_y} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \right) = 0, \quad (14)$$

so dass mit dem Integranden F aus (13) unmittelbar die gesuchte *Bewegungsgleichung* analog (8) zu

$$\boxed{\boxed{\mu \ddot{z} = S \Delta z + q(x, y, t)}} \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (15)$$

folgt. Für das statische (stabile) Gleichgewicht (\rightarrow *Minimum des Gesamtpotentials*

Π) folgt aus (15) die *POISSONSche Differentialgleichung* $\boxed{\Delta z = -q(x, y)/S}$ ge-

mäß Ü 6.1.1 und Ü 6.6.5.

Lösungen der Übungsaufgaben, Kapitel 7

Ü 7.1.1

a) Das *Gesamtpotential* ist nach (6.113) für den skizzierten Balken durch

$$\Pi[v(x)] = \frac{1}{2} EI \int_0^\ell v''^2 dx - F v(\ell) \quad (1)$$

gegeben. In (1) wird ein *RITZ-Ansatz*

$$v(x) \approx v_n(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) c_i \quad (7.6)$$

mit zulässigen Funktionen $\psi_i(x)$ eingesetzt. Aufgrund der homogenen Randbedingungen

$$v(0) = 0 \quad \text{und} \quad v'(0) = 0 \quad (2a,b)$$

sind die Funktionen

$$\psi_1(x) = x^2, \quad \psi_2(x) = x^3, \quad \psi_3(x) = x^4 \quad (3)$$

geeignet. Mithin sei (7.6) gemäß

$$\boxed{v(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4} \quad (4)$$

gewählt. Damit wird das Funktional zu:

$$\Pi[v(x)] = \frac{1}{2} EI \int_0^\ell \left(2c_1 + 6c_2 x + 12c_3 x^2 \right)^2 dx - F \left(c_1 \ell^2 + c_2 \ell^3 + c_3 \ell^4 \right). \quad (5)$$

Nach dem *Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials* gilt:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 4EI \int_0^\ell (c_1 + 3c_2 x + 6c_3 x^2) dx - F \ell^2 = 0 ,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 12EI \int_0^\ell (c_1 + 3c_2 x + 6c_3 x^2) x \, dx - F\ell^3 = 0 ,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_3} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 24EI \int_0^\ell (c_1 + 3c_2 x + 6c_3 x^2) x^2 \, dx - F\ell^4 = 0 .$$

Daraus erhält man nach Integration das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 4 & 6\ell & 8\ell^2 \\ 6 & 12\ell & 18\ell^2 \\ 8 & 18\ell & 144\ell^2/5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \frac{F\ell}{EI} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

mit der Lösung:

$$\begin{aligned} &> \text{solve}(\{4*c[1]+6*\ell*c[2]+8*\ell^2*c[3]=F\ell/EI, \\ &> \quad 6*c[1]+12*\ell*c[2]+18*\ell^2*c[3]=F\ell/EI, \\ &> \quad 8*c[1]+18*\ell*c[2]+(144/5)*\ell^2*c[3]=F\ell/EI\}, \{c[1],c[2],c[3]\}); \\ &\quad \left\{ c_3 = 0, c_2 = -\frac{1}{6} \frac{F\ell}{EI}, c_1 = \frac{1}{2} \frac{F\ell}{EI} \right\} \end{aligned}$$

>

Damit ergibt sich die Biegelinie (4) zu:

$$\boxed{v(x) = \frac{F\ell^3}{6EI} \left(3 - \frac{x}{\ell} \right) \left(\frac{x}{\ell} \right)^2} . \quad (7)$$

Diese Lösung stimmt mit der *exakten* überein!

Allgemein gilt: Falls im gewählten *RITZ-Ansatz* (7.6) **zufällig** die exakte Lösung enthalten ist, liefert das *RITZsche Verfahren* die Ansatzfreiwerte gerade so, dass der Näherungsansatz mit der exakten Lösung übereinstimmt. Somit wird in diesem Beispiel $c_3 \equiv 0$, so dass x^4 in (4) keinen Einfluss auf die Biegelinie hat.

Das Gleichungssystem (6) kann auch aus

$$[K]\{c\} = \{F\} \quad (7.9)$$

gewonnen werden mit

$$\{F\} = \{F_j\} = \{F \psi_j(\ell)\} \quad (8)$$

und

$$[K] = [k_{ij}] = \begin{bmatrix} \ell \\ \int_0^\ell EI \psi_i'' \psi_j'' \, dx \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.12)$$

wie man leicht nachprüfen kann.

b) Betrachtet man den gesamten Balken als Einzelement mit zwei Knotenpunkten, so gilt unter Berücksichtigung der Einspannbedingungen (2a,b) die Matrizen-gleichung

$$\frac{2EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 6 & 3\ell & -6 & 3\ell \\ 3\ell & 2\ell^2 & -3\ell & \ell^2 \\ -6 & -3\ell & 6 & -3\ell \\ 3\ell & \ell^2 & -3\ell & 2\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \phi_1 = 0 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 = -F \\ M_2 = 0 \end{Bmatrix}, \quad (6.69b)$$

woraus aufgrund der Randbedingungen die reduzierte Form

$$\frac{2EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 6 & -3\ell \\ -3\ell & 2\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

folgt mit der Auflösung:

$$\boxed{v(\ell) \equiv v_2 = \frac{-F\ell^3}{3EI} \quad \phi_2 = \frac{3}{2} \frac{v_2}{\ell} = \frac{-F\ell^2}{2EI}}. \quad (10a,b)$$

Setzt man diese Werte in den Verschiebungsansatz

$$v(x) = N_1(x) v_1 + N_2(x) \phi_1 + N_3(x) v_2 + N_4(x) \phi_2 \quad (6.55)$$

der FEM ein, so folgt unter Berücksichtigung der Einspannbedingungen $v_1 = \phi_1 = 0$ und der *HERMITESchen Formfunktionen*

$$N_3(x) = 3(x/\ell)^2 - 2(x/\ell)^3, \quad N_4(x) = -x^2/\ell + x^3/\ell^2 \quad (6.56c,d)$$

schließlich die *Biegelinie* (7).

Ü 7.1.2

a) Die Koeffizienten C_i im *RITZ-Ansatz*

$$v_n(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) C_i \quad (7.6)$$

ermittelt man aus dem Gleichungssystem

$$[K]\{c\} = \{P\} \quad (7.9)$$

mit

$$\{P\} = \{P_j\} = \left\{ \int_0^\ell q_0 \psi_j(x) dx \right\} \quad (7.11b)$$

und

$$[K] = [k_{ij}] = \left[\int_0^\ell EI \psi_i'' \psi_j'' dx \right]. \quad (7.12)$$

Ein kinematisch zulässiger Ansatz, der die kinematischen Randbedingungen erfüllt, ist durch

$$v_n(\xi) = \xi(1-\xi) \left(C_0 + C_1 \xi + C_2 \xi^2 + C_3 \xi^3 + \dots + C_n \xi^n \right) \quad (1)$$

gegeben mit $\xi \equiv x/L$. Aufgrund der Einspannung ist $v'(0) = 0$, so dass $C_0 = 0$ wird. Man kann somit folgende Ansätze heranziehen:

$$v_1(\xi) = (1-\xi)\xi^2 C_1, \quad (2)$$

$$v_2(\xi) = (1-\xi)\xi^2 (C_1 + C_2 \xi), \quad (3)$$

$$v_3(\xi) = (1-\xi)\xi^2 (C_1 + C_2 \xi + C_3 \xi^2). \quad (4)$$

Mithin gilt:

$$\psi_1 \equiv (1-\xi)\xi^2, \quad \psi_2 \equiv (1-\xi)\xi^3, \quad \psi_3 \equiv (1-\xi)\xi^4, \quad (5a,b,c)$$

$$\psi_1'' = 2(1-3\xi)/L^2, \quad \psi_2'' = 6(1-2\xi)\xi/L^2, \quad \psi_3'' = 4(3-5\xi)\xi^2/L^2. \quad (6a,b,c)$$

Man beachte: In (7.12) ist $\psi_i'' \equiv d^2 \psi_i / dx^2$. Mit $x = \xi L$ folgt: $\psi_i'' = \frac{1}{L^2} \frac{d^2 \psi_i}{d\xi^2}$,

was bei der Ermittlung von (6a,b,c) aus (5a,b,c) zu berücksichtigen ist!

Mit (5a,b,c) ermittelt man nach (7.11b) den *Belastungsvektor* $\{P\}$ in (7.9) zu:

$$\{P\} = L q_0 \{1/12 \quad 1/20 \quad 1/30\}^t \quad (7)$$

und die *Steifigkeitsmatrix* $[K]$ zu:

$$[k_{ij}] = \left[\frac{L EI}{L^4} \int_0^\ell \psi_i'' \psi_j'' d\xi \right] = \frac{4 EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6/5 & 13/10 \\ 1 & 13/10 & 52/35 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Mit (7) und (8) erhält man das lineare Gleichungssystem (7.9) zu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6/5 & 13/10 \\ 1 & 13/10 & 52/35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \frac{q_0 L^4}{8 EI} \begin{Bmatrix} 1/6 \\ 1/10 \\ 1/15 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

mit folgenden Lösungen für n verschiedene Näherungen:

n	$\frac{EI}{q_0 L^4} C_1$	$\frac{EI}{q_0 L^4} C_2$	$\frac{EI}{q_0 L^4} C_3$
1	1/48	–	–
2	1/16	-1/24	–
3	1/16	-1/24	0

(10)

Damit ergeben sich die Näherungsansätze (2), (3), (4) zu:

$$v_1(\xi) = \frac{q_0 L^4}{48 EI} (1 - \xi) \xi^2, \quad (11)$$

$$v_2(\xi) = v_3(\xi) = \frac{q_0 L^4}{48 EI} (3 - 5\xi + 2\xi^2) \xi^2. \quad (12)$$

Die Näherung (12) entspricht der *exakten Lösung*!

Die Ergebnisse (8) bis (10) und die graphischen Darstellungen der Ansätze (11) und (12) sind mit dem MAPLE-Programm gewonnen worden. Ein Computer-output ist im Folgenden abgedruckt. Darin sind die zweiten Ableitungen der RITZ-Ansätze durch $a(\xi)$, $b(\xi)$ und $c(\xi)$ gekennzeichnet.

> with(linalg):

> a(xi):=2*(1-3*xi)/L^2; b(xi):=6*(1-2*xi)*xi/L^2; c(xi):=4*(3-5*xi)*xi^2/L^2;

$$a(\xi) := \frac{2(1-3\xi)}{L^2}$$

$$b(\xi) := \frac{6(1-2\xi)\xi}{L^2}$$

$$c(\xi) := \frac{4(3-5\xi)\xi^2}{L^2}$$

> A:=matrix(1,3,[a(xi),b(xi),c(xi)]);

$$A := \begin{bmatrix} \frac{2(1-3\xi)}{L^2} & \frac{6(1-2\xi)\xi}{L^2} & \frac{4(3-5\xi)\xi^2}{L^2} \end{bmatrix}$$

> J:=multiply(transpose(A),A):

K:=4*EI/L^3*evalm((L^4/4)*map(int,J,xi=0..1));

$$K := \frac{4EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{6}{5} & \frac{13}{10} \\ 1 & \frac{13}{10} & \frac{52}{35} \end{bmatrix}$$

Mit dem Belastungsvektor

> $P := (L * q[0] * \text{vector}(3, [1/12, 1/20, 1/30]));$

$$P := L q_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

erhält man das lineare Gleichungssystem $[K]\{C\} = \{P\}$ mit folgenden Lösungen für die RITZ-Parameter:

1) Eingliedriger Näherungsansatz mit dem Parameter C_{11}

> $\text{solve}(\{1 * C[11] = L^3 / (4 * EI) * L * q[0] / 12\}, \{C[11]\});$

$$\{C_{11} = \frac{1}{48} \frac{L^4 q_0}{EI}\}$$

2) Zweigliedriger Näherungsansatz mit den Parametern C_{21} und C_{22}

> $\text{solve}(\{1 * C[21] + C[22] = L^3 / (4 * EI) * L * q[0] / 12,$

$1 * C[21] + 6/5 * C[22] = L^3 / (4 * EI) * L * q[0] / 20\}, \{C[21], C[22]\});$

$$\{C_{22} = -\frac{1}{24} \frac{L^4 q_0}{EI}, C_{21} = \frac{1}{16} \frac{L^4 q_0}{EI}\}$$

3) Dreigliedriger Näherungsansatz mit den Parametern C_{31} , C_{32} und C_{33}

> $\text{solve}(\{1 * C[31] + C[32] + C[33] = L^3 / (4 * EI) * L * q[0] / 12,$

$1 * C[31] + 6/5 * C[32] + 13/10 * C[33] = L^3 / (4 * EI) * L * q[0] / 20,$

$1 * C[31] + 13/10 * C[32] + 52/35 * C[33] = L^3 / (4 * EI) * L * q[0] / 30\},$

$\{C[31], C[32], C[33]\});$

$$\{C_{33} = 0, C_{32} = -\frac{1}{24} \frac{L^4 q_0}{EI}, C_{31} = \frac{1}{16} \frac{L^4 q_0}{EI}\}$$

Der dreigliedrige Näherungsansatz stimmt mit dem zweigliedrigen Näherungsansatz überein, da der RITZ-Parameter $C_{33} = 0$ ist. Man erhält die exakte Lösung.

Allgemein gilt: Falls im gewählten *RITZ-Ansatz* (7.6) **zufällig** die exakte Lösung enthalten ist, liefert das *RITZsche Verfahren* die Ansatzfreiwerte gerade so, dass der Näherungsansatz mit der exakten Lösung übereinstimmt. Somit wird in diesem

Beispiel $C_{33} \equiv 0$, so dass die *Testfunktion* $\psi_3 = (1-\xi)\xi^4$ gemäß (5c) in (4) keinen Einfluss auf die Biegelinie hat.

Damit ergeben sich folgende Näherungsansätze:

$$>v[1](xi):=((L^4*q[0])/(48*EI))*(1-xi)*xi^2;$$

$$v_1(\xi) := \frac{1}{48} \frac{L^4 q_0 (1-\xi) \xi^2}{EI}$$

$$>v[2](xi):=((q[0]*L^4)/(48*EI))*(3-5*xi+2*xi^2)*xi^2;$$

$$v_2(\xi) := \frac{1}{48} \frac{q_0 L^4 (3-5\xi+2\xi^2) \xi^2}{EI}$$

Die letzte Näherung v_2 stimmt mit der exakten Biegelinie überein!

Dimensionslose Darstellung der RITZ-Ansätze

$$>V[1]:=-(1-xi)*xi^2;$$

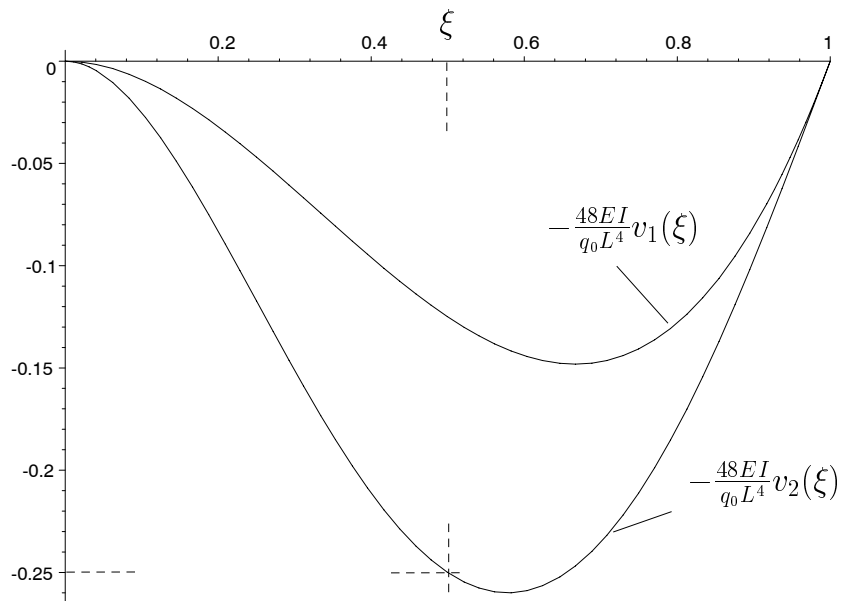
$$V_1 := -(1-\xi) \xi^2$$

$$>V[2]:=-(3-5*xi+2*xi^2)*xi^2;$$

$$V_2 := -(3-5\xi+2\xi^2) \xi^2$$

Die zweite Näherung V_2 stimmt bereits mit der exakten Biegelinie überein.

$$>plot(\{V[1],V[2]\},xi=0..1,colour=black,thickness=2);$$



b) Zunächst sei die einfachste Diskretisierung $\ell \equiv L$ betrachtet. Die *Steifigkeitsmatrix*

$$[K] = [k_{ij}] = \left[\int_0^L EI N_i''(x) N_j''(x) dx \right] \quad (6.68)$$

ist dann gegeben durch (Ziffer 6.4)

$$[K] = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Den *Lastvektor* $\{F\}$ in der Standardbeziehung

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad (14)$$

ermittelt man nach Ü 6.6.5 nach der Formel

$$\{F\} := \left\{ \int_0^L q(x) N_j(x) dx \right\}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (15)$$

Mit den *HERMITESchen Interpolationsfunktionen*

$$N_1(x) := 1 - 3(x/\ell)^2 + 2(x/\ell)^3, \quad N_2(x) := x - 2x^2/\ell + x^3/\ell^2, \quad (6.56a, b)$$

$$N_3(x) := 3(x/\ell)^2 - 2(x/\ell)^3, \quad N_4(x) := -x^2/\ell + x^3/\ell^2 \quad (6.56c, d)$$

geht (15) mit $q(x) = q_0$ und $\ell \equiv L$ über in:

$$\{F\} = \frac{1}{12} q_0 L \{6 \quad L \quad 6 \quad -L\}^t. \quad (16)$$

Der Lastvektor (15) bzw. (16) stellt die *statisch äquivalente Knotenbelastung* bzw. die *energie-äquivalente Knotenbelastung* (Ü 3.4.3) dar, wie bereits im Zusammenhang mit (3.122) erwähnt.

Mit den Randbedingungen $v_1 = \varphi_1 = v_2 = 0$ und $\varphi_2 \neq 0$ erhält man aus (14) mit (13) und (16) die Beziehung:

$$\frac{2EI}{L^3} 2L^2 \varphi_2 = -\frac{1}{12} q_0 L^2 \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = -\frac{q_0 L^3}{48EI}}. \quad (17)$$

Mit diesem Wert und den Randbedingungen $v_1 = \varphi_1 = v_2 = 0$ geht die *Biegelinie*

$$\boxed{v(x) = N_1(x) v_1 + N_2(x) \varphi_1 + N_3(x) v_2 + N_4(x) \varphi_2} \quad (6.55)$$

über in

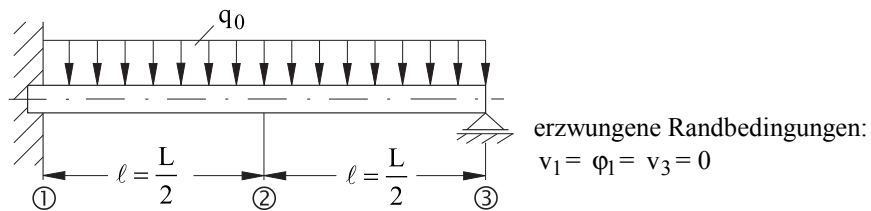
$$v(x) = N_4(x)\varphi_2 \Rightarrow \boxed{v(\xi) = \frac{q_0 L^4}{48EI} (1-\xi)\xi^2}. \quad (18)$$

Der Maximalwert v_{\max} liegt bei $\xi = 2/3$ und ergibt sich zu $v_{\max} = \frac{q_0 L^4}{324EI}$. Der

exakte Wert aus (12) ist $v_{\max} = \frac{1,75 q_0 L^4}{324EI}$ und liegt bei $\xi = 0,5785$.

Bemerkung: Die FEM-Näherung (18), die aus einem Einzelement des gesamten Balkens resultiert, stimmt mit der ersten Ritz-Näherung (11) überein, da das klassische Ritz-Verfahren immer die Gesamtstruktur betrachtet.

Zur Erhöhung der Genauigkeit wird der Balken in zwei Elemente gleicher Länge $\ell = L/2$ unterteilt (Skizze).



Bei dieser Diskretisierung ergibt sich analog Ü 6.4.2 folgende *Gesamtsteifigkeitsmatrix*

$$[K] = \frac{EI}{\ell^2} \begin{bmatrix} 12/\ell & 6 & -12/\ell & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4\ell & -6 & 2\ell & 0 & 0 \\ -12/\ell & -6 & 24/\ell & 0 & -12/\ell & 6 \\ 6 & 2\ell & 0 & 8\ell & -6 & 2\ell \\ 0 & 0 & -12/\ell & -6 & 12/\ell & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2\ell & -6 & 4\ell \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Nach Ü 6.6.5 ermittelt man den *globalen Lastvektor* zu:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \int_0^{\ell} q N_1(x) dx \\ \int_0^{\ell} q N_2(x) dx \\ \int_0^{\ell} q N_3(x) dx + \int_{\ell}^L q N_1(x) dx \\ \int_0^{\ell} q N_4(x) dx + \int_{\ell}^L q N_2(x) dx \\ \int_{\ell}^L q N_3(x) dx \\ \int_{\ell}^L q N_4(x) dx \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

Darin kann man im zweiten Element die lokale Koordinate $\bar{x} = x - \ell$ einführen. Dann gilt mit $q = q_0$ und $L - \ell = \ell$:

$$\int_{\ell}^L q N_j(x) dx = q_0 \int_0^{L-\ell} N_j(\bar{x}) d\bar{x} = q_0 \int_0^{\ell} N_j(x) dx. \quad (21)$$

Mit (6.56) und (21) erhält man den *Lastvektor* (20) zu:

$$\{F\} = \frac{1}{12} q_0 \ell \{6 \quad \ell \quad 6+6 \quad -\ell+\ell \quad 6 \quad -\ell\}^t, \quad (22a)$$

bzw. mit $\ell = L/2$ gilt:

$$\{F\} = \frac{q_0 L}{48} \{12 \quad L \quad 24 \quad 0 \quad 12 \quad -L\}^t. \quad (22b)$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen $v_1 = \varphi_1 = v_3 = 0$ gilt für den *Verschiebungsvektor* $\{d\}$ in (14):

$$\{d\} = \{0 \quad 0 \quad v_2 \quad \varphi_2 \quad 0 \quad \varphi_3\}^t. \quad (23)$$

Somit erhält man aus (14) mit (19), (22), (23) und $\ell = L/2$ das reduzierte Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 48/L & 0 & 6 \\ 0 & 4L & L \\ 6 & L & 2L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \frac{q_0 L^3}{192 EI} \begin{Bmatrix} 24 \\ 0 \\ -L \end{Bmatrix} \quad (24)$$

mit der Lösung

$v_2 = \frac{q_0 L^4}{192 EI}$	$\varphi_2 = \frac{q_0 L^3}{192 EI}$	$\varphi_3 = \frac{q_0 L^3}{48 EI}$
--------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------------

(25a,b,c)

Diese *Knotenpunktwerte* (*Stützwerte*) stimmen mit den entsprechenden Werten der exakten Biegelinie (12) überein! Damit ist auch der *stetige* und *stetig differenzierbare* Übergang an der Nahtstelle (Knotenpunkt ②) der beiden finiten Elemente gewährleistet.

Mit den *Knotenvariablen* (23), (25a,b,c) ermittelt man die Biegelinie (6.55) *elementweise*:

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \Rightarrow 0 \leq x \leq L/2 \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq \xi \leq 1/2 \quad \text{mit} \quad v_1 = \varphi_1 = 0:$$

$$v(x) = N_3(x) v_2 + N_4(x) \varphi_2 \quad . \quad (26)$$

Setzt man (6.56c,d) unter Beachtung von $\ell = L/2$ und $\xi \equiv x/L$ in (26) ein, so folgt:

$v(\xi) = \frac{q_0 L^4}{48 EI} \left(\frac{5}{2} - 3\xi \right) \xi^2$	$0 \leq \xi \leq 1/2$
--	-----------------------

(27)

$$\textcircled{2} \div \textcircled{3} \Rightarrow \ell \leq x \leq L \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq \bar{x} \leq \ell \quad \text{mit} \quad \bar{x} = x - \ell \quad \text{und} \quad v_3 = 0:$$

$$v(\bar{x}) = N_1(\bar{x}) v_2 + N_2(\bar{x}) \varphi_2 + N_4(\bar{x}) \varphi_3 \quad . \quad (28)$$

Setzt man (6.56a,b,d) unter Beachtung von $\ell = L/2$, $\bar{x} = x - \ell$ und $\bar{x}/L = \xi - 1/2$ in (28) ein, so folgt:

$v(\xi) = \frac{q_0 L^4}{48 EI} \left(-\frac{1}{2} + 3\xi - \frac{7}{2} \xi^2 + \xi^3 \right)$	$\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1$
---	-------------------------------

(29)

Die FEM-Lösungen (27) und (29) stimmen an den Knotenpunkten mit der exakten Lösung (12) überein. Die größten Abweichungen treten bei $\xi = 1/4$ bzw. $\xi = 3/4$ auf und betragen dort $100/15 \hat{=} 6\frac{2}{3}\%$ bzw. $100/27 \hat{=} 3,7\%$. Die Lösungen (18), (27) und (29) sind im folgenden MAPLE-Programm mit der exakten Biegelinie verglichen.

>

Gesamter Balken als ein finites Element betrachtet:

> $V[a](xi) := -(1-xi)*xi^2;$

$$V_1(\xi) := -(1 - \xi) \xi^2$$

Diese Näherung stimmt mit der ersten Näherung (11) nach RITZ überein und ist zu grob. Daher wird der Balken in zwei finite Elemente unterteilt. Man ermittelt für jedes Element eine Biegelinie:

> $V[a](xi) := -(5/2-3*xi)*xi^2;$ $V[b](xi) := -(1/2+3*xi-(7/2)*xi^2+xi^3);$

$$V_a(\xi) := -\left(\frac{5}{2} - 3\xi\right)\xi^2$$

$$V_b(\xi) := \frac{1}{2} - 3\xi + \frac{7}{2}\xi^2 - \xi^3$$

Im Vergleich zu diesen Lösungen ist die exakte Biegelinie gegeben durch:

$$>V[e](xi):=-(3-5*xi+2*xi^2)*xi^2;$$

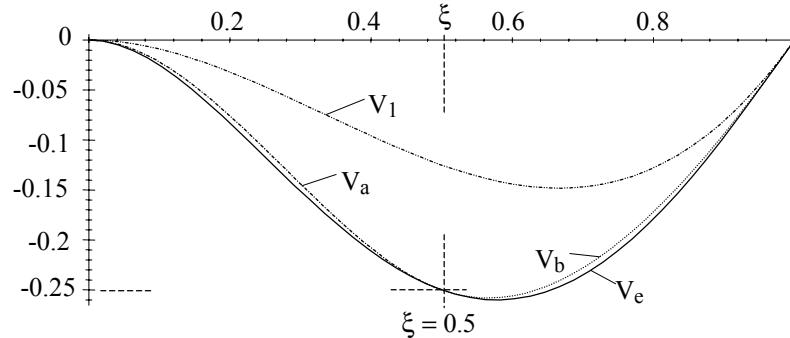
$$V_e(\xi) := -(3 - 5\xi + 2\xi^2)\xi^2$$

$$>plot1:=plot(V[1](xi),xi=0..1,linestyle=5):plot2:=plot(V[a](xi),xi=0..1/2,$$

$$> \quad \text{linestyle}=4): >plot3:=plot(V[b](xi),xi=1/2..1,linestyle=3):$$

$$> \quad plot4:=plot(V[e](xi),xi=0..1,linestyle=1):$$

$$>plots[display]({plot1,plot2,plot3,plot4});$$



Die graphische Darstellung zeigt, dass die Diskretisierung in zwei finite Elemente eine Biegelinie liefert, die in den Knotenpunkten mit der exakten Biegelinie übereinstimmt und zwischen den Knotenpunkten nur geringfügig von der exakten Lösung abweicht. In Ü 3.4.4 (Band1) wird ein ähnliches Beispiel behandelt.

Ü 7.1.3

a) Ein geeigneter *RITZ-Ansatz*, der die erzwungenen Randbedingungen

$$v(0) = v'(0) = v(L) = 0 \quad (1)$$

erfüllt, ist gegeben durch:

$$v(x) = x(x-L)(c_1x + c_2x^2) \quad (2)$$

oder alternativ mit $\xi \equiv x/L$ in der Darstellung durch:

$$\boxed{v(\xi) = (1-\xi)\xi^2(C_1 + C_2\xi)} \quad (3)$$

In dieser Darstellung haben die RITZ-Parameter C_1, C_2 dieselbe Dimension wie die Durchbiegung. Mit $I_2 = \alpha I_1$ kann das *Gesamtpotential* folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\Pi[v(x)] = \frac{1}{2} EI_1 \int_0^{\ell} v''^2 dx + \frac{\alpha}{2} EI_1 \int_{\ell}^L v''^2 dx - Q v(\ell). \quad (4)$$

Dieses *Funktional* ist hinsichtlich der Parameter C_1 und C_2 in (3) zu minimieren:

$$\partial \Pi / \partial C_1 \stackrel{!}{=} 0, \quad \partial \Pi / \partial C_2 \stackrel{!}{=} 0. \quad (5a,b)$$

Wählt man die Darstellung $v = v(\xi)$ gemäß (3), so ist wegen $\xi \equiv x / L$ folgendes zu beachten:

$$v' := \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \frac{dv}{d\xi} \Rightarrow \boxed{v'' \equiv \frac{1}{L^2} \frac{d^2 v}{d\xi^2}}. \quad (6)$$

Somit kann (4) wegen $dx = L d\xi$ durch

$$\boxed{\Pi[v(\xi)] = \frac{EI_1}{2L^3} \int_0^{1/2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi + \frac{\alpha EI_1}{2L^3} \int_{1/2}^1 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi - Q v\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (7)$$

ausgedrückt werden. Darin ist wegen (3)

$$\partial^2 v / \partial \xi^2 = C_1 (2 - 6\xi) + C_2 (6\xi - 12\xi^2) \equiv C_1 \psi_1'' + C_2 \psi_2'' \quad (8)$$

einzusetzen, so dass aus (5a,b) das lineare Gleichungssystem

$$\partial \Pi / \partial C_1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow k_{11} C_1 + k_{12} C_2 = \frac{QL^3}{8EI_1} \quad (9a)$$

$$\partial \Pi / \partial C_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow k_{21} C_1 + k_{22} C_2 = \frac{QL^3}{16EI_1} \quad (9b)$$

folgt mit den Abkürzungen:

$$k_{11} \equiv \int_0^{1/2} \psi_1''^2 d\xi + \alpha \int_{1/2}^1 \psi_1''^2 d\xi = (1 + 7\alpha) / 2, \quad (10a)$$

$$k_{12} = k_{21} \equiv \int_0^{1/2} \psi_1'' \psi_2'' d\xi + \alpha \int_{1/2}^1 \psi_1'' \psi_2'' d\xi = (1 + 31\alpha) / 8, \quad (10b)$$

$$k_{22} \equiv \int_0^{1/2} \psi_2''^2 d\xi + \alpha \int_{1/2}^1 \psi_2''^2 d\xi = (3 + 93\alpha) / 20. \quad (10c)$$

Damit erhält man aus (9a,b) die Lösung

$$C_1 = \frac{7QL^3}{2(19+13\alpha)EI_1} \quad C_2 = \frac{5(1-17\alpha)QL^3}{(19+602\alpha+403\alpha^2)EI_1} \quad (11a,b)$$

In nachstehender Tabelle sind für verschiedene α -Werte die RITZ-Parameter C_1, C_2 aufgelistet.

$\alpha = \frac{I_2}{I_1}$	$\frac{32EI_1}{QL^3}C_1$	$\frac{32EI_1}{QL^3}C_2$
1/2	224/51	-1600/561
1	7/2	-5/2
2	112/45	-352/189

Die exakte Biegelinie für $\alpha = 1$ ist nach DUBBEL gegeben durch die Beziehungen

$v(\xi) = \frac{QL^3}{32EI} \left(3 - \frac{11}{3}\xi \right) \xi^2$	$0 \leq \xi \leq 1/2$	(12a)
$v(\xi) = \frac{QL^3}{32EI} (1 - \xi) \left[1 - \frac{5}{3}(1 - \xi)^2 \right]$	$1/2 \leq \xi \leq 1$	(12b)

Im nachstehenden Bild ist der *RITZ-Ansatz* für drei verschiedene Balken ($\alpha = 1/2, \alpha = 1, \alpha = 2$) grafisch dargestellt. Darüber hinaus ist auch die exakte Lösung (12a,b) eingetragen, die allerdings nur für den speziellen Balken mit gleichmäßiger Biegesteifigkeit $EI_1 = EI_2 \equiv EI$ gilt ($\alpha = 1$). Die Abweichung von der exakten Biegelinie ist sehr gering. Beispielsweise beträgt sie bei $\xi = 1/2$ etwa 3,5 %.

>V[1](xi) := -32*(1-xi)*xi^2*(7/51-(50/561)*xi);

$$V_1(\xi) := -32 (1 - \xi) \xi^2 \left(\frac{7}{51} - \frac{50}{561} \xi \right)$$

>V[2](xi) := -32*(1-xi)*xi^2*(7/64-(5/64)*xi);

$$V_2(\xi) := -32 (1 - \xi) \xi^2 \left(\frac{7}{64} - \frac{5}{64} \xi \right)$$

>V[3](xi) := -32*(1-xi)*xi^2*(7/90-(11/189)*xi);

$$V_3(\xi) := -32 (1 - \xi) \xi^2 \left(\frac{7}{90} - \frac{11}{189} \xi \right)$$

Die exakte Lösung für $\alpha = 1$ ist im Bereich $0 < \xi < 1/2$ durch $A(\xi)$ und im Bereich $1/2 < \xi < 1$ durch $B(\xi)$ gegeben:

$$>A(xi):=-(3-(11/3)*xi)*xi^2;$$

$$A(\xi) := -\left(3 - \frac{11}{3}\xi\right)\xi^2$$

$$>B(xi):=-(1-xi)*(1-(5/3)*(1-xi)^2);$$

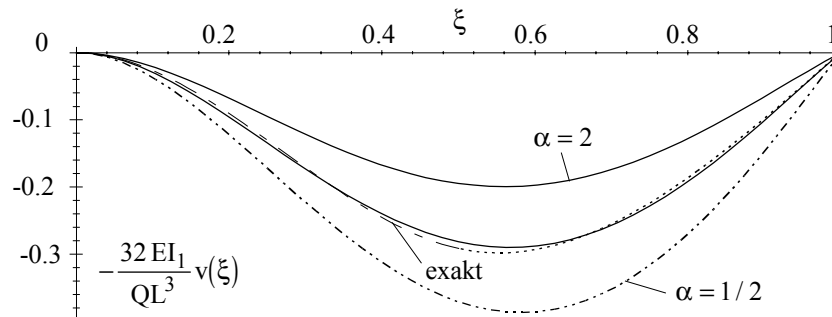
$$B(\xi) := -(1 - \xi)\left(1 - \frac{5}{3}(1 - \xi)^2\right)$$

$$>plot1:=plot(V[1](xi),xi=0..1,linestyle=5): plot2:= plot(A(xi),xi=0..1/2,$$

$$> \quad \text{linestyle=4}):plot3:=plot(B(xi),xi=1/2..1,linestyle=3):plot4:=plot(V[2](xi),$$

$$> \quad xi=0..1,linestyle>=1):plot5:=plot(V[3](xi),xi=0..1,linestyle=1):$$

$$>plots[display]({plot1,plot2,plot3,plot4,plot5});$$



b) Bei einer Diskretisierung in zwei finite Elemente der Länge $\ell = L/2$ erhält man analog Ü7.1.2 unter Berücksichtigung von $I_2 = \alpha I_1$ folgende *Gesamtsteifigkeitsmatrix*

$$[K] = \frac{4EI_1}{L^2} \begin{bmatrix} 24/L & 6 & -24/L & 6 & 0 & 0 \\ 12/L & 2L & -6 & L & 0 & 0 \\ -24/L & -6 & 24(1+\alpha)/L & -6(1-\alpha) & -24\alpha/L & 6\alpha \\ 6 & L & -6(1-\alpha) & 2(1+\alpha)L & -6\alpha & \alpha L \\ 0 & 0 & -24\alpha/L & -6\alpha & 24\alpha/L & -6\alpha \\ 0 & 0 & 6\alpha & \alpha L & -6\alpha & 2\alpha L \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Der *Belastungsvektor* $\{F\}$ ist gegeben durch:

$$\{F\} = \{0 \quad 0 \quad Q_2 = -Q \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^t, \quad (14)$$

während der Verschiebungsvektor $\{d\}$ aufgrund der Randbedingungen $v_1 = 0$ $\varphi_1 = 0$ und $v_3 = 0$ durch

$$\{d\} = \{0 \quad 0 \quad v_2 \quad \varphi_2 \quad 0 \quad \varphi_3\}^t \quad (15)$$

gegeben ist. Wegen (15) erhält man aus $[K]\{d\} = \{F\}$ mit (13) und (14) das reduzierte Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 24(1+\alpha) & -6(1-\alpha)L & 6\alpha L \\ -6(1-\alpha)L & 2(1+\alpha)L^2 & \alpha L^2 \\ 6\alpha L & \alpha L^2 & 2\alpha L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \frac{L^3}{4EI_1} \begin{Bmatrix} -Q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

mit der Lösung

$$v_2 = \frac{-QL^3}{32EI_1} \cdot \frac{(4+3\alpha)}{3(1+7\alpha)}, \quad \varphi_2 = \frac{-QL^2}{32EI_1} \cdot \frac{2(2-\alpha)}{1+7\alpha}, \quad \varphi_3 = \frac{QL^2}{32EI_1} \cdot \frac{2(3+\alpha)}{1+7\alpha}. \quad (17a-c)$$

In nachstehender Tabelle sind die *Knotenvariablen* $v_2, \varphi_2, \varphi_3$ für drei verschiedene Balken ($\alpha = 1/2, \alpha = 1, \alpha = 2$) aufgelistet.

$\alpha = \frac{I_2}{I_1}$	$\frac{32EI_1}{QL^3} v_2$	$\frac{32EI_1}{QL^2} \varphi_2$	$\frac{32EI_1}{QL^2} \varphi_3$
1/2	-11/27	-2/3	14/9
1	-7/24	-1/4	1
2	-2/9	0	2/3

Diese *Knotenpunktwerte* (*Stützwerte*) stimmen mit den entsprechenden Werten der exakten Biegelinie überein. Damit ist auch der *stetige* und *stetig differenzierbare* Übergang an der Nahtstelle (Knotenpunkt ②) der beiden finiten Elemente gewährleistet.

Mit den *Knotenvariablen* (15), (17a,b,c) ermittelt man die *Biegelinie* (6.55) *elementweise* wie in Ü 7.1.2:

$$\boxed{\textcircled{1} \div \textcircled{2}} \Rightarrow 0 \leq x \leq L/2 \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq \xi \leq 1/2 \quad \text{mit} \quad v_1 = \varphi_1 = 0 : \quad (18)$$

$$v(x) = N_3(x)v_2 + N_4(x)\varphi_2.$$

Darin sind:

$$N_3(x) = 3(x/\ell)^2 - 2(x/\ell)^3 \quad \text{und} \quad N_4(x) = -x^2/\ell + x^3/\ell^2. \quad (6.56c,d)$$

Unter Beachtung von $x=L\xi$ und $\ell=L/2$ geht damit (18) über in:

$$\boxed{v(\xi) = 4(3-4\xi)\xi^2 v_2 - 2(1-2\xi)\xi^2 L \varphi_2} \quad \boxed{0 \leq \xi \leq 1/2} \quad (19)$$

Darin sind die Knotenwerte v_2, φ_2 aus obiger Tabelle für die drei verschiedenen Balken ($\alpha = 1/2, 1, 2$) einzusetzen. In der grafischen Darstellung trägt man zweckmäßigerweise die dimensionslose Größe $\frac{32EI_1}{QL^3}v(\xi)$ über ξ auf.

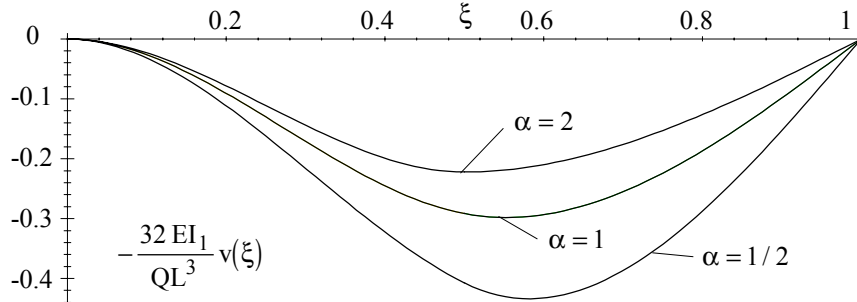
$$\boxed{\textcircled{2} + \textcircled{3}} \Rightarrow \ell \leq x \leq L \text{ bzw. } 0 \leq \bar{x} \leq \ell \text{ mit } \bar{x} = x - \ell \text{ und } v_3 = 0 :$$

$$\boxed{v(\bar{x}) = N_1(\bar{x})v_2 + N_2(\bar{x})\varphi_2 + N_4(\bar{x})\varphi_2} . \quad (20)$$

Unter Beachtung von $\ell = L/2$, $\bar{x} = x - \ell$ und $\bar{x}/L = \xi - 1/2$ gehen die *HERMITE-schen Interpolationspolynome* in (20) über in:

$N_1(\xi) = -4(1 - 6\xi + 9\xi^2 - 4\xi^3)$	$1/2 \leq \xi \leq 1$	(21a)
$N_2(\xi) = -2(1 - 4\xi + 5\xi^2 - 2\xi^3)L$	$1/2 \leq \xi \leq 1$	(21b)
$N_4(\xi) = -(1 - 5\xi + 8\xi^2 - 4\xi^3)L$	$1/2 \leq \xi \leq 1$	(21d)

Die Durchbiegungen (19) und (20) sind für die drei verschiedenen Balken ($\alpha = 1/2, 1, 2$) in der nachstehenden MAPLE-Grafik dargestellt.



Die *FEM-Lösung* stimmt mit der *exakten Lösung* (12a,b) überein, wie man leicht überprüfen kann.

Ü 7.1.4

Man gehe aus vom *Funktional*

$$\boxed{J[\Phi(x, y)] = \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - 4\Phi \right] dx dy} . \quad (7.42)$$

Die *Torsionsfunktion* $\Phi(x, y)$ muss auf der Randkontur verschwinden, so dass ein Ansatz in Form der Randkontur zulässig ist.

a) Kreisquerschnitt

Zulässige eingliedrige Ansätze, die am Rande $r = r_0$ verschwinden, wären beispielsweise

$$\Phi_1 = C_1(r_0^2 - x^2 - y^2) \quad \text{oder} \quad \Phi_{1'} = C_{1'}(r_0 - \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (1a,b)$$

oder auch ein mehrgliedriger Ansatz:

$$\Phi_n = (r_0^2 - x^2 - y^2)(C_1 + C_2 x^2 y^2 + C_3 x^4 y^4 + \dots). \quad (2)$$

Wählt man den Ansatz (1a) aus und setzt ihn in das *Funktional* (7.42) ein, so erhält man eine *Funktion* vom Ansatzfreiwert C_1 :

$$J(C_1) = 4 \iint_A [C_1^2(x^2 + y^2) - C_1(r_0^2 - x^2 - y^2)] \, dx \, dy, \quad (3)$$

die man zweckmäßigerweise in *Polarkoordinaten*

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (4a,b)$$

mit der *JACOBI'schen Determinante*

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \quad (5)$$

darstellt:

$$J(C_1) = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} [C_1^2 r^2 - C_1(r_0^2 - r^2)] r \, dr \, d\varphi. \quad (6)$$

Der Parameter C_1 muss so bestimmt werden, dass (6) minimal wird:

$$\frac{\partial J(C_1)}{\partial C_1} = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} [2C_1 r^2 - (r_0^2 - r^2)] r \, dr \, d\varphi = 0. \quad (7)$$

Nach Integration folgt schließlich der "optimale" Parameter C_1 zu:

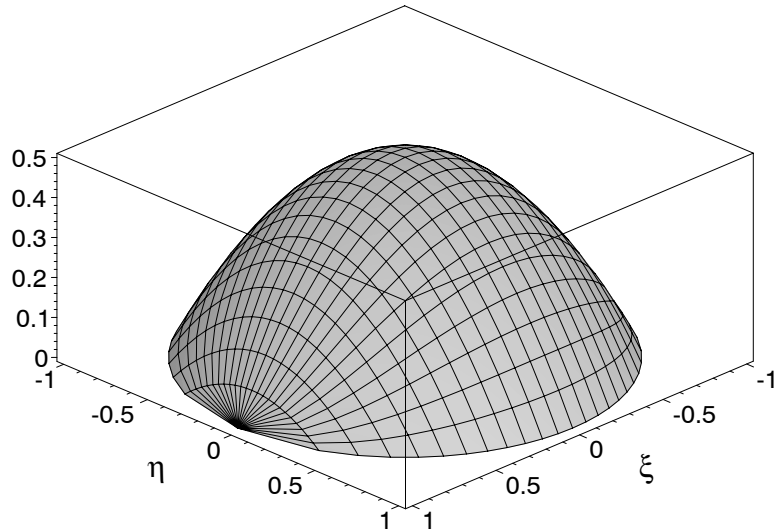
$$C_1 = 1/2 \Rightarrow \boxed{\Phi_1 = (r_0^2 - x^2 - y^2)/2}. \quad (8)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit der exakten Lösung überein; denn die *POISSONSche Differentialgleichung* $\Delta\Phi = -2$ wird mit (8) erfüllt. Die Torsionsfunktion (8) ist im Bild dargestellt, das mit Hilfe des MAPLE-Programms erstellt wurde.

`>Phi(xi,eta):=(1-xi^2-eta^2)/2;`

$$\Phi(\xi, \eta) := \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2$$

`>plot3d(Phi(xi,eta),xi=-1..1,eta=-sqrt(1-xi^2)..sqrt(1-xi^2), axes=boxed);`



Der *Ellipsenquerschnitt* und *Dreiecksquerschnitt* werden ähnlich behandelt.

Ergänzung:

Ansatz (1b): $\Phi_1 = C_{1'} \left(r_0 - \sqrt{x^2 + y^2} \right)$, eingesetzt in das Funktional (1):

$$J(C_1) = \iint_A \left[C_{1'}^2 - 4C_{1'} \left(r_0 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] dx dy$$

Zweckmäßigerweise führt man Polarkoordinaten ein:

$$J(C_{1'}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left[C_{1'}^2 - 4C_{1'} (r_0 - r) \right] r dr d\varphi$$

Der Ansatzfreiwert $C_{1'}$ wird so bestimmt, dass $J(C_{1'})$ extremal wird:

$$\frac{\partial J(C_{1'})}{\partial C_{1'}} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} [2C_{1'} - 4(r_0 - r)] r dr d\varphi \stackrel{!}{=} 0.$$

Daraus ergibt sich der Ansatzfreiwert $C_{1'}$ zu:

$$\boxed{C_{1'} = \frac{2}{3} r_0}$$

so dass man schließlich die Näherung

$$\boxed{\Phi_{1'} = \frac{2}{3} r_0 \left(r_0 - \sqrt{x^2 + y^2} \right)} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\Phi_{1'} = \frac{2}{3} r_0 (r_0 - r)}$$

erhält. Zur Überprüfung ermittle man das Residuum $R = \Delta\Phi + 2$ mit

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} :$$

$$\boxed{R = 2 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r}}.$$

Das Residuum verschwindet nur auf einem Kreis mit dem Radius $r = 2r_0/3$ und liegt um Bereich $[-\infty \leq R \leq 4/3]$, d.h., die Näherung ist unbrauchbar!

Wählt man den zweigliedrigen Ansatz

$$\Phi_2 = C_1(r_0 - r) + C_2(r_0 - r)^2,$$

so bestimmt man die Ansatzfreiwerte zu:

$$C_1 = r_0 \quad \text{und} \quad C_2 = -1/2.$$

Damit erhält man die exakte Lösung

$$\boxed{\Phi = \frac{1}{2} (r_0^2 - r^2)}$$

für den Kreisquerschnitt!

Ü 7.1.5

Für ein *gleichseitiges Dreieck* existiert eine *analytische Lösung* [BETTEN, 2001].

Die Torsionsfunktion muss die Randbedingung

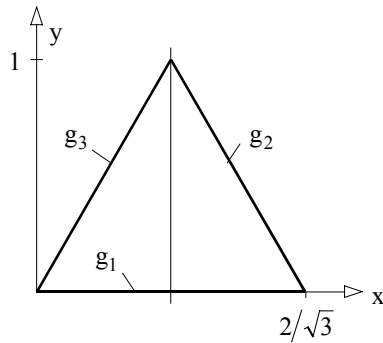
$$\boxed{[\Phi(x, y)]_{\text{Rand}} = 0} \quad (7.41)$$

erfüllen und der *POISSONschen Differentialgleichung*

$$\Delta\Phi = -2$$

(7.39)

genügen.



Die Randkontur wird durch die drei Geradengleichungen

$$g_1 = g_1(x, y) = y = 0, \quad (1a)$$

$$g_2 = g_2(x, y) = y - 2 + \sqrt{3} x = 0, \quad (1b)$$

$$g_3 = g_3(x, y) = y - \sqrt{3} x = 0 \quad (1c)$$

beschrieben, so dass der Ansatz

$$\Phi(x, y) = C g_1 g_2 g_3 = C (y - 2 + \sqrt{3} x)(y - \sqrt{3} x)y \quad (2)$$

die Randbedingung *a priori* erfüllt. Den Ansatzfreiwert C in (2) bestimmt man aus der Differentialgleichung (7.39) zu $C=1/2$, so dass die *Torsionsfunktion* exakt durch

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} (y - 2 + \sqrt{3} x)(y - \sqrt{3} x)y \quad (3)$$

gegeben ist.

Damit kann das *Torsionsmoment* unmittelbar nach der Formel

$$M = 2 \iint_A \Phi(x, y) dA \quad (7.47)$$

für den Querschnitt in obiger Skizze ausgewertet werden:

$$M = 2 \int_0^1 \left[\int_{y/\sqrt{3}}^{(2-y)/\sqrt{3}} \Phi(x, y) dx \right] dy = 4 \int_0^{1/\sqrt{3}} \left[\int_0^{\sqrt{3}x} \Phi(x, y) dy \right] dx = \frac{1}{45} \sqrt{3}. \quad (4)$$

Zur vereinfachten Schreibweise ist der Faktor $GD=1$ [Dimension] gewählt.

Der Wert (4) kann leicht von Hand ermittelt werden. Zur Kontrolle dient das nachstehende MAPLE-Programm.

```
>Phi:=(y-2+sqrt(3)*x)*(y-sqrt(3)*x)*y/2;
```

$$\Phi := \frac{1}{2} (y - 2 + \sqrt{3} x)(y - \sqrt{3} x)y$$

```
>M:=2*Int(Int(Phi,x=y/sqrt(3)..(2-y)/sqrt(3)),y=0..1)
```

```
> =2*int(int(Phi,x=y/sqrt(3)..(2-y)/sqrt(3)),y=0..1);
```

$$M := 2 \int_0^1 \int_{1/3 y \sqrt{3}}^{1/3 (2-y) \sqrt{3}} \frac{1}{2} (y - 2 + \sqrt{3} x) (y - \sqrt{3} x) y \, dx \, dy = \frac{1}{45} \sqrt{3}$$

> M:=4*Int(Int(Phi, y=0..sqrt(3)*x), x=0..1/sqrt(3))
 > =4*int(int(Phi, y=0..sqrt(3)*x), x=0..1/sqrt(3));

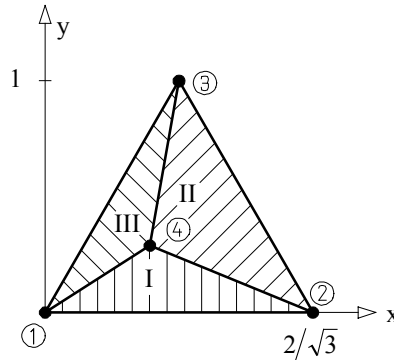
$$M := 4 \int_0^{1/3 \sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3} x} \frac{1}{2} (y - 2 + \sqrt{3} x) (y - \sqrt{3} x) y \, dy \, dx = \frac{1}{45} \sqrt{3}$$

>

Näherungslösung nach der FEM mit drei *linearen* Elementen

Es ist naheliegend, Dreieckselemente zu wählen, so dass die Randkontur des Querschnitts exakt erfasst wird. In *erster Näherung* genügt eine Diskretisierung in drei finite Elemente (Skizze).

In den Eckpunkten ①, ②, ③ des Stabquerschnitts sind aufgrund der Randbedingung (7.41) die *Knotenwerte* null. Mithin verbleibt als einzige Unbekannte der *Knotenwert* Φ_4 , der im Folgenden ermittelt wird.



Die Flächen der finiten Dreieckselemente ermittelt man nach (4.14) zu:

$$A_I = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2/\sqrt{3} & 0 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = y_4 / \sqrt{3} \quad (5a)$$

$$A_{II} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2/\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (2 - y_4 - \sqrt{3} x_4) \quad (5b)$$

$$A_{III} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3} x_4 - y_4) \quad (5c)$$

Ihre Summe entspricht dem Gesamtquerschnitt $A_{\text{ges}} = 1/\sqrt{3}$.

In der Standardbeziehung eines finiten Elementes

$$\boxed{[K^e]\{\Phi^e\} = \{F^e\}} \quad (7.67b)$$

ist der "Kraftvektor" allgemein durch

$$\boxed{\{F^e\} = \{f_i^e\} := 2 \iint_{\Lambda_\Delta} N_i \, dx \, dy} \quad (7.69)$$

gegeben und kann für *lineare Dreieckselemente* gemäß (7.81) angegeben werden.

Damit kann (7.67b) für die einzelnen finiten Elemente folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\textbf{Element I:} \quad \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{24} \\ k_{41} & k_{42} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} A_I \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (6a)$$

$$\textbf{Element II:} \quad \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} A_{II} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (6b)$$

$$\textbf{Element III:} \quad \begin{bmatrix} k_{33} & k_{31} & k_{34} \\ k_{13} & k_{11} & k_{14} \\ k_{43} & k_{41} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ \Phi_1 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} A_{III} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (6c)$$

Das Gesamtsystem besitzt 4 Knotenpunkte mit je einem Freiheitsgrad, so dass die *Steifigkeitsmatrix* eine 4×4 Matrix ist, die man aus (6a,b,c) zusammenbaut:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^I + k_{11}^{III} & k_{12}^I & k_{13}^{III} & k_{14}^I + k_{14}^{III} \\ k_{21}^I & k_{22}^I + k_{22}^{II} & k_{23}^{II} & k_{24}^I + k_{24}^{II} \\ k_{31}^{III} & k_{32}^{II} & k_{33}^{II} + k_{33}^{III} & k_{34}^{II} + k_{34}^{III} \\ k_{41}^I + k_{41}^{III} & k_{42}^I + k_{42}^{II} & k_{43}^{II} + k_{43}^{III} & k_{44}^I + k_{44}^{II} + k_{44}^{III} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{Bmatrix} A_I + A_{III} \\ A_I + A_{II} \\ A_{II} + A_{III} \\ A_I + A_{II} + A_{III} \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

Aufgrund der Randbedingung (7.41) gilt $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 \equiv 0$, so dass sich aus (7) unmittelbar die Beziehung

$$\Phi_4 = \frac{2}{3} \frac{A_I + A_{II} + A_{III}}{k_{44}^I + k_{44}^{II} + k_{44}^{III}} = \frac{2}{9} \sqrt{3} / \left(k_{44}^I + k_{44}^{II} + k_{44}^{III} \right) \quad (8)$$

ergibt. Darin können die Größen k_{44} der einzelnen Elementmatrizen (6a,b,c) der *Steifigkeitsmatrix* (7.79) entnommen werden, wobei in (7.78b,c) auf die entsprechende Indizierung zu achten ist:

$$k_{44}^I := \frac{1}{4A_I} (b_3^2 + c_3^2)^I = \frac{1}{4A_I} \left[(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \right] = \frac{1}{3A_I} \quad , \quad (9a)$$

$$k_{44}^{II} := \frac{1}{4A_{II}} (b_3^2 + c_3^2)^{II} = \frac{1}{4A_{II}} \left[(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2 \right] = \frac{1}{3A_{II}} \quad , \quad (9b)$$

$$k_{44}^{III} := \frac{1}{4A_{III}} (b_3^2 + c_3^2)^{III} = \frac{1}{4A_{III}} \left[(y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2 \right] = \frac{1}{3A_{III}} \quad . \quad (9c)$$

Man erkennt, dass (9b,c) aus (9a) durch zyklische Vertauschung der Indizes hervorgeht. Mit (9a,b,c) und $A_{\text{ges.}} = A_I + A_{II} + A_{III}$ kann (8) folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\Phi_4 = 2A_{\text{ges.}} \frac{A_I A_{II} A_{III}}{A_I A_{II} + A_{II} A_{III} + A_{III} A_I} \quad . \quad (10)$$

Diese Beziehung vereinfacht sich, wenn man den Knotenpunkt ④ in den *Schwerpunkt* des Stabquerschnittes legt. Dann sind die drei finiten Elemente *kongruent* ($A_I = A_{II} = A_{III} = A_{\text{ges.}}/3$), so dass (10) in

$$\Phi_4 = \frac{2}{9} A_{\text{ges.}}^2 = \frac{2}{27} \quad (11)$$

übergeht. Darin ist der Gesamtquerschnitt $A_{\text{ges.}} = 1/\sqrt{3}$ des Stabes berücksichtigt.

Setzt man die *Schwerpunktkoordinaten* ($x_s = 1/\sqrt{3}, y_s = 1/3$) in die *exakte Lösung* (3) ein, so erhält man ebenfalls den Wert $\Phi_s = 2/27$. Die Übereinstimmung des Knotenwertes (11) mit dem exakten Wert ist noch kein Kriterium für die Güte der gewählten Diskretisierung mit drei linearen Elementen. Vielmehr muss man die Torsionsfunktion im Ganzen sehen, die sich wie eine belastete Membran über den Querschnitt ausbeult (*Membrangleichnis*). Hingegen resultiert aus obiger Näherung eine *Dreieckspyramide*, deren Spitze in die Kuppel der *exakten Torsionsfunktion* stößt. Mithin ist die *exakte Torsionsfunktion* immer größer als eine lineare Näherung. Aus der Torsionsfunktion ermittelt man nach (7.40a,b) die *Schubspannungen* im tordierten Querschnitt und gemäß (7.47) das *Torsionsmoment*. Diese Werte sind somit bei einer Diskretisierung mit linearen finiten Elementen immer kleiner als die exakten Werte. Insbesondere kann der Näherungswert des *Torsionsmomentes* als Maß für die Güte der *Diskretisierung* herangezogen werden.

Nach der einfachen Beziehung (7.96) erhält man unter Berücksichtigung der Randbedingung $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$ die Beiträge der drei finiten Elemente zu

$$M_I = \frac{2}{3} A_I \Phi_4 \quad , \quad M_{II} = \frac{2}{3} A_{II} \Phi_4 \quad , \quad M_{III} = \frac{2}{3} A_{III} \Phi_4 \quad (12a,b,c)$$

und damit das Gesamtmoment zu

$$\boxed{M = \frac{2}{3} A_{\text{ges.}} \Phi_4} \quad (13)$$

Mit $A_{\text{ges.}} = 1/\sqrt{3}$ und mit $\Phi_4 \equiv \Phi_s = 2/27$ folgt aus (13) der Näherungswert

$$\boxed{M = \frac{4}{243} \sqrt{3}} \quad (14)$$

den man auch unmittelbar aus dem doppelten Volumen der *Dreieckspyramide* erhält. Ihr Volumen ist ein Drittel mal Grundfläche mal Höhe $\left(V = \frac{1}{3} A_{\text{ges.}} \Phi_4 \right)$.

Der Vergleich des Wertes (14) mit dem exakten Wert ergibt einen *relativen Fehler* von

$$M_{\text{ex}}/M = 1,35 \Rightarrow \boxed{\Delta M/M_{\text{ex}} = 7/27 = 25,93\%} \quad (15)$$

Die gesamte Rechnung vereinfacht sich wesentlich, wenn man *a priori* den Knotenpunkt ④ in den *Schwerpunkt* legt. Aus Symmetriegründen braucht man dann nur ein Teildreieck zu betrachten, z.B. das finite Element I mit den Knotenpunkten ①, ② und ④. Mit den Randbedingungen $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ergibt sich aus (6a) mit (9a) und $A_I = A_{\text{ges.}}/3$ unmittelbar die Beziehung

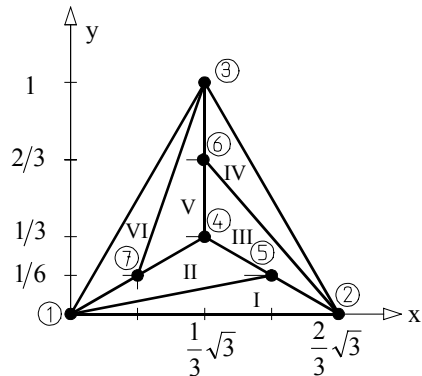
$$\boxed{\Phi_4 = \frac{2}{3} \frac{A_I}{k_{44}} = \frac{2}{9} A_{\text{ges.}}^2 = \frac{2}{27}} \quad (11)$$

Zur Verbesserung des Fehlers (15) soll im Folgenden eine feinere Diskretisierung vorgenommen werden.

Näherungslösung nach der FEM mit sechs linearen Elementen

Eine Verbesserung wird durch die skizzierte Diskretisierung erzeugt.

Diese Diskretisierung hat den Vorteil, dass alle finiten Elemente *flächengleich* und *paarweise kongruent* sind, d.h., die Paare I ∪ II, III ∪ IV und V ∪ VI sind *kongruent*. Mithin genügt es, ein Paar, z.B. I ∪ II, zur Ermittlung der *Knotenwerte* Φ_4 und Φ_5 herauszugreifen. Aus Symmetriegründen gilt $\Phi_5 = \Phi_6 = \Phi_7$. Analog (6a,b) erhält man:



$$\text{Element I:} \quad \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{25} \\ k_{51} & k_{52} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} A_I \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (16a)$$

$$\text{Element II:} \quad \begin{bmatrix} k_{55} & k_{54} & k_{51} \\ k_{45} & k_{44} & k_{41} \\ k_{15} & k_{14} & k_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_5 \\ \Phi_4 \\ \Phi_1 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} A_{II} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (16b)$$

Aus (16a,b) erhält man für das Dreieckspaar $I \cup II$ die Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} k_{11}^I + k_{11}^{II} & k_{12}^I & k_{14}^{II} & k_{15}^I + k_{15}^{II} \\ k_{21}^I & k_{22}^I & 0 & k_{25}^I \\ k_{41}^{II} & 0 & k_{44}^{II} & k_{45}^{II} \\ k_{51}^I + k_{51}^{II} & k_{52}^I & k_{54}^{II} & k_{55}^I + k_{55}^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{Bmatrix} A_I + A_{II} \\ A_I \\ A_{II} \\ A_I + A_{II} \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

aus der aufgrund der Randbedingungen $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ das *reduzierte Gleichungssystem*

$$\begin{bmatrix} k_{44}^{II} & k_{45}^{II} \\ k_{54}^{II} & k_{55}^I + k_{55}^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{Bmatrix} A_{II} \\ A_I + A_{II} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

zur Bestimmung der Knotenwerte Φ_4 und Φ_5 folgt. Darin sind $A_I = A_{II} = \sqrt{3}/18$ einzusetzen. Ferner ermittle man analog (9a,b,c):

$$k_{44}^{II} := \frac{1}{4A_{II}} (b_2^2 + c_2^2)^{II} = \frac{1}{4A_{II}} [(y_1 - y_5)^2 + (x_5 - x_1)^2] = \frac{7}{6} \sqrt{3}, \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} k_{45}^{II} &:= \frac{1}{4A_{II}} (b_1 b_2 + c_1 c_2)^{II} \\ &= \frac{1}{4A_{II}} [(y_4 - y_1)(y_1 - y_5) + (x_1 - x_4)(x_5 - x_1)] = -\frac{5}{6} \sqrt{3}, \end{aligned} \quad (19b)$$

$$k_{55}^I := \frac{1}{4A_I} (b_3^2 + c_3^2)^I = \frac{1}{4A_I} [(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2] = 2\sqrt{3}, \quad (19c)$$

$$k_{55}^{II} := \frac{1}{4A_{II}} (b_1^2 + c_1^2)^{II} = \frac{1}{4A_{II}} [(y_4 - y_1)^2 + (x_1 - x_4)^2] = \frac{2}{3} \sqrt{3}. \quad (19d)$$

Mit diesen Werten geht (18) schließlich in das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 63 & -45 \\ -45 & 144 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

über mit den Lösungen

$$\Phi_4 = 52/783 \approx 0,0664 \quad \text{und} \quad \Phi_5 = 38/783 \approx 0,048 \quad . \quad (21a,b)$$

Im Vergleich dazu ergeben sich die *exakten Werte* aus (3) zu

$$\Phi_4 = 2/27 \approx 0,0741 \quad \text{und} \quad \Phi_5 = 1/27 \approx 0,037 \quad . \quad (22a,b)$$

Bemerkenswert ist, dass der genäherte Wert Φ_4 unterhalb des exakten Wertes liegt, während die Näherung Φ_5 oberhalb der exakten Lösung liegt, d.h., die Torsionsfunktionen *durchdringen* sich.

Die Teilmomente ergeben sich aus (7.96) zu:

$$M_I = \frac{2}{3} A_I (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_5) = \frac{38}{9 \cdot 27 \cdot 87} \sqrt{3} \quad , \quad (23a)$$

$$M_{II} = \frac{2}{3} A_{II} (\Phi_5 + \Phi_4 + \Phi_1) = \frac{10}{27 \cdot 87} \sqrt{3} \quad . \quad (23b)$$

Das Gesamtmoment ermittelt man zu:

$$M_{\text{ges.}} = 3(M_I + M_{II}) = \frac{128}{81 \cdot 87} \sqrt{3} \quad . \quad (24)$$

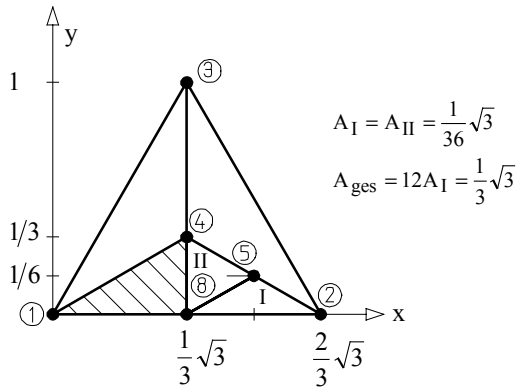
Damit erhält man analog (15) einen *relativen Fehler* von

$$M_{\text{ex}}/M = \frac{783}{640} \approx 1,22 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta M/M_{\text{ex}} = \frac{143}{783} \approx 0,183 \triangleq 18,3\%} \quad . \quad (25)$$

Näherungslösung nach der FEM mit zwölf linearen Elementen

Im Folgenden wird die nachstehende *Diskretisierung* diskutiert.

Zur Ermittlung der *Knotenwerte* Φ_4 und Φ_5 genügt es, das Elementepaar $I \cup II$ herauszugreifen. Man kann das Gleichungssystem (18) formal übernehmen. Ebenso können die Beziehungen (19a,b,c,d) verwendet werden, wenn man darin die *Koordinaten* (x_1, y_1) des *Knotenpunktes* ① durch die *Koordinaten* (x_8, y_8) des



Knotenpunktes ⑧ ersetzt und $A_I = A_{II} = \sqrt{3}/36$ berücksichtigt:

$$k_{44}^{\text{II}} = \frac{1}{4A_{\text{II}}} \left[(y_8 - y_5)^2 + (x_5 - x_8)^2 \right] = \frac{1}{3} \sqrt{3} \quad , \quad (26a)$$

$$k_{45}^{\text{II}} = \frac{1}{4A_{\text{II}}} \left[(y_4 - y_8)(y_8 - y_5) + (x_8 - x_4)(x_5 - x_8) \right] = -\frac{1}{6} \sqrt{3} \quad , \quad (26b)$$

$$k_{55}^{\text{I}} = \frac{1}{4A_{\text{I}}} \left[(y_8 - y_2)^2 + (x_2 - x_8)^2 \right] = \sqrt{3} \quad , \quad (26c)$$

$$k_{55}^{\text{II}} = \frac{1}{4A_{\text{II}}} \left[(y_4 - y_8)^2 + (x_8 - x_4)^2 \right] = \frac{1}{3} \sqrt{3} \quad . \quad (26d)$$

Mit diesen Werten geht (18) in das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/9 \\ 2/9 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

über, das die Lösungen $\Phi_4 = 2/27$ und $\Phi_5 = 1/27$ besitzt, die mit den *exakten Werten* (22a,b) übereinstimmen !

Die Teilmomente ergeben sich aus (7.96) analog (23a,b) zu:

$$M_{\text{I}} = \frac{2}{3} A_{\text{I}} (\Phi_8 + \Phi_2 + \Phi_5) = \frac{1}{18 \cdot 81} \sqrt{3} \quad , \quad (28a)$$

$$M_{\text{II}} = \frac{2}{3} A_{\text{II}} (\Phi_5 + \Phi_4 + \Phi_8) = \frac{1}{6 \cdot 81} \sqrt{3} \equiv 3M_{\text{I}} \quad . \quad (28b)$$

Das Gesamtsystem ermittelt man analog (24) zu:

$$M_{\text{ges.}} = 6(M_{\text{I}} + M_{\text{II}}) = 24M_{\text{I}} = \frac{4}{243} \sqrt{3} \quad . \quad (29)$$

Damit erhält man analog (25) einen *relativen Fehler* von $\Delta M / M_{\text{ex}} = 7 / 27 \hat{=} 25,93\%$, der mit (15) übereinstimmt, so dass mit der letzten Diskretisierung keine Verbesserung hinsichtlich des *Torsionsmomentes* erzielt wurde, obwohl die nach der FEM ermittelten *Knotenwerte* $\Phi_4 = 2/27$ und $\Phi_5 = 1/27$ mit den *exakten Werten* (22a,b) übereinstimmen !

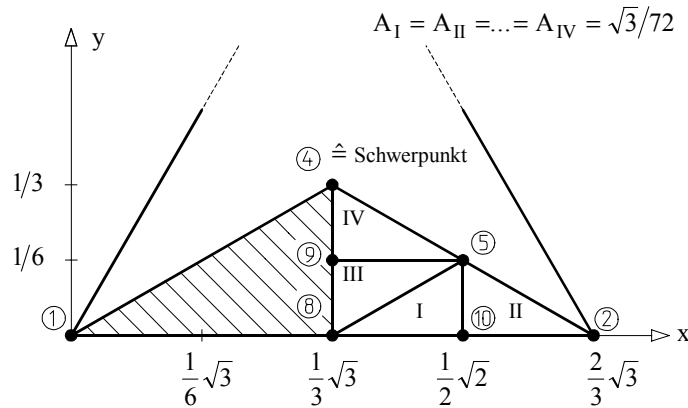
Den Wert (29) für das *Torsionsmoment* kann man leicht überprüfen. Dazu benötigt man das Volumen, das von der *Torsionsfunktion* und der Querschnittsfläche des tordierten Stabes umschlossen wird. Dieses Volumen setzt sich aus einem *Pyramidenstumpf* und einer aufgesetzten *Dreieckspyramide* zusammen:

$$V = \frac{1}{3} H \left(F + f + \sqrt{Ff} \right) + \frac{1}{3} fh \quad . \quad (30)$$

Darin bedeuten: $H = 1/27$ die Höhe (Abstand zwischen Grund- und Deckfläche), $F = 1/\sqrt{3}$ die Grundfläche, $f = \sqrt{3}/12$ die Deckfläche des Kegelstumpfes und $h = 1/27$ die Höhe der aufgesetzten Dreieckspyramide. Setzt man diese Zahlenwerte in die Formel (30) ein, so erhält man das *Torsionsmoment* zu $M = 2V = 4\sqrt{3}/243$ in Übereinstimmung mit (29) und (14), d.h., beide Diskretisierungen führen auf dieselbe Dreieckspyramide als lineare Näherung für die Torsionsfunktion.

Näherungslösung nach der FEM mit 24 linearen Elementen

Im Folgenden soll die nachstehende *Diskretisierung* diskutiert werden:



Aus Symmetriegründen wird nur das Gebiet ⑧-②-④ betrachtet mit einer Unterteilung in **vier** finite Elemente. Da jeder Knotenpunkt einen Freiheitsgrad (*Knotenvariable*) besitzt, ist die *Steifigkeitsmatrix* eine 6×6 Matrix. Aufgrund der Randbedingungen $\Phi_8 = \Phi_{10} = \Phi_2 = 0$ ergibt sich das *reduzierte Gleichungssystem* analog (18) zu:

$$\begin{bmatrix} K_{55} & K_{54} & K_{59} \\ K_{45} & K_{44} & K_{49} \\ K_{95} & K_{94} & K_{99} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_5 \\ \Phi_4 \\ \Phi_9 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{Bmatrix} A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV} \\ A_{IV} \\ A_{III} + A_{IV} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{108} \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}. \quad (31)$$

Darin sind zur Abkürzung folgende Größen eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} K_{54} &\equiv k_{54}^{IV}, & K_{59} &\equiv k_{59}^{III} + k_{59}^{IV}, & K_{55} &\equiv k_{55}^I + k_{55}^{II} + k_{55}^{III} + k_{55}^{IV} \\ K_{44} &\equiv k_{44}^{IV}, & K_{49} &\equiv k_{49}^{IV}, & K_{99} &\equiv k_{99}^{III} + k_{99}^{IV} \end{aligned} \right\}. \quad (32)$$

Analog (9a,b,c) und (19a+d) ermittelt man die Werte $k_{55}^I, k_{55}^{II}, \dots, k_{99}^{IV}$ folgendermaßen:

Element I mit den Knoten ⑧—⑩—⑤

$$k_{55}^I = \frac{1}{4A_I} (b_1^2 + c_1^2)^I = 6\sqrt{3} \left[(y_{10} - y_5)^2 + (x_5 - x_{10})^2 \right] = \frac{1}{6} \sqrt{3} , \quad (33a)$$

Element II mit den Knoten ⑩—②—⑤

$$k_{55}^{II} = \frac{1}{4A_{II}} (b_1^2 + c_1^2)^{II} = 6\sqrt{3} \left[(y_2 - y_5)^2 + (x_5 - x_2)^2 \right] = \frac{2}{3} \sqrt{3} , \quad (33b)$$

Element III mit den Knoten ⑤—⑨—⑧

$$k_{55}^{III} = \frac{1}{4A_{III}} (b_1^2 + c_1^2)^{III} = 6\sqrt{3} \left[(y_9 - y_8)^2 + (x_8 - x_9)^2 \right] = \frac{1}{6} \sqrt{3} , \quad (33c)$$

$$\begin{aligned} k_{59}^{III} &= \frac{1}{4A_{III}} (b_1 b_3 + c_1 c_3)^{III} \\ &= 6\sqrt{3} \left[(y_9 - y_8)(y_5 - y_9) + (x_8 - x_9)(x_9 - x_5) \right] = 0 , \end{aligned} \quad (33d)$$

$$k_{99}^{III} = \frac{1}{4A_{III}} (b_3^2 + c_3^2)^{III} = 6\sqrt{3} \left[(y_5 - y_9)^2 + (x_9 - x_5)^2 \right] = \frac{1}{2} \sqrt{3} , \quad (33e)$$

Element III mit den Knoten ⑤—④—⑨

$$k_{55}^{IV} = \frac{1}{4A_{IV}} (b_1^2 + c_1^2)^{IV} = 6\sqrt{3} \left[(y_4 - y_9)^2 + (x_9 - x_4)^2 \right] = \frac{1}{6} \sqrt{3} , \quad (33f)$$

$$\begin{aligned} k_{54}^{IV} &= \frac{1}{4A_{IV}} (b_1 b_2 + c_1 c_2)^{IV} \\ &= 6\sqrt{3} \left[(y_4 - y_9)(y_9 - y_5) + (x_9 - x_4)(x_5 - x_9) \right] = 0 , \end{aligned} \quad (33g)$$

$$\begin{aligned} k_{59}^{IV} &= \frac{1}{4A_{IV}} (b_1 b_3 + c_1 c_3)^{IV} \\ &= 6\sqrt{3} \left[(y_4 - y_9)(y_5 - y_4) + (x_9 - x_4)(x_4 - x_5) \right] = -\frac{1}{6} \sqrt{3} , \end{aligned} \quad (33h)$$

$$k_{44}^{IV} = \frac{1}{4A_{IV}} (b_2^2 + c_2^2)^{IV} = 6\sqrt{3} \left[(y_9 - y_5)^2 + (x_5 - x_9)^2 \right] = \frac{1}{2} \sqrt{3} , \quad (33i)$$

$$k_{49}^{IV} = \frac{1}{4A_{IV}} (b_2 b_3 + c_2 c_3)^{IV}$$

$$= 6\sqrt{3}[(y_9 - y_5)(y_5 - y_4) + (x_5 - x_9)(x_4 - x_5)] = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad , \quad (33j)$$

$$k_{99}^{IV} = \frac{1}{4A_{IV}}(b_3^2 + c_3^2)^{IV} = 6\sqrt{3}[(y_5 - y_4)^2 + (x_4 - x_5)^2] = \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad . \quad (33k)$$

Mit den Zahlenwerten (32), (33a÷k) geht (31) über in:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_5 \\ \Phi_4 \\ \Phi_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2/9 \\ 1/18 \\ 1/9 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

mit den Lösungen

$$\Phi_4 = 17/243 \approx 0,07 \quad , \quad \Phi_5 = 19/486 \approx 0,039 \quad , \quad \Phi_9 = 19/486 \approx 0,05 \quad . \quad (35a,b,c)$$

Diese Werte weichen nur geringfügig von den exakten Werten (22a,b) ab.

Die Teilmomente ergeben sich zu:

$$M_I = \frac{2}{3} A_I (\Phi_8 + \Phi_{10} + \Phi_5) = \frac{19}{108 \cdot 486} \sqrt{3} \quad , \quad (36a)$$

$$M_{II} = \frac{2}{3} A_{II} (\Phi_{10} + \Phi_2 + \Phi_5) = \frac{19}{108 \cdot 486} \sqrt{3} \equiv M_I \quad , \quad (36b)$$

$$M_{III} = \frac{2}{3} A_{III} (\Phi_5 + \Phi_9 + \Phi_8) = \frac{44}{108 \cdot 486} \sqrt{3} \quad , \quad (36c)$$

$$M_{IV} = \frac{2}{3} A_{IV} (\Phi_5 + \Phi_4 + \Phi_9) = \frac{78}{108 \cdot 486} \sqrt{3} \quad . \quad (36d)$$

Damit erhält man schließlich das *Torsionsmoment*:

$$M_{\text{ges}} = 6 (M_I + M_{II} + M_{III} + M_{IV}) = \frac{40}{9 \cdot 243} \sqrt{3} \quad , \quad (37)$$

so dass man analog (25) einen *relativen Fehler* von

$$M_{\text{ex}}/M_{\text{ges.}} = 243/200 = 1,215 \Rightarrow \boxed{\Delta M/M_{\text{ex}} = 43/243 \approx 0,177 \triangleq 17,7\%} \quad (38)$$

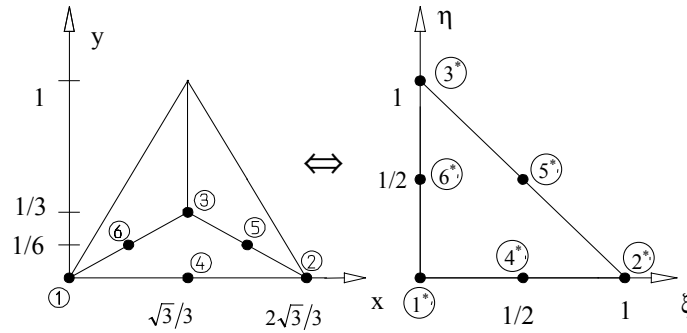
erhält. Gegenüber (25) hat man nur eine geringfügige Verbesserung bei wesentlich höherem Aufwand [(33a÷k) gegenüber (19a÷d)] erzielt !

Bemerkung: Für diese Aufgabe sind *lineare Elemente* ungeeignet, wie obige Ergebnisse zeigen. Daher sollen in Ü 7.1.6 *quadratische* und in Ü 7.1.7 *kubische Formfunktionen* gewählt werden.

Ü 7.1.6

a) Aufteilung des tordierten Querschnittes in drei quadratische finite Elemente

Nach Bild 4.9 werden 6 *Knotenpunkte* benötigt, wenn man *quadratische Formfunktionen* benutzt (Skizze).



Mit $x_1 = y_1 = y_2 = 0$ und $x_2 = 2x_3 = 2/\sqrt{3}$ und $y_3 = 1/3$ vereinfacht sich die *lineare Transformation* (4.104a,b) zu:

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{3}\xi + \frac{1}{3}\sqrt{3}\eta, \quad y = \frac{1}{3}\eta \quad (1a,b)$$

mit der Inversion

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{3}{2}y, \quad \eta = 3y. \quad (2a,b)$$

Die *JACOBIsche Determinante* ergibt sich nach (4.104c) zu $2A_\Delta = 2\sqrt{3}/9$, so dass

$$dx dy = \frac{2}{9}\sqrt{3} d\xi d\eta \quad (3)$$

gilt.

Für das finite Dreieckselement mit 6 Knotenpunkten kann die Torsionsfunktion gemäß

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^6 N_i(x, y) \Phi_i \quad (4a)$$

ausgedrückt werden, die sich aufgrund der Randbedingung (7.41), d.h.: $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_4 = 0$, zu

$$\boxed{\Phi(x, y) = N_3(x, y) \Phi_3 + N_5(x, y) \Phi_5 + N_6(x, y) \Phi_6} \quad (4b)$$

vereinfacht. Zur Darstellung der *Torsionsfunktion* werden somit die *Knotenwerte* Φ_3 , Φ_5 , und Φ_6 , benötigt, die im Folgenden ermittelt werden.

In (4a,b) sind die N_i *quadratische Formfunktionen*, die man zweckmäßigerweise durch die *Flächenkoordinaten* L_i ausdrückt:

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1), \quad N_2 = L_2(2L_2 - 1), \quad N_3 = L_3(2L_3 - 1), \quad (4.94a,b,c)$$

$$N_4 = 4L_1L_2, \quad N_5 = 4L_2L_3, \quad N_6 = 4L_3L_1. \quad (4.94d,e,f)$$

Alternativ können sie vermöge der Zusammenhänge

$$L_1 = 1 - \xi - \eta, \quad L_2 = \xi, \quad L_3 = \eta \quad (4.105a,b,c)$$

in den kartesischen Koordinaten ξ, η des *Einheitsdreiecks* (*master triangular element*) dargestellt werden:

$$N_1 = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), \quad N_2 = \xi(2\xi - 1), \quad N_3 = \eta(2\eta - 1), \quad (5a, b, c)$$

$$N_4 = 4\xi(1 - \xi - \eta), \quad N_5 = 4\xi\eta, \quad N_6 = 4\eta(1 - \xi - \eta). \quad (5d, e, f)$$

Die gesuchten *Knotenwerte* Φ_3, Φ_5, Φ_6 in (4b) sind aus dem Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & \dots & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & \dots & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & \dots & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & \dots & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \\ \Phi_3 = ? \\ \Phi_4 = 0 \\ \Phi_5 = ? \\ \Phi_6 = ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} \quad (6)$$

zu ermitteln, das sich aufgrund der eingetragenen Randbedingungen zu

$$\begin{bmatrix} k_{33} & k_{35} & k_{36} \\ k_{53} & k_{55} & k_{56} \\ k_{63} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_3 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} \quad (7)$$

reduziert.

Darin gilt nach (7.68):

$$k_{33} := \iint_{\Lambda_\Delta} \left[\left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_3}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (8a)$$

mit

$$\frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 3(4\eta - 1).$$

Mithin findet man unter Berücksichtigung von (3) den Wert

$$k_{33} = 2\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (4\eta - 1)^2 d\xi d\eta = \sqrt{3} . \quad (8b)$$

Entsprechend findet man die anderen Werte der *Steifigkeitsmatrix* in (7):

$$k_{35} = 4\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (4\eta - 1)(2\xi - \eta) d\xi d\eta = -\frac{2}{3}\sqrt{3} , \quad (9)$$

$$k_{36} = 4\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (2 - 2\xi - 3\eta)(4\eta - 1) d\xi d\eta = -\frac{2}{3}\sqrt{3} , \quad (10)$$

$$k_{55} = \frac{32}{3}\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (3\xi^2 - \eta^2 - 3\xi\eta) d\xi d\eta = \frac{20}{9}\sqrt{3} , \quad (11)$$

$$k_{56} = 32\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \left(\xi - \xi^2 - \xi\eta - \frac{1}{2}\eta + \frac{2}{3}\eta^2 \right) d\xi d\eta = \frac{4}{9}\sqrt{3} , \quad (12)$$

$$k_{66} = \frac{8}{3}\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \left[\eta^2 + 3(2 - 2\xi - 3\eta)^2 \right] d\xi d\eta = \frac{20}{9}\sqrt{3} . \quad (13)$$

Die rechte Seite in (7) erhält nach der Formel (7.69) unter Berücksichtigung von (3) und (5c,e,f) folgendermaßen:

$$F_3 := 2 \iint_{A_\Delta} N_3 dx dy = \frac{4}{9}\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \eta(2\eta - 1) d\xi d\eta = 0 , \quad (14)$$

$$F_5 := 2 \iint_{A_\Delta} N_5 dx dy = \frac{16}{9}\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi\eta d\xi d\eta = \frac{2}{27}\sqrt{3} , \quad (15)$$

$$F_6 := 2 \iint_{A_\Delta} N_6 dx dy = \frac{16}{9}\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \eta(1 - \xi - \eta) d\xi d\eta = \frac{2}{27}\sqrt{3} . \quad (16)$$

Mit den Zahlenwerte (8b) bis (16) geht das Gleichungssystem (7) in

$$\begin{bmatrix} 27 & -18 & -18 \\ -18 & 60 & 12 \\ -18 & 12 & 60 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

über. Daraus gewinnt man schließlich die gesuchten *Knotenwerte*:

$$\boxed{\Phi_3 = 1/18 \approx 0,056 \quad \Phi_5 = \Phi_6 = 1/24 \approx 0,042} \quad (18a,b,c)$$

Im Vergleich dazu sind die exakten Werte aus Ü7.1.5 durch

$$\boxed{\Phi_3 = 2/27 \approx 0,074 \quad \Phi_5 = \Phi_6 = 1/27 \approx 0,037} \quad (19a,b,c)$$

gegeben. Der Vergleich zeigt eine starke Abweichung der Näherungswerte (18a,b,c) von den exakten Werten (19a,b,c), so dass eine feinere *Diskretisierung* erforderlich ist. Zuvor soll jedoch untersucht werden, wie stark sich die Abweichungen in den *Knotenwerten* auf das *Torsionsmoment* auswirken, dessen Abweichung vom exakten Wert als Gütemaß für die Näherung herangezogen werden kann.

Setzt man die Torsionsfunktion (4b), die sich mit (5c,e,f) und den Knotenwerten (18a,b,c) näherungsweise zu

$$\boxed{\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{18} \eta(2 - \eta) = \frac{1}{6} y(2 - 3y)} \quad (20)$$

ergibt, in die Formel (7.47) mit $GD = 1$ [Dimension] unter Berücksichtigung von (3) ein, so erhält man schließlich das *Torsionsmoment* (3mal Einzelement) zu:

$$\boxed{M = 3 \times 2 \int_{A_\Delta} \Phi(x, y) dx dy = \frac{2}{27} \sqrt{3} \int_0^{1-\eta} \int_0^\eta \eta(2 - \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{54} \sqrt{3}} \quad (21)$$

Im Vergleich dazu ist der exakte Wert aus Ü7.5.1 durch

$$\boxed{M_{\text{ex}} = \frac{1}{45} \sqrt{3}} \quad (22)$$

gegeben, so dass die Näherung (21) mit einem *relativen Fehler* von

$$M_{\text{ex}}/M = 6/5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta M/M_{\text{ex}} = 1/6 \hat{=} 16\frac{2}{3}\%} \quad (23)$$

behaftet ist.

Aufgrund dieses Fehlers ist eine Verbesserung erforderlich. Darüber hinaus hängt die *Torsionsfunktion* (20) nur von η bzw. y ab, so dass beispielsweise die *Schubspannung* τ_{zy} gemäß (7.40b) im gesamten Gebiet verschwindet, während aus der *exakten Lösung*

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} y(y - 2 + \sqrt{3} x)(y - \sqrt{3} x) \quad (24)$$

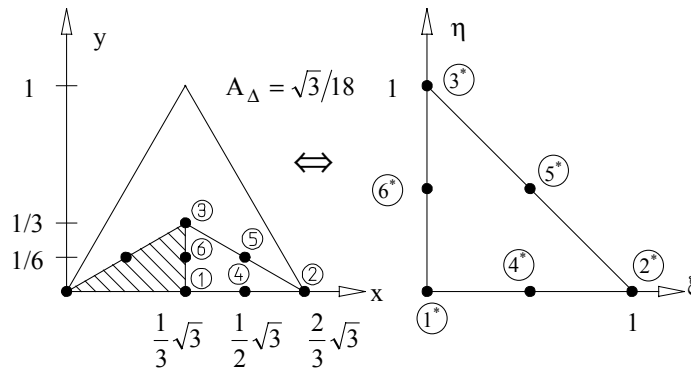
die Verteilung

$$\tau_{zy} := -GD \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\sqrt{3} y(1 - \sqrt{3} x) \quad (25)$$

folgt. Entsprechende Unstimmigkeiten stellt man für die Schubspannung $\tau_{zx} := GD \partial \Phi / \partial y$ fest. Daher soll im Folgenden eine *feinere Diskretisierung* gewählt werden.

b) Aufteilung des tordierten Querschnittes in sechs quadratische finite Elemente

Die verbesserte Diskretisierung ist in nachstehender Skizze gezeigt.



Mit $x_1 = x_3 = 1/\sqrt{3}$, $x_2 = 2/\sqrt{3}$, $y_1 = y_2 = 0$ und $y_3 = 1/3$ vereinfacht sich die *lineare Transformation* (4.104a,b) zu:

$$x = \sqrt{3}(1 + \xi)/3, \quad y = \eta/3 \quad (26a,b)$$

mit der Inversion

$$\xi = \sqrt{3} x - 1, \quad \eta = 3y \quad (27a,b)$$

im Gegensatz zu (1a,b) und (2a,b). Die *JACOBISCHE Determinante* ergibt sich nach (4.104c) zu $2A_{\Delta} = \sqrt{3}/9$ so dass

$$dx dy = \frac{1}{9} \sqrt{3} d\xi d\eta \quad (28)$$

im Gegensatz zu (3) gilt. Die *Steifigkeitsmatrix* in (7) ermittelt man analog (8) bis (13) folgendermaßen:

$$k_{33} = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (4\eta - 1)^2 d\xi d\eta = \frac{1}{2} \sqrt{3}, \quad (29)$$

$$k_{35} = 4\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi (4\eta - 1) d\xi d\eta = 0, \quad (30)$$

$$k_{36} = 4\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (1-\xi-2\eta)(4\eta-1) d\xi d\eta = -\frac{2}{3}\sqrt{3} , \quad (31)$$

$$k_{55} = \frac{16}{3}\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (3\xi^2 + \eta^2) d\xi d\eta = \frac{16}{9}\sqrt{3} , \quad (32)$$

$$k_{56} = \frac{16}{3}\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [3\xi(1-\xi-2\eta) - \eta^2] d\xi d\eta = -\frac{4}{9}\sqrt{3} , \quad (33)$$

$$k_{66} = \frac{16}{3}\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [\eta^2 + 3(1-\xi-2\eta)^2] d\xi d\eta = \frac{16}{9}\sqrt{3} . \quad (34)$$

Analog (14),(15), (16) ermittelt man die rechte Seite in (7) zu:

$$F_3 := 2 \int_{\Lambda_\Delta} N_3 dx dy = \frac{2}{9}\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (2\eta-1)\eta d\xi d\eta = 0 , \quad (35)$$

$$F_5 := 2 \int_{\Lambda_\Delta} N_5 dx dy = \frac{8}{9}\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi \eta d\xi d\eta = \frac{1}{27}\sqrt{3} , \quad (36)$$

$$F_6 := 2 \int_{\Lambda_\Delta} N_6 dx dy = \frac{8}{9}\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (1-\xi-\eta)\eta d\xi d\eta = \frac{1}{27}\sqrt{3} . \quad (37)$$

Mit den Zahlenwerten(29) bis (37) geht das Gleichungssystem (7) in

$$\begin{bmatrix} 27 & 0 & -36 \\ 0 & 96 & -24 \\ -36 & -24 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

über. Daraus gewinnt man schließlich die gesuchten *Knotenwerte*:

$\Phi_3 = 5/63 \approx 0,079$	$\Phi_5 = 1/28 \approx 0,0386$	$\Phi_6 = 5/84 \approx 0,06$
-------------------------------	--------------------------------	------------------------------

(39a,b,c)

Im Vergleich dazu ergeben sich die *exakten Werte* aus (24) zu

$\Phi_3 = 2/27 \approx 0,074$	$\Phi_5 = 1/27 \approx 0,037$	$\Phi_6 = 25/432 \approx 0,058$
-------------------------------	-------------------------------	---------------------------------

(40a,b,c)

Die Abweichungen sind wesentlich geringer als in (18a,b,c).

Die *Torsionsfunktion* (4b) nimmt mit (5c,e,f) und den *Knotenwerten* (39a,b,c) die Form

$$\Phi(\xi, \eta) = (10 - 6\xi - 5\eta)\eta/63 \quad (41a)$$

bzw. mit (27a,b) die Form

$$\Phi(x, y) = (16 - 6\sqrt{3}x - 15y)y/21 \quad (41b)$$

an, so dass sich das *Torsionsmoment* (7.47) mit $GD = 1$ [Dimension] unter Berücksichtigung von (28) und mit dem Faktor **6** multipliziert (\rightarrow **6** finite Elemente) zu

$$M = 12 \int_{A_\Delta} \Phi(x, y) dx dy = \frac{4}{189} \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (10\eta - 6\xi\eta - 5\eta^2) d\xi d\eta = \frac{4}{189} \sqrt{3} \quad (42)$$

ergibt. Dieser Wert ist im Vergleich mit dem exakten Wert (22) mit einem *relativen Fehler* von

$$M_{\text{ex}}/M = 21/20 \Rightarrow \Delta M/M_{\text{ex}} = 1/21 \approx 0,0476 \hat{=} 4,76\% \quad (43)$$

behaftet. Die L_2 -Fehlernorm (7.133), erweitert auf den zweidimensionalen Fall, kann dem folgenden MAPLE-Programm entnommen werden.

```
>L_2:=sqrt(int(int(F(xi,eta)^2,xi=0..1-eta),eta=0..1));
```

$$L_2 := \sqrt{\int_0^1 \int_0^{1-\eta} F(\xi, \eta)^2 d\xi d\eta}$$

```
>Phi:=(10-6*xi-5*eta)*eta/63;
```

$$\Phi := \frac{1}{63} (10 - 6\xi - 5\eta) \eta$$

```
>Phi[ex]:=((1-eta/3)^2-xi^2)*eta/6;
```

$$\Phi_{\text{ex}} := \frac{1}{6} \left(\left(1 - \frac{1}{3}\eta \right)^2 - \xi^2 \right) \eta$$

```
>F:=(10-6*xi-5*eta)*eta/63-((1-eta/3)^2-xi^2)*eta/6;
```

$$F := \frac{1}{63} (10 - 6\xi - 5\eta) \eta - \frac{1}{6} \left(\left(1 - \frac{1}{3}\eta \right)^2 - \xi^2 \right) \eta$$

```
>L_2:=sqrt(int(int(F^2,xi=0..1-eta),eta=0..1));
```

$$L_2 := \frac{1}{1890} \sqrt{15}$$

```
>L_2:=evalf("");
```

$$L_2 := .002049197538$$

```
>
```

Dieser Wert zeigt, dass die Näherung sehr brauchbar ist !

Im Folgenden wird die obige Fehlernorm alternativ mit Hilfe der *GAUSS-Quadratur* im Einheitsdreieck auf der Basis von Tabelle 7.15a ermittelt:

n = 7 Stützstellen :

> F(xi,eta):=(10-6*xi-5*eta)*eta/63-((1-eta/3)^2-xi^2)*eta/6;

$$F(\xi, \eta) := \frac{(10 - 6\xi - 5\eta)\eta}{63} - \frac{\left(\left(1 - \frac{\eta}{3}\right)^2 - \xi^2\right)\eta}{6}$$

> L_2:=sqrt(Int(Int(F^2,xi=0..1-eta),eta=0..1))=
sqrt(int(int(F(xi,eta)^2,xi=0..1-eta),eta=0..1));

$$L_2 := \sqrt{\int_0^1 \int_0^{1-\eta} F^2 d\xi d\eta} = \frac{\sqrt{15}}{1890}$$

Werte des Integranden in den n = 7 Stützstellen im Einheitsdreieck:

> a:=(6+sqrt(15))/21; b:=(9-2*sqrt(15))/21;

c:=(6-sqrt(15))/21; d:=(9+2*sqrt(15))/21;

$$a := \frac{2}{7} + \frac{\sqrt{15}}{21}$$

$$b := \frac{3}{7} - \frac{2\sqrt{15}}{21}$$

$$c := \frac{2}{7} - \frac{\sqrt{15}}{21}$$

$$d := \frac{3}{7} + \frac{2\sqrt{15}}{21}$$

> f[S]:=subs({xi=1/3,eta=1/3},F(xi,eta)^2):

> f[1]:=expand(subs({xi=a,eta=a},F(xi,eta)^2)):

> f[2]:=expand(subs({xi=b,eta=a},F(xi,eta)^2)):

> f[3]:=expand(subs({xi=a,eta=b},F(xi,eta)^2)):

> f[4]:=expand(subs({xi=c,eta=c},F(xi,eta)^2)):

> f[5]:=expand(subs({xi=d,eta=c},F(xi,eta)^2)):

> f[6]:=expand(subs({xi=c,eta=d},F(xi,eta)^2)):

Wichtungsfunktionen

> w[S]:=9/80; w[1..3]:=(155+sqrt(15))/2400;

w[4..6]:=(155-sqrt(15))/2400;

$$w_s := \frac{9}{80}$$

$$w_{1..3} := \frac{31}{480} + \frac{\sqrt{15}}{2400}$$

$$w_{4..6} := \frac{31}{480} - \frac{\sqrt{15}}{2400}$$

```
> GAUSS_Quadratur:=(sqrt(w[S]*f[S]+w[1..3]*sum(f[i],i=1..3)+
  w[4..6]*sum(f[j],j=4..6)),15);
> GAUSS_Quadratur:=expand(%): GAUSS_Quadratur:=simplify(%);
```

$$GAUSS_Quadratur := \frac{\sqrt{149}}{6804}$$

```
> rel_Fehler:=(sqrt(15)/1890-sqrt(149)/6804)/(sqrt(15)/1890);
```

$$rel_Fehler := 126 \left(\frac{\sqrt{15}}{1890} - \frac{\sqrt{149}}{6804} \right) \sqrt{15}$$

```
> rel_Fehler:=evalf(%);
```

$$rel_Fehler := 0.1245224700$$

Der relative Fehler beträgt 12,5% aufgrund der zu geringen Anzahl von $n = 7$ Stützstellen. Daher wird im folgenden MAPLE-Programm die GAUSS-Quadratur mit $n = 13$ Stützstellen gemäß Tabelle 7.15b durchgeführt.

n = 13 Stützstellen:

```
> F(xi,eta):=(10-6*xi-5*eta)*eta/63-((1-eta/3)^2-xi^2)*eta/6;
```

$$F(\xi, \eta) := \frac{(10 - 6\xi - 5\eta)\eta}{63} - \frac{\left(\left(1 - \frac{\eta}{3}\right)^2 - \xi^2 \right)\eta}{6}$$

```
> L_2:=sqrt(Int(Int(F^2,xi=0..1-eta),eta=0..1))=
  sqrt(int(int(F(xi,eta)^2,xi=0..1-eta),eta=0..1));
```

$$L_2 := \sqrt{\int_0^1 \int_0^{1-\eta} F^2 d\xi d\eta} = \frac{\sqrt{15}}{1890}$$

Werte des Integranden in den $n = 13$ Stützstellen im Einheitsdreieck:

```
> a:=10026259/38511290; b:=31723247/66185506; c:=2872201/44099439;
  d:=34357532/39503231; e:=6574983/10298446;
  f:=18789041/60054692; g:=13094163/268927463;
```

$$a := \frac{10026259}{38511290}$$

$$b := \frac{31723247}{66185506}$$

$$c := \frac{2872201}{44099439}$$

$$d := \frac{34357532}{39503231}$$

$$e := \frac{6574983}{10298446}$$

$$f := \frac{18789041}{60054692}$$

$$g := \frac{13094163}{268927463}$$

```

> K[S]:=subs( {xi=1/3,eta=1/3},F(xi,eta)^2):
> K[2]:=subs( {xi=b,eta=a},F(xi,eta)^2):
> K[3]:=subs( {xi=a,eta=b},F(xi,eta)^2):
> K[4]:=subs( {xi=c,eta=c},F(xi,eta)^2):
> K[5]:=subs( {xi=d,eta=c},F(xi,eta)^2):
> K[6]:=subs( {xi=c,eta=d},F(xi,eta)^2):
> K[7]:=subs( {xi=e,eta=f},F(xi,eta)^2):
> K[8]:=subs( {xi=f,eta=e},F(xi,eta)^2):
> K[9]:=subs( {xi=g,eta=e},F(xi,eta)^2):
> K[10]:=subs( {xi=g,eta=f},F(xi,eta)^2):
> K[11]:=subs( {xi=f,eta=g},F(xi,eta)^2):
> K[12]:=subs( {xi=e,eta=g},F(xi,eta)^2):

```

Wichtungsfunktionen

```

> w[S]:=-11880325/79429842/2; w[1..3]:=21277533/121159934/2;
w[4..6]:=4638787/86954590/2; w[7..12]:=8113102/105209523/2;

```

$$w_S := \frac{-11880325}{158859684}$$

$$w_{1..3} := \frac{21277533}{242319868}$$

$$w_{4..6} := \frac{4638787}{173909180}$$

$$w_{7..12} := \frac{4056551}{105209523}$$

```

> GAUSS_Quadratur:=evalf(sqrt(w[S]*K[S]+w[1..3]*sum(K[i],i=1..3)+w[4..6]*
sum(K[j],j=4..6)+w[7..12]*sum(K[k],k=7..12)),15);

```

$$GAUSS_Quadratur := 0.00204919753767588$$


```
> GAUSS_Quadratur:=convert(%,rational,16);
      GAUSS_Quadratur :=  $\frac{238143}{116212808}$ 
```

```
> GAUSS_Quadratur:=evalf(%,15);
      GAUSS_Quadratur := 0.00204919753767588
```

Im Vergleich dazu ist der exakte Wert:

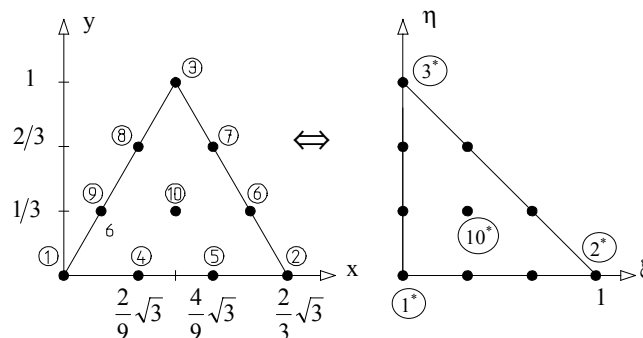
```
> L_zwei:=sqrt(15)/1890=evalf(sqrt(15)/1890,15);
      L_zwei :=  $\frac{\sqrt{15}}{1890} = 0.00204919753767588$ 
```

Die GAUSS-Quadratur im Einheitsdreieck mit $n = 13$ Stützstellen liefert den exakten Wert.

>

Ü 7.1.7

Nach Bild 4.9 (Band 1) werden 10 Knotenpunkte benötigt, wenn man kubische Formfunktionen benutzt (Skizze).



Mit $x_1 = y_1 = y_2 = 0$ und $x_2 = 2x_3 = 2/\sqrt{3}$ und $y_3 = 1$ vereinfacht sich die lineare Transformation (4.104a,b) auf das Einheitsdreieck zu:

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{3}\xi + \frac{1}{3}\sqrt{3}\eta, \quad y = \eta \quad (1a,b)$$

mit der Inversion

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y, \quad \eta = y. \quad (2a,b)$$

Die JACOBIsche Determinante ergibt sich nach (4.104c) zu $2A_\Delta = 2/\sqrt{3}$, so dass

$$dx dy = \frac{2}{3}\sqrt{3} d\xi d\eta \quad (3)$$

gilt.

Aufgrund der Randbedingung (7.41) ist nur der *Knotenwert* Φ_{10} von NULL verschieden, so dass die *Torsionsfunktion* gemäß

$$\boxed{\Phi(\xi, \eta) = N_{10}(\xi, \eta) \Phi_{10}} \quad (4)$$

darstellbar ist. Darin ist nach (4.103) die *Formfunktion* $N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3$ mit

$$L_1 = 1 - \xi - \eta, \quad L_2 = \xi, \quad L_3 = \eta \quad (4.105a,b,c)$$

in der Darstellung

$$N_{10}(\xi, \eta) = 27 \xi \eta (1 - \xi - \eta) \quad (5)$$

gegeben. Mithin wird nur der *Knotenwert* Φ_{10} in (4) benötigt, der sich aus dem Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{110} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{210} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ K_{101} & K_{102} & \dots & K_{1010} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_{10} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{10} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

aufgrund der Randbedingung (7.41) zu

$$\boxed{\Phi_{10} = F_{10}/K_{1010}} \quad (7)$$

ergibt. Darin bestimmt man den Wert F_{10} nach der Formel (7.69) unter Berücksichtigung von (3) und (5) folgendermaßen:

$$\boxed{F_{10} := 2 \iint_{A_\Delta} N_{10} \, dx \, dy = 36\sqrt{3} \int_0^1 \left[\int_0^{1-\eta} \xi \eta (1 - \xi - \eta) \, d\xi \right] d\eta = \frac{3}{10} \sqrt{3}} \quad (8)$$

Weiterhin gilt nach (7.68):

$$K_{1010} := \iint_{A_\Delta} \left[\left(\frac{\partial N_{10}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_{10}}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy \quad (9a)$$

mit

$$\frac{\partial N_{10}}{\partial x} = \frac{\partial N_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_{10}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{27}{2} \sqrt{3} (\eta - 2\xi\eta - \eta^2)$$

und

$$\frac{\partial N_{10}}{\partial y} = \frac{\partial N_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_{10}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{27}{2} (2\xi - 2\xi^2 - \eta + \eta^2 - 2\xi\eta) .$$

Mithin findet man unter Berücksichtigung von (3) den Wert

$$K_{1010} = \frac{729}{2} \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \left[(\eta - 2\xi\eta - \eta^2)^2 + \frac{1}{3} (2\xi - 2\xi^2 - \eta + \eta^2 - 2\xi\eta)^2 \right] d\xi d\eta = \frac{81}{20} \sqrt{3} \quad (9b)$$

Mit den Zahlenwerten (8) und (9b) erhält man schließlich aus (7) das Ergebnis

$$\Phi_{10} = 2/27 \quad (10)$$

das mit dem exakten Wert aus Ü 7.1.5 übereinstimmt.

Das *Torsionsmoment* ermittelt man nach der Formel (7.47) mit $GD = 1$ [Dimension] unter Berücksichtigung von (3), (4), (5) und (10) zu:

$$M = \frac{8}{3} \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi \eta (1 - \xi - \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{45} \sqrt{3} \quad (11)$$

Auch dieses Ergebnis stimmt mit dem exakten Wert aus Ü 7.1.5 überein.

Schließlich erhält man aus (4) mit (5), (10) und (2a,b) die *Torsionsfunktion* in der Darstellung

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} (y - 2 + \sqrt{3} x) (y - \sqrt{3} x) y \quad (12)$$

die sich mit der exakten *Torsionsfunktion* aus Ü 7.1.5 deckt.

Die Ergebnisse (8), (9b), (11) und (12), die man leicht von Hand ermitteln kann, sind mit Hilfe der MAPLE-Software überprüft worden, wie der folgende Computeroutput zeigt.

```
>F[10]:=36*sqrt(3)*Int(Int(xi*eta*(1-xi-eta),xi=0..1-eta),eta=0..1)=
```

```
36*sqrt(3)*int(int(xi*eta*(1-xi-eta),xi=0..1-eta),eta=0..1);
```

$$F_{10} := 36 \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi \eta (1 - \xi - \eta) d\xi d\eta = \frac{3}{10} \sqrt{3}$$

```
>nx:=eta-2*xi*eta-eta^2; ny:=(2*xi-2*xi^2-eta+eta^2-2*xi*eta)/sqrt(3);
```

$$nx := \eta - 2 \xi \eta - \eta^2$$

$$ny := \frac{1}{3} (2\xi - 2\xi^2 - \eta + \eta^2 - 2\xi\eta) \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} >K[1010] := (729 * \text{sqrt}(3)/2) * \text{Int}(\text{Int}(nx^2 + ny^2, xi=0..1-eta), eta=0..1) \\ &= (729 * \text{sqrt}(3)/2) * \text{int}(\text{int}(nx^2 + ny^2, xi=0..1-eta), eta=0..1); \end{aligned}$$

$$K_{1010} := \frac{729}{2} \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (\eta - 2\xi\eta - \eta^2)^2 + \frac{1}{3} (2\xi - 2\xi^2 - \eta + \eta^2 - 2\xi\eta)^2 d\xi d\eta = \frac{81}{20} \sqrt{3}$$

$$>\Phi[10] := (3/10)/(81/20) = \text{evalf}((3/10)/(81/20));$$

$$\Phi_{10} := \frac{2}{27} = .07407407407$$

Dieser Wert stimmt mit der exakten Lösung überein. Das Torsionsmoment ermittelt man zu:

$$\begin{aligned} >M := (8 * \text{sqrt}(3)/3) * \text{Int}(\text{Int}(xi * eta * (1-xi-eta), xi=0..1-eta), eta=0..1) \\ &= (8 * \text{sqrt}(3)/3) * \text{int}(\text{int}(xi * eta * (1-xi-eta), xi=0..1-eta), eta=0..1); \end{aligned}$$

$$M := \frac{8}{3} \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi \eta (1 - \xi - \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{45} \sqrt{3}$$

Auch dieses Ergebnis stimmt mit der exakten Lösung überein. Ersetzt man in der Torsionsfunktion die Koordinaten (xi, eta) des Einheitsdreiecks durch die lineare Transformation

$$>xi := \text{sqrt}(3) * x/2 - y/2; \quad eta := y;$$

$$\xi := \sqrt{3} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$$

$$\eta := y$$

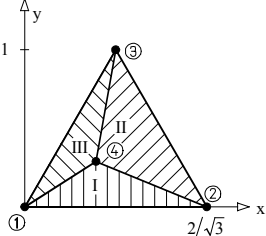
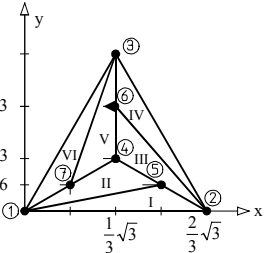
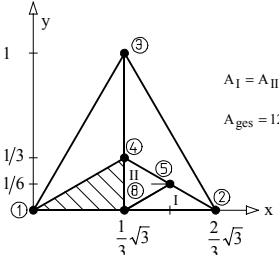
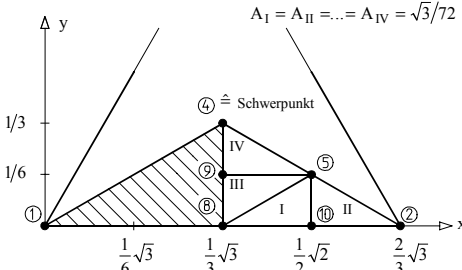
so erhält man die Torsionsfunktion in (x,y)-Koordinaten:

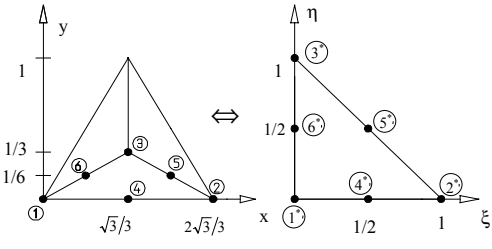
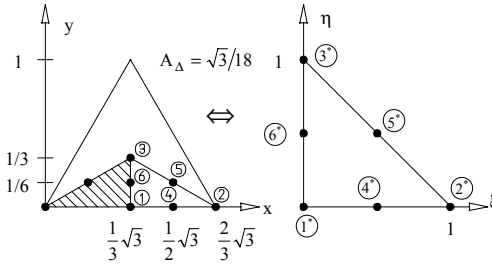
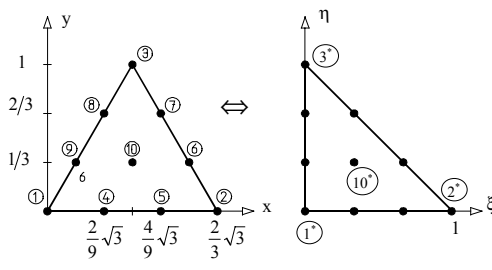
$$>\Phi := \text{simplify}(2 * (\text{sqrt}(3) * x/2 - y/2) * y * (1 - (\text{sqrt}(3) * x/2 - y/2) - eta));$$

$$\Phi := -\frac{1}{2} (\sqrt{3} x - y) y (-2 + \sqrt{3} x + y)$$

die sich mit der exakten Torsionsfunktion deckt!

Zur besseren Übersicht sind die FEM Lösungen der Übungen Ü7.1.5 bis Ü7.1.7 für das Torsionsmoment eines dreieckigen Stabes mit der exakten Lösung $M_{\text{ex}} = (1/45)\sqrt{3}$ in der folgenden Tabelle verglichen.

Diskretisierung	Lösung	Fehler
<p>3 Lineare Elemente (Ü 7.1.5)</p> 	$M = \frac{4}{243} \sqrt{3}$ $\frac{M}{M_{\text{ex}}} = 1.35$	25.93%
<p>6 Lineare Elemente (Ü 7.1.5)</p> 	$M = \frac{128}{81 \cdot 87} \sqrt{3}$ $\frac{M}{M_{\text{ex}}} = 1.22$	18.3%
<p>12 Lineare Elemente (Ü 7.1.5)</p>  <p> $A_I = A_{II} = \frac{1}{36} \sqrt{3}$ $A_{\text{ges}} = 12 A_I = \frac{1}{3} \sqrt{3}$ </p>	$M = \frac{4}{243} \sqrt{3}$ $\frac{M}{M_{\text{ex}}} = 1.35$	25.93%
<p>24 Lineare Elemente (Ü 7.1.5)</p>  <p> $A_I = A_{II} = \dots = A_{IV} = \sqrt{3}/72$ $4 \triangleq \text{Schwerpunkt}$ </p>	$M = \frac{40}{9 \cdot 243} \sqrt{3}$ $\frac{M}{M_{\text{ex}}} = 1.215$	17.7%

Diskretisierung	Lösung	Fehler
<p>3 quadratische Elemente (Ü 7.1.6a)</p> 	$M = \frac{1}{54}\sqrt{3}$ $\frac{M}{M_{\text{ex}}} = \frac{6}{5} = 1.2$	16.66%
<p>6 quadratische Elemente (Ü 7.1.6b)</p> 	$M = \frac{4}{189}\sqrt{3}$ $\frac{M}{M_{\text{ex}}} = \frac{21}{20} = 1.05$	4.76%
<p>1 kubisches Element (Ü 7.1.7)</p> 	$M = \frac{1}{45}\sqrt{3} \equiv M_{\text{ex}}$	0

Bemerkung: Aufgrund der Normierung des gleichseitigen Dreiecks auf die Höhe $h = 1$ mit den entsprechenden Kantenlängen $\ell_{\Delta} = 2/\sqrt{3}$ und der vereinfachten Schreibweise in Gleichung (7.47) und Übung 7.15 gemäß $GD = 1$ ist das betrachtete Torsionsmoment M dimensionslos. Das Produkt aus Gleitmodul G und Drillung D hat die Dimension $[N/m^2]$. Ausführlich wird das Torsionsproblem (*elastisch* und *plastisch*) in [BETTEN, 2001] behandelt. Die *POISSONSche Differentialgleichung* $\Delta\Phi = -2GD$ für die Torsionsfunktion $\Phi = \Phi(x, y)$ beschreibt formal auch andere Probleme, z.B.: *Durchbiegungsfläche* $w = w(x, y)$ einer *vorgespannten Membran* gemäß $\Delta w = -q(x, y)/S$ oder *Druckaufbau* $p = p(x, y)$ in einer

Quetschströmung gemäß $\Delta p = -12\eta v/h^3$. Die gesuchten Funktionen in den erwähnten Differentialgleichungen verschwinden alle am Rande.

Das Problem der *plastischen Torsion* (BETTEN, 2001) wird durch die Differentialgleichung $|\text{grad } \Phi| = k$ beschrieben (*Sandhügelgleichnis*).

Ü 7.1.8

Aufgrund der *homogenen Randbedingungen* (7.41) ist ein *eingliedriger RITZ-Ansatz* für das gleichseitige Dreieck analog (7.44) in der Form

$$\Phi_1 = C_1(y - 2 + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x)y \quad (1)$$

gegeben. Dieser ("globale") Ansatz wird in das *Funktional*

$$J[\Phi(x,y)] = \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - 4\Phi \right] dx dy \quad (7.42)$$

eingesetzt, das der *POISSONschen Differentialgleichung* $\Delta \Phi = -2$ *POISSONschen Differentialgleichung* $\Delta \Phi = -2$ zugeordnet ist. Auf diese Weise geht das *Funktional* (7.42) in eine *Funktion* $J = J(C_1)$ über. Aus der Forderung $\partial J(C_1)/\partial C_1 \stackrel{!}{=} 0$ erhält man den gesuchten Ansatzfreiwert $C_1 = 1/2$ in (1), der auf die *exakte Lösung* aus Ü 7.1.5 führt.

Die Integration in (7.42) erfolgt zunächst über x in den Grenzen

$$y/\sqrt{3} \leq x \leq (2-y)/\sqrt{3} \quad (2a)$$

und anschließend über y in den Grenzen

$$0 \leq y \leq 1, \quad (2b)$$

wie aus der Geometrie des tordierten Querschnitts in Ü 7.1.5 hervorgeht.

Die Ausführung der Integration in (7.42) ist für das vorliegende Beispiel wesentlich komplizierter als das unmittelbare Einsetzen des Näherungsansatzes (1) in die *POISSONschen Differentialgleichung* (7.39). Bequem lässt sich die Integration jedoch mit Hilfe der MAPLE-Software ausführen, wie der nachstehende Computerausdruck zeigt.

>

In das Funktional

>J:=Int(Int((Diff(Phi,x))^2+(Diff(Phi,y))^2-4*Phi,

x=y/sqrt(3)..(2-y)/sqrt(3)),y=0..1);

$$J := \int_0^1 \int_{1/3 y \sqrt{3}}^{1/3 (2-y) \sqrt{3}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Phi \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \Phi \right)^2 - 4 \Phi \, dx \, dy$$

wird der eingliedrige RITZ-Ansatz

$$> \Phi := C[1] * (y - 2 + \sqrt{3} x) * (y - \sqrt{3} x) * y;$$

$$\Phi := C_1 (y - 2 + \sqrt{3} x) (y - \sqrt{3} x) y$$

eingesetzt:

$$> J := \text{int}(\text{int}((\text{diff}(\Phi, x))^2 + (\text{diff}(\Phi, y))^2 - 4 * \Phi,$$

$$x = y/\sqrt{3} .. (2 - y)/\sqrt{3}), y = 0 .. 1);$$

$$J := -\frac{4}{45} C_1 \sqrt{3} + \frac{4}{45} C_1^2 \sqrt{3}$$

Die Ableitung dieser Funktion nach dem Ansatzfreiwert

$$> dJ := \text{diff}(J, C[1]);$$

$$dJ := -\frac{4}{45} \sqrt{3} + \frac{8}{45} C_1 \sqrt{3}$$

muss verschwinden. Aus dieser Forderung ergibt sich die gesuchte Konstante

$$> C[1] := \text{solve}(dJ = 0);$$

$$C_1 := \frac{1}{2}$$

die auf die exakte Lösung führt!

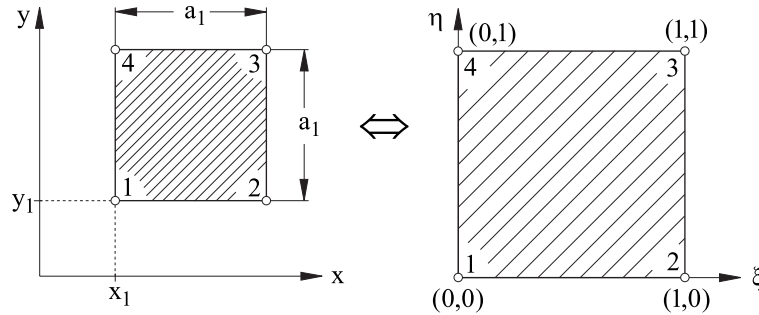
Anmerkung: Falls im gewählten *RITZ-Ansatz* **zufällig** die *exakte Lösung* enthalten ist, liefert das *RITZ-Verfahren* die Ansatzfreiwerte gerade so, dass der *Näherungsansatz mit der exakten Lösung* übereinstimmt, wie das obige Beispiel zeigt! Dieser Sachverhalt kommt auch in Ü 7.1.1 zum Ausdruck.

Die Übungen 7.1.5 bis 7.1.8 sollen zeigen, dass bei einfacher Geometrie und einfachen Randbedingungen (hier: *homogene Randbedingungen*) die FEM gegenüber dem *klassischen RITZ-Verfahren* sehr schwerfällig sein kann. Dieses kann auch beim Torsionsstab mit Rechteckquerschnitt festgestellt werden (Beispiel in Ziffer 7.1). Weiterhin wird gezeigt, dass *lineare Formfunktionen (shape functions)* auch bei aufwendigen verbesserten Diskretisierungen (Ü 7.1.5) zu unbrauchbaren Ergebnissen führen können, so dass die *p-Methode* (Erhöhung des Polynomgrades der shape functions) zur Verbesserung der Ergebnisse gegenüber der *h-Methode* (Erhöhung der Anzahl der finiten Elemente) verwendet werden muss (Ü 7.1.6 / Ü 7.1.7). Ausführlicher werden die Begriffe *h-Methode*, *p-Methode* und darüber hinaus *r-Methode* in Ziffer 7.4 erklärt.

Zu erwähnen seien auch die Übungen 7.1.9 bis 7.1.15, in denen zur Lösung des *Torsionsproblems* rechteckiger Stäbe *Rechteckelemente* höherer Ordnung verwendet werden, die der *LAGRANGE*- oder der *SERENDIPITY-Klasse* angehören.

Ü 7.1.9

Zur Lösung der Aufgabe wird man zweckmäßigerweise ein finites achsenparalleles Quadratelement auf das *Einheitsquadrat* transformieren (Skizze).



Die Abbildung erfolgt mittels der *linearen Transformation*

$$\begin{cases} x = x_1 + a_1 \xi \\ y = y_1 + a_1 \eta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = (x - x_1) / a_1 \\ \eta = (y - y_1) / a_1 \end{cases} \quad (1)$$

Ihre *JACOBIISCHE Determinante* ergibt sich zu

$$J := \begin{vmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2, \quad (2)$$

so dass

$$dx dy = a_1^2 d\xi d\eta \quad (3)$$

gilt.

Bemerkung: In Ziffer 4.4 wird das *Master-Quadrat* $-1 \leq (\xi, \eta) \leq 1$ gemäß Bild 4.17 eingeführt. Das hat den Vorteil, dass die *Formfunktionen* in einer einheitlichen Form dargestellt werden können, wie beispielsweise die Darstellungen (4.127), (4.130), (4.131) der *LAGRANGE-Klasse* oder auch die Formulierungen (4.133), (4.134) der *SERENDIPITY-Klasse*.

Hingegen besitzt obige Transformation (1) auf das *Einheitsquadrat* Vorteile bei der Ermittlung der *Steifigkeitsmatrix* (7.68) und des *Kraftvektors* (7.69), da die Integrationen im *Einheitsquadrat* entlang ξ und η jeweils von 0 bis 1 erfolgen.

Die in den Ziffern 4.4 und 4.5 aufgestellten *Formfunktionen* können für das *Einheitsquadrat* **nicht** verwendet werden. Im Gegensatz zu (4.127) ermittelt man die *bilinearen Formfunktionen* unter Beachtung der Interpolationsforderung $N_i(\xi_k, \eta_k) = \delta_{ik}$ zu :

$N_1(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta)$	$N_2(\xi, \eta) = \xi(1 - \eta)$	$N_3(\xi, \eta) = \xi\eta$	$N_4(\xi, \eta) = \eta(1 - \xi)$	(4a÷d)
--	----------------------------------	----------------------------	----------------------------------	--------

Zur Ermittlung der *Steifigkeitsmatrix* (7.68) müssen die Ableitungen $\partial N_i / \partial x$ und $\partial N_i / \partial y$ durch ξ und η ausgedrückt werden. Aufgrund der *Kettenregel* und der *linearen Transformation* (1) erhält man :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}. \quad (5b)$$

Damit kann (7.68) unter Beachtung von (3) gemäß

$$k_{ij}^e := \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \quad (6)$$

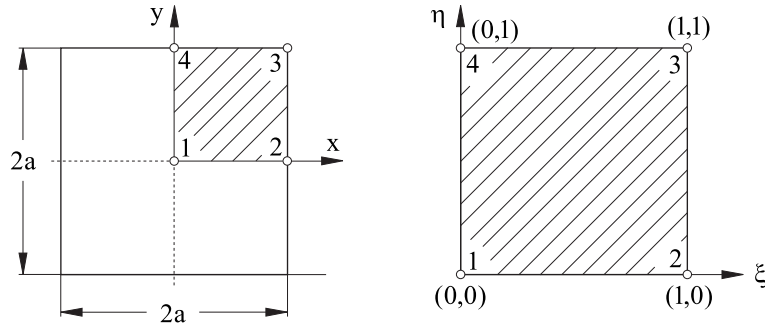
ausgewertet werden.

Den *Kraftvektor* (7.69) ermittelt man wegen (3) aus

$$f_i^e := 2a_1^2 \int_0^1 \int_0^1 N_i(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (7)$$

Nach diesen Vorarbeiten kann die Aufgabe konkret behandelt werden.

1) Diskretisierung des tordierten Querschnitts in vier *finite Elemente* (Skizze)



Die *Torsionsfunktion* gehorcht der *POISSONschen Differentialgleichung* (7.39) und erfüllt die Randbedingung (7.41), so dass bei obiger *Diskretisierung* nur der *Knotenwert* Φ_1 zu bestimmen ist. Man erhält diesen Wert wegen $\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 0$ aus der Matrixgleichung (7.67b) zu:

$$\Phi_1 = f_1^e / k_{11}^e. \quad (8)$$

Darin ermittelt man f_1^e aus (7) mit (4a) und $a_1 \equiv a$ zu :

$$f_1^e = 2a^2 \int_0^1 \int_0^1 (1-\xi)(1-\eta) d\xi d\eta = \frac{1}{2} a^2 \quad (9)$$

und k_{11} aus (6) mit (4a) zu:

$$k_{11}^e = \int_0^1 \int_0^1 [(1-\xi)^2 + (1-\eta)^2] d\xi d\eta = \frac{2}{3}, \quad (10)$$

so dass der gesuchte *Knotenwert* (8) durch

$$\boxed{\Phi_1 = \frac{3}{4} a^2} \quad (11)$$

gegeben ist. Aufgrund der Randbedingung $\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 0$ liegt mit (11) die Torsionsfunktion fest :

$$\Phi(\xi, \eta) = \Phi_1 N_1(\xi, \eta) = \frac{3}{4} a^2 (1-\xi)(1-\eta), \quad (12)$$

womit man schließlich aus (7.47) mit (3) das *Torsionsmoment* ermittelt :

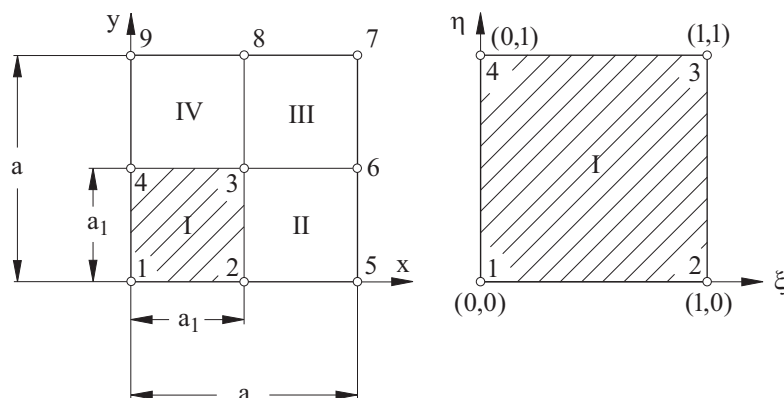
$$M/4 = 2GDa^2 \Phi_1 \int_0^1 \int_0^1 (1-\xi)(1-\eta) d\xi d\eta \Rightarrow \boxed{\frac{M}{GDa^4} = \frac{3}{2}}. \quad (13)$$

Da aus Symmetriegründen der erste Quadrant des tordierten Querschnitts als Einzelement betrachtet wurde, muss in (13) der Faktor **4** für das Gesamtmoment berücksichtigt werden.

Aus dem eingliedrigen *RITZ-Ansatz* (7.63a) ergibt sich für $a = b$ ein Scheitelwert $\Phi_1(0,0)/a^2 = 5/8$, von dem der obige Knotenwert (11) um **-20%** abweicht.

Im Vergleich mit dem Wert 2,25 nach TIMOSHENKO/GOODIER aus Tabelle 7.5 ist der Näherungswert (13) um **30%** zu klein, so dass eine feinere Diskretisierung erforderlich ist.

2) Diskretisierung des tordierten Querschnitts in **sechzehn** finite Elemente (Skizze)



Aus Symmetriegründen braucht man nur den ersten Quadranten des tordierten Querschnitts zu betrachten. Die **vier** finiten Elemente I bis IV sind deckungsgleich, so dass die Elementmatrizen nur für ein Element ermittelt werden müssen.

Aus (6) ergeben sich mit (4a÷d) aufgrund der Symmetrie $k_{ij}^e = k_{ji}^e$ und mit den Teilintegralen

$$\int_0^1 \int_0^1 \xi^2 d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^1 \eta^2 d\xi d\eta = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (1-\xi^2) d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^1 (1-\eta^2) d\xi d\eta = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \xi(1-\xi) d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^1 \eta(1-\eta) d\xi d\eta = \frac{1}{6}$$

folgende 10 Werte:

$$k_{11}^e = \int_0^1 \int_0^1 [(1-\eta)^2 + (1-\xi)^2] d\xi d\eta = \frac{2}{3},$$

$$k_{12}^e = \int_0^1 \int_0^1 [-(1-\eta)^2 + \xi(1-\xi)] d\xi d\eta = -\frac{1}{6},$$

$$k_{13}^e = \int_0^1 \int_0^1 [-\eta(1-\eta) - \xi(1-\xi)] d\xi d\eta = -\frac{1}{3},$$

$$k_{14}^e = \int_0^1 \int_0^1 [\eta(1-\eta) - (1-\xi)^2] d\xi d\eta = -\frac{1}{6},$$

$$k_{22}^e = \int_0^1 \int_0^1 [(1-\eta)^2 + \xi^2] d\xi d\eta = \frac{2}{3},$$

$$k_{23}^e = \int_0^1 \int_0^1 [\eta(1-\eta) - \xi^2] d\xi d\eta = -\frac{1}{6},$$

$$k_{24}^e = \int_0^1 \int_0^1 [-\eta(1-\eta) - \xi(1-\xi)] d\xi d\eta = -\frac{1}{3},$$

$$k_{33}^e = \int_0^1 \int_0^1 [\eta^2 + \xi^2] d\xi d\eta = \frac{2}{3},$$

$$k_{34}^e = \int_0^1 \int_0^1 [-\eta^2 + (1-\xi)] d\xi d\eta = -\frac{1}{6},$$

$$k_{44}^e = \int_0^1 \int_0^1 [\eta^2 + (1-\xi)^2] d\xi d\eta = \frac{2}{3}.$$

Diese Integrale lassen sich bequem zu Fuß auswerten.

Die *Steifigkeitsmatrix* (6) für das finite Element **I** lautet somit :

$$[K_I^e] = [k_{ij}^e] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix} \quad (14)$$

Für die finiten Elemente **II**, **III** und **IV** erhält man dasselbe Zahlenschema bei entsprechender Zuordnung von *lokalen* und *globalen Knotennummern* :

$$\begin{matrix} \textcircled{2} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{3} & & \textcircled{3} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} & & \textcircled{4} & \textcircled{3} & \textcircled{8} & \textcircled{9} \\ \left[\begin{matrix} K_{II}^e = K_I^e \end{matrix} \right] \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \left[\begin{matrix} K_{III}^e = K_I^e \end{matrix} \right] \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{6} \\ \textcircled{7} \\ \textcircled{8} \end{matrix} & \left[\begin{matrix} K_{IV}^e = K_I^e \end{matrix} \right] \begin{matrix} \textcircled{4} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{8} \\ \textcircled{9} \end{matrix} \end{matrix} \quad (15)$$

Den *Kraftvektor* erhält man aus (7) mit (4a+d) und wegen $a_1 \equiv a/2$ zu :

$$\{F_I^e\} = \frac{1}{8} a^2 \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}^t. \quad (16)$$

Aufgrund der Randbedingungen $\Phi_5 = \Phi_6 = \Phi_7 = \Phi_8 = \Phi_9 = 0$ reduziert sich das 9×9-Gesamtsystem (7.86) zu dem Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Darin erhält man die Koeffizienten K_{ij} aus den Zuordnungen (14) und (15) durch entsprechende Addition :

$$K_{1j} = k_{1j}^I, j = 1, 2, 3, 4; \quad K_{22} = k_{22}^I + k_{22}^{II} = \frac{1}{6}(4 + 4) = \frac{4}{3};$$

$$K_{23} = k_{23}^I + k_{23}^{II} = \frac{1}{6}(-1 - 1) = -\frac{1}{3}; \quad K_{24} = k_{24}^I = -\frac{1}{3};$$

$$K_{33} = k_{33}^I + k_{33}^{II} + k_{33}^{III} + k_{33}^{IV} = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 4 = \frac{8}{3}.$$

Somit lautet die *reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix* in (17) :

$$[K_{\text{red}}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ & 8 & -2 & -2 \\ & & 16 & -2 \\ \text{symm.} & & & 8 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Entsprechend ermittelt man den "Kraftvektor" $\{F\}$ in (17) unter Berücksichtigung von (16) :

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1^I = \frac{1}{8}a^2; & F_2 &= f_2^I + f_2^{II} = \frac{1}{4}a^2; \\ F_3 &= f_3^I + f_3^{II} + f_3^{III} + f_3^{IV} = \frac{1}{2}a^2; & F_4 &= f_4^I + f_4^{II} = \frac{1}{4}a^2; \\ \{F\} &= \frac{1}{8}a^2 \{1 \quad 2 \quad 4 \quad 2\}^t. \end{aligned} \quad (19)$$

Mithin lautet das "reduzierte" Gleichungssystem :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 8 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 16 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \frac{3}{4}a^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

mit dem *Lösungsvektor*

$$\{\Phi\} = a^2 \begin{Bmatrix} 87/140 = 0,62143 \\ 27/56 = 0,482143 \\ 27/70 = 0,38514 \\ 27/56 = 0,482143 \end{Bmatrix}, \quad (21)$$

der mit Hilfe des MAPLE-Programms bestimmt wurde :

>with(linalg):

>K[red]:=matrix(4,4,[[4,-1,-2,-1],[-1,8,-2,-2],[-2,-2,16,-2],[-1,-2,-2,8]]);

$$K_{red} := \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 8 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 16 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

>f:=(3/4)*a^2*vector([1,2,4,2]);

$$f := \frac{3}{4} a^2 [1 \quad 2 \quad 4 \quad 2]$$

>Phi:=linsolve(K[red],f);

$$\Phi := \begin{bmatrix} \frac{87}{140} a^2 & \frac{27}{56} a^2 & \frac{27}{70} a^2 & \frac{27}{56} a^2 \end{bmatrix}$$

>Phi:=map(evalf,");

$$\Phi = \begin{bmatrix} .6214285714 a^2 & .4821428571 a^2 & .3857142857 a^2 & .4821428571 a^2 \end{bmatrix}$$

>

Darin unterscheidet sich der erste Wert $\Phi_1 = \frac{87}{140} a^2$ vom Scheitelwert

$\Phi_1(0,0) = \frac{5}{8} a^2$ des *eingliedrigen RITZ-Ansatzes* (7.63a) um 0,57%.

Die *JACOBIsche Determinante* (2) ist wegen $a_1 = a/2$ durch $J = a^2/4$ gegeben, so dass das *Torsionsmoment* (7.47) für das Einheitsquadrat aus

$$\frac{M}{GDa^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \Phi(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (22)$$

folgt. Die vier einzelnen finiten Elemente I-IV im ersten Quadranten des tordierten Querschnitts liefern analog (7.98a+d) folgende Beiträge zum Gesamtmoment :

$$\frac{M_I}{GDa^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (\Phi_1 N_1 + \Phi_2 N_2 + \Phi_3 N_3 + \Phi_4 N_4) d\xi d\eta, \quad (23a)$$

$$\frac{M_{II}}{GDa^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (\Phi_2 N_1 + \Phi_5 N_2 + \Phi_6 N_3 + \Phi_3 N_4) d\xi d\eta, \quad (23b)$$

$$\frac{M_{III}}{GDa^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (\Phi_3 N_1 + \Phi_6 N_2 + \Phi_7 N_3 + \Phi_8 N_4) d\xi d\eta, \quad (23c)$$

$$\frac{M_{IV}}{GDa^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (\Phi_4 N_1 + \Phi_3 N_2 + \Phi_8 N_3 + \Phi_9 N_4) d\xi d\eta. \quad (23d)$$

Da die Einzelintegrale über die Formfunktionen (4a÷d) untereinander gleich sind,

$$\int_0^1 \int_0^1 N_1 d\xi d\eta = \dots = \int_0^1 \int_0^1 N_4 d\xi d\eta = \frac{1}{4}, \quad (24)$$

vereinfachen sich die Momente (23a÷d) zu :

$$\frac{M_I}{GDa^2} = \frac{1}{8} (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4), \quad (25a)$$

$$\frac{M_{II}}{GDa^2} = \frac{1}{8} (\Phi_2 + \Phi_5 + \Phi_6 + \Phi_3), \quad (25b)$$

$$\frac{M_{III}}{GDa^2} = \frac{1}{8} (\Phi_3 + \Phi_6 + \Phi_7 + \Phi_8), \quad (25c)$$

$$\frac{M_{IV}}{GDa^2} = \frac{1}{8} (\Phi_4 + \Phi_3 + \Phi_8 + \Phi_9). \quad (25d)$$

Setzt man darin den Lösungsvektor (21) ein, so erhält man unter Beachtung der Randbedingungen $\Phi_5 = \Phi_6 = \Phi_7 = \Phi_8 = \Phi_9 = 0$ als Summe dieser Beiträge :

$$M_{I+IV} = \frac{1}{8} GDa^4 (\Phi_1 + 2\Phi_2 + 4\Phi_3 + 2\Phi_4) = \frac{573}{1120} GDa^4. \quad (26)$$

Dieser Wert bezieht sich auf einen Quadranten des tordierten Querschnitts, so dass sich das gesamte Torsionsmoment des quadratischen Querschnitts zu

$$M = \frac{573}{280} GDa^4 \approx 2,04643 GDa^4 \quad (27)$$

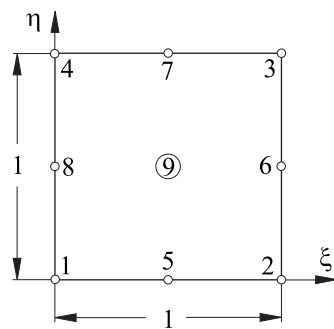
ergibt. Dieser Wert weicht um **7,9%** vom eingliedigen *RITZ-Ansatz* und um **9,05%** vom Wert nach TIMOSHENKO / GOODIER (Tabelle 7.5) ab und ist günstiger als die in Tabelle 7.5 eingetragene FEM-Lösung von 35/18, die mit einer Diskretisierung durch **8×4 lineare Dreieckselemente** gemäß Bild 7.7 erzielt wurde.

Der Wert (27) stellt gegenüber der ersten Diskretisierung mit dem Ergebnis (13) eine erhebliche Verbesserung dar. Durch eine weitere Netzverfeinerung kann der Fehler gegenüber der Lösung nach TIMOSHENKO / GOODIER noch verringert werden. Alternativ führt die Verwendung von finiten Elementen mit Formfunktionen höherer Ordnung bei **größerer Netzgenerierung** zu besseren Ergebnissen, wie in Ü 7.1.10 und Ü 7.1.11 gezeigt wird.

Ü 7.1.10

Aufgrund der bequemerer Integrationen soll entgegen Ziffer 4.4 im Folgenden wie auch in Ü 7.1.9 das *Einheitsquadrat* als "*Masterquadrat*" verwendet werden. Dazu

müssen die *biquadratischen Formfunktionen* für das *Einheitsquadrat* (Skizze) aufgestellt werden, die sich von (4.129) bzw. (4.130) unterscheiden.



$$f_1(\xi) = \frac{(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1)}{(0 - \frac{1}{2})(0 - 1)} = (1 - \xi)(1 - 2\xi)$$

$$g_1(\eta) = \frac{(\eta - \frac{1}{2})(\eta - 1)}{(0 - \frac{1}{2})(0 - 1)} = (1 - \eta)(1 - 2\eta)$$

Die Funktionen $f_1(\xi)$ und $g_1(\eta)$ sind *eindimensionale Interpolationsfunktionen* vom *LAGRANGEschen Typ* gemäß (4.125a,b). Daraus ermittelt man die *Formfunktion* $N_1(\xi, \eta)$, die im Knotenpunkt ① den Wert eins annimmt und in allen anderen Knotenpunkten verschwindet :

$$N_1(\xi, \eta) = f_1(\xi)g_1(\eta) = (1 - \xi)(1 - 2\xi)(1 - \eta)(1 - 2\eta) .$$

Ein anderes Beispiel ist $N_6(\xi, \eta) = f_6(\xi)g_6(\eta)$ mit den Interpolationsfunktionen

$$f_6(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - \frac{1}{2})}{(1 - 0)(1 - \frac{1}{2})} = -\xi(1 - 2\xi) ,$$

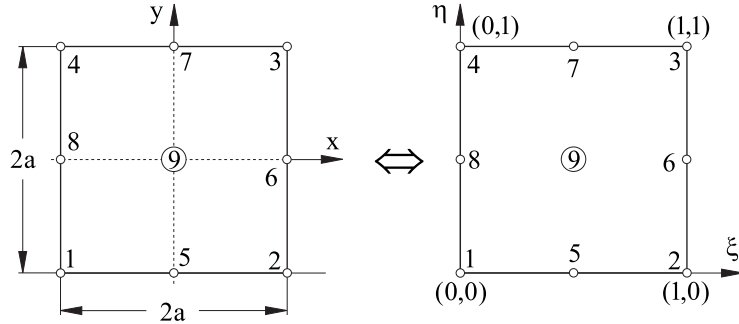
$$g_6(\eta) = \frac{(\eta - 0)(\eta - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 1)} = 4\eta(1 - \eta) .$$

Damit wird $N_6(\xi, \eta) = 4\xi\eta(1 - 2\xi)(1 - \eta)$. Daraus erhält man unmittelbar N_7 durch Vertauschen von ξ und η , da die Knotenpunkte ⑥ und ⑦ symmetrisch zur Diagonalen $\eta = \xi$ liegen. Insgesamt ermittelt man folgende *biquadratischen Formfunktionen* vom *LAGRANGEschen Typ* :

$N_1 = (1 - \xi)(1 - 2\xi)(1 - \eta)(1 - 2\eta)$	$N_2 = -\xi(1 - 2\xi)(1 - \eta)(1 - 2\eta)$	$N_3 = \xi\eta(1 - 2\xi)(1 - 2\eta)$
$N_4 = -\eta(1 - 2\eta)(1 - \xi)(1 - 2\xi)$	$N_5 = 4\xi(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - 2\eta)$	$N_6 = -4\xi\eta(1 - 2\xi)(1 - \eta)$
$N_7 = -4\xi\eta(1 - \xi)(1 - 2\eta)$	$N_8 = 4\eta(1 - \eta)(1 - \xi)(1 - 2\xi)$	$N_9 = 16\xi\eta(1 - \xi)(1 - \eta)$

(1)

Als erste Näherung sei für den gesamten tordierten Querschnitt nur **ein** finites Element vorgesehen (Skizze).



Der tordierte Querschnitt wird vermöge der *linearen Transformation*

$$\boxed{x = -a + 2a\xi \quad y = -a + 2a\eta} \Leftrightarrow \boxed{\xi = \frac{1}{2a}(x+a) \quad \eta = \frac{1}{2a}(y+a)} \quad (2)$$

umkehrbar eindeutig auf das Einheitsquadrat abgebildet. Ihre *JACOBIsche Determinante* ergibt sich zu :

$$J := \begin{vmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{vmatrix} = 4a^2 \Rightarrow \boxed{dx dy = 4a^2 d\xi d\eta} \quad (3)$$

Aufgrund der Randbedingungen $\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_8 = 0$ ist nur der Scheitelwert Φ_9 der *Torsionsfunktion* unbekannt, der sich unmittelbar aus der Standardbeziehung $[K]\{\Phi\} = \{F\}$ zu

$$\boxed{\Phi_9 = f_9 / k_{99}} \quad (4)$$

ergibt. Darin ermittelt man f_9 nach (7.69) mit N_9 aus (1) und unter Berücksichtigung von (3) zu

$$\boxed{f_9 = 128a^2 \int_0^1 \int_0^1 \xi \eta (1-\xi)(1-\eta) d\xi d\eta = \frac{32}{9} a^2} \quad (5)$$

Der Koeffizient k_{99} folgt aus (7.68) :

$$k_{99} := \iint_{A_\square} \left[\left(\frac{\partial N_9}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_9}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (6)$$

mit

$$\frac{\partial N_9}{\partial x} = \frac{\partial N_9}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_9}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2a} \frac{\partial N_9}{\partial \xi}, \quad (7a)$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial y} = \frac{\partial N_9}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_9}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2a} \frac{\partial N_9}{\partial \eta}. \quad (7b)$$

Darin ist die Transformation (2) berücksichtigt. Setzt man (3) und (7a,b) mit $N_9(\xi, \eta)$ aus (1) in (6) ein, so erhält man :

$$k_{99} = 256 \int_0^1 \int_0^1 \left[\eta^2 (1-\eta)^2 (1-2\xi)^2 + \xi^2 (1-\xi)^2 (1-2\eta)^2 \right] d\xi d\eta.$$

Darin stimmt die Integration über den ersten Term mit der Integration über den zweiten Term überein,

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\eta^2 (1-\eta)^2 (1-2\xi)^2 \right] d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^1 \left[\xi^2 (1-\xi)^2 (1-2\eta)^2 \right] d\xi d\eta,$$

da die Integranden durch Vertauschen von ξ und η ineinander übergehen und die Integrationsreihenfolge vertauschbar ist. Mithin wird :

$$k_{99} = 512 \int_0^1 \int_0^1 \left[\xi^2 (1-\xi)^2 (1-2\eta)^2 \right] d\xi d\eta = \frac{256}{45}. \quad (8)$$

Die Integrale in (5) und (8) lassen sich bequem zu Fuß ohne Computerhilfe lösen. Mit (5) und (8) liegt der Knotenwert (4) fest :

$$\Phi_9 = \frac{5}{8} a^2, \quad (9)$$

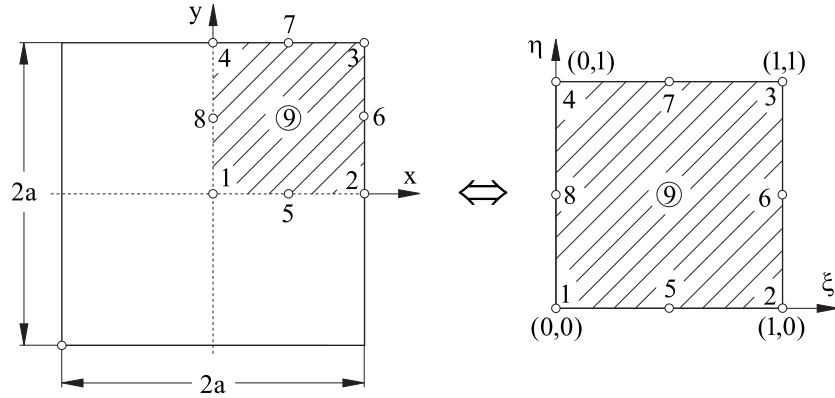
der mit dem Scheitelwert (7.63a) aus dem *eingliedrigen RITZ-Ansatz* übereinstimmt!

Aufgrund der Randbedingungen $\Phi_1 = \dots = \Phi_8 = 0$ ist die *Torsionsfunktion* durch $\Phi = \Phi_9 N_9(\xi, \eta)$ gegeben, so dass mit (3), (9) und N_9 aus (1) das *Torsionsmoment* (7.47) folgenden Wert annimmt :

$$M = 80 G D a^4 \int_0^1 \int_0^1 \xi (1-\xi) \eta (1-\eta) d\xi d\eta = \frac{20}{9} G D a^4. \quad (10)$$

Auch dieses Ergebnis stimmt mit dem RITZschen Wert aus dem eingliedrigen Ansatz (Tabelle 7.5) überein und weicht vom exakten Wert $M = 2,25 G D a^4$ nur um $1/81 \cong 1,235\%$ ab.

Eine Verbesserung dieses Wertes (wenn noch erwünscht) kann durch eine feinere Diskretisierung erfolgen, wobei der gesamte Querschnitt in **vier finite Elemente** unterteilt wird (Skizze).



Bei der Aufteilung des gesamten Querschnitts in **vier finite Elemente** braucht man aus Symmetriegründen nur den ersten Quadranten zu betrachten (Skizze), der vermöge der *linearen Transformation*

$$\boxed{\begin{array}{|l|l|} \hline x = a\xi & y = a\eta \\ \hline \end{array}} \quad (11)$$

umkehrbar eindeutig auf das Einheitsquadrat abgebildet wird. Ihre JACOBIsche Determinante ergibt sich abweichend von (3) zu :

$$J = a^2 \Rightarrow \boxed{dx dy = a^2 d\xi d\eta} . \quad (12)$$

Aufgrund der Randbedingungen $\Phi_2 = \Phi_6 = \Phi_3 = \Phi_7 = \Phi_4 = 0$ brauchen nur die **vier** unbekannten Knotenwerte $\Phi_1, \Phi_5, \Phi_8, \Phi_9$ bestimmt zu werden, die sich aus dem *reduzierten Gleichungssystem*

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{15} & K_{18} & K_{19} \\ K_{51} & K_{55} & K_{58} & K_{59} \\ K_{81} & K_{85} & K_{88} & K_{89} \\ K_{91} & K_{95} & K_{98} & K_{99} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_5 \\ \Phi_8 \\ \Phi_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_5 \\ F_8 \\ F_9 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ergeben. Die Koeffizienten K_{ij} in diesem Gleichungssystem ermittelt man aus dem Integral (6) der Übung 7.1.9, das vom Wert der *JACOBIschen Determinante* $J = a_1^2$ nicht beeinflusst wird :

$$\boxed{K_{ij} = k_{ij}^e := \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta} . \quad (14)$$

Aufgrund der Symmetrie $k_{ij}^e = k_{ji}^e$ sind nur **zehn** Integrale der Form (14) mit den Formfunktionen (1) auszuwerten. Die in (14) benötigten Ableitungen ergeben sich mit (1) zu :

$$A_1 \equiv \partial N_1 / \partial \xi = (4\xi - 3)(1 - \eta)(1 - 2\eta) ,$$

$$B_1 \equiv \partial N_1 / \partial \eta = (4\eta - 3)(1 - \xi)(1 - 2\xi) ,$$

$$A_5 \equiv \partial N_5 / \partial \xi = 4(1 - 2\xi)(1 - \eta)(1 - 2\eta) ,$$

$$B_5 \equiv \partial N_5 / \partial \eta = 4\xi(1 - \xi)(4\eta - 3) ,$$

$$A_8 \equiv \partial N_8 / \partial \xi = 4\eta(1 - \eta)(4\xi - 3) ,$$

$$B_8 \equiv \partial N_8 / \partial \eta = 4(1 - \xi)(1 - 2\xi)(1 - 2\eta) ,$$

$$A_9 \equiv \partial N_9 / \partial \xi = 16\eta(1 - \eta)(1 - 2\xi) ,$$

$$B_9 \equiv \partial N_9 / \partial \eta = 16\xi(1 - \xi)(1 - 2\eta) .$$

Damit erhält man aus (14) die "reduzierte" Steifigkeitsmatrix in (13) zu :

$$[K_{\text{red}}] = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} 28 & -9 & -9 & -16 \\ & 88 & -16 & -48 \\ & & 88 & -48 \\ \text{symm.} & & & 256 \end{bmatrix} . \quad (15)$$

In (13) wird der "Kraftvektor" benötigt, den man aus (7.69) unter Berücksichtigung von (12) ermittelt :

$$\{f_i^e\} = \{F_1 \quad F_5 \quad F_8 \quad F_9\}^t = \left\{ 2a^2 \int_0^1 \int_0^1 N_i(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} , \quad (16a)$$

$$\{F_1 \quad F_5 \quad F_8 \quad F_9\}^t = \frac{1}{18} a^2 \{1 \quad 4 \quad 4 \quad 16\}^t . \quad (16b)$$

Mit (15) und (16b) lautet das Gleichungssystem (13) :

$$\begin{bmatrix} 56 & -18 & -18 & -32 \\ -18 & 176 & -32 & -96 \\ -18 & -32 & 176 & -96 \\ -32 & -96 & -96 & 512 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_5 \\ \Phi_8 \\ \Phi_9 \end{bmatrix} = a^2 \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \\ 20 \\ 80 \end{bmatrix} \quad (17)$$

mit dem Lösungsvektor

$$\{\Phi\} = a^2 \begin{Bmatrix} 23/39 \approx 0,59 \\ 71/156 \approx 0,46 \\ 71/156 \approx 0,46 \\ 227/624 \approx 0,364 \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

der mit Hilfe des folgenden MAPLE-Programms bestimmt wurde :

```
>with(linalg):
>K[red]:=matrix(4,4,[[56,-18,-18,-32],[-18,176,-32,-96],[-18,-32,176,-96],[-32,-96,-96,512]]);
```

$$K_{red} := \begin{bmatrix} 56 & -18 & -18 & -32 \\ -18 & 176 & -32 & -96 \\ -18 & -32 & 176 & -96 \\ -32 & -96 & -96 & 512 \end{bmatrix}$$

```
>f:=a^2*vector([5,20,20,80]);
```

$$f := a^2 \begin{bmatrix} 5 & 20 & 20 & 80 \end{bmatrix}$$

```
>Phi:=linsolve(K[red],f);
```

$$\Phi := \begin{bmatrix} \frac{23}{39} a^2 & \frac{71}{156} a^2 & \frac{71}{156} a^2 & \frac{227}{624} a^2 \end{bmatrix}$$

```
>Phi:=map(evalf,"");
```

$$\Phi := \begin{bmatrix} .5897435897 a^2 & .4551282051 a^2 & .4551282051 a^2 & .3637820513 a^2 \end{bmatrix}$$

```
>
```

Wegen (12) ergibt sich das *Torsionsmoment* aus (7.47) zu :

$$M/4 = 2GDa^2 \int_0^1 \int_0^1 (\Phi_1 N_1 + \Phi_5 N_5 + \Phi_8 N_8 + \Phi_9 N_9) d\xi d\eta. \quad (19)$$

Darin stimmen die Integrale mit (16a,b) überein, so dass man schließlich mit (18) das Ergebnis

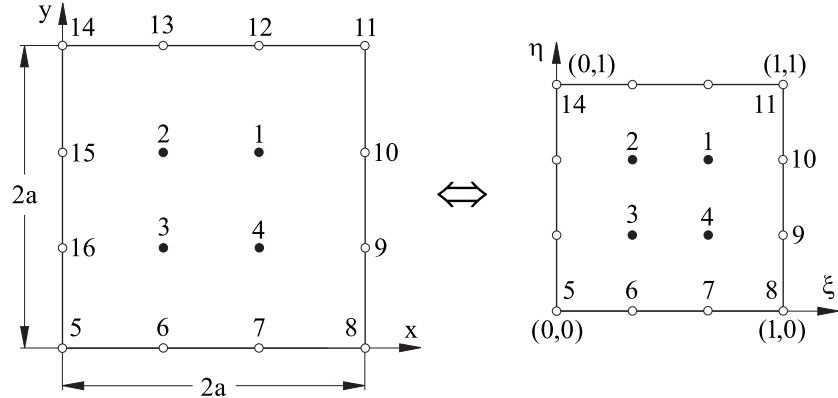
$$\boxed{M = 2,234GDa^4} \quad (20)$$

erhält, das vom exakten Wert $M = 2,25GDa^4$ nur um **0,71%** abweicht!

Man beachte, dass die mittels *zwei-* und *dreigliedrigen RITZ-Ansätzen* gewonnenen Ergebnisse für den quadratischen Querschnitt ($a = b$) nach Tabelle 7.4 für $n = 2$ und $n = 3$ durch $M = 2,2427GDa^4$ und $M = 2,2428GDa^4$ noch günstiger sind!

Ü 7.1.11

Die Diskretisierung geht aus der Skizze hervor.



Der *tordierte Querschnitt* wird auf das *Einheitsquadrat* gemäß der linearen Transformation

$$x = 2a\xi, \quad y = 2a\eta$$

abgebildet, so dass die *JACOBIsche Determinante* durch $J = 4a^2$ gegeben ist. Mithin gilt für die Flächenelemente der Zusammenhang

$$\boxed{dx dy = 4a^2 d\xi d\eta} . \quad (1)$$

Aufgrund der Randbedingungen $\Phi_5 = \Phi_6 = \dots = \Phi_{16} \equiv 0$ sind nur die vier *Knotenwerte* Φ_1 bis Φ_4 unbekannt und somit auch nur die vier Formfunktionen N_1 bis N_4 zu bestimmen. Diese findet man folgendermaßen.

Für den Knotenpunkt ① gelten die eindimensionalen LAGRANGESchen Interpolationsfunktionen

$$f_1(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1)}{(\frac{2}{3} - 0)(\frac{2}{3} - \frac{1}{3})(\frac{2}{3} - 1)} = -\frac{9}{2}\xi(1 - \xi)(1 - 3\xi) ,$$

$$g_1(\eta) = \frac{(\eta - 0)(\eta - \frac{1}{3})(\eta - 1)}{(\frac{2}{3} - 0)(\frac{2}{3} - \frac{1}{3})(\frac{2}{3} - 1)} = -\frac{9}{2}\eta(1 - \eta)(1 - 3\eta) ,$$

aus denen $N_1(\xi, \eta) := f_1(\xi)g_1(\eta)$ gefolgert wird. Insgesamt erhält man auf diese Weise die folgenden *Formfunktionen vom LAGRANGESchen Typ* :

$N_1(\xi, \eta) = \frac{81}{4} \xi(1-\xi)(1-3\xi)\eta(1-\eta)(1-3\eta)$
$N_2(\xi, \eta) = -\frac{81}{4} \xi(1-\xi)(2-3\xi)\eta(1-\eta)(1-3\eta)$
$N_3(\xi, \eta) = \frac{81}{4} \xi(1-\xi)(2-3\xi)\eta(1-\eta)(2-3\eta)$
$N_4(\xi, \eta) = -\frac{81}{4} \xi(1-\xi)(1-3\xi)\eta(1-\eta)(2-3\eta)$

(2)

Zur Ermittlung der vier *Knotenwerte* Φ_1 bis Φ_4 ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ & & K_{33} & K_{34} \\ & \text{symm.} & & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

zu lösen. Darin bestimmt man die Koeffizienten K_{ij} aus der Formel (7.68) unter Berücksichtigung der *linearen Transformation* $x = 2a\xi$, $y = 2a\eta$ mit der *JACOBI-schen Determinante* $4a^2$ aus (1) gemäß

$$K_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta. \quad (4)$$

Entsprechend geht die Formel (7.69) für den "*Kraftvektor*" in

$$F_i := 2 \iint_{\Lambda_{\square}} N_i dx dy = 8a^2 \int_0^1 \int_0^1 N_i(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5)$$

über. Um das Gleichungssystem (3) vollständig ausfüllen zu können, sind insgesamt **14** Integrale der Form (4) bzw. (5) nach Einsetzen der Formfunktionen (2) auszuwerten. Dabei ist die *MAPLE-Software* sehr hilfreich.

Es ist jedoch **nicht** erforderlich, alle 14 Werte auszurechnen; denn aufgrund der symmetrischen Lage der vier Knotenpunkte ① bis ④ zum Mittelpunkt des tordierten Querschnitts unterscheiden sich die Knotenwerte **nicht**: $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4$ und $F_1 = F_2 = F_3 = F_4$, so dass man aus (3) nur die Formel

$$\Phi_1 = F_1 / (K_{11} + K_{12} + K_{13} + K_{14}) \quad (6)$$

mit 5 Integralen vom Typ (4) bzw. (5) auszuwerten hat. Aus (4) und (5) mit (2) ermittelt man folgende Werte :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline K_{11} = \frac{1458}{175} & K_{12} = K_{14} = -\frac{9477}{2800} & K_{13} = \frac{8019}{11200} \\ \hline \end{array} \quad (7)$$

$$F_i = 9a^2 / 8 ; \quad i = 1,2,3,4 \quad (8)$$

so dass sich die Knotenvariablen Φ_i , $i = 1,2,3,4$, nach (6) zu

$$\Phi_i = 40a^2 / 81 ; \quad i = 1,2,3,4 \quad (9)$$

ergeben, womit die *Torsionsfunktion* unter Berücksichtigung der *Formfunktionen* (2) gemäß

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \Phi_i N_i(\xi, \eta) = 10a^2 \xi \eta (1 - \xi)(1 - \eta) \quad (10)$$

bestimmt ist. Hieraus liest man den Wert $\Phi(1/2, 1/2) = 5a^2/8$ ab, der mit dem Scheitelwert $\Phi_1(0,0)$ des *eingliedrigen RITZ-Ansatzes* (7.63a) für $a = b$ übereinstimmt! Man beachte, dass die dimensionslosen Koordinaten (ξ, η) in (10) und (7.63a) unterschiedlich sind.

Schließlich ist das *Torsionsmoment* gefragt, das nach (7.47) mit (1) und (10) den Wert

$$M = 2GD \iint_{\Lambda \square} \Phi dx dy = 80 GDa^4 \int_0^1 \int_0^1 \xi(1 - \xi)\eta(1 - \eta) d\xi d\eta = \frac{20}{9} GDa^4 \quad (11)$$

annimmt und mit dem Ergebnis aus dem *eingliedrigen RITZ -Ansatz* (Tabelle 7.5) übereinstimmt!

Um den Rechenaufwand klein zu halten, wurde die symmetrische Lage der Knotenpunkte ① bis ④ im tordierten Querschnitt ausgenutzt, so dass nur die Werte (7) und (8) ermittelt werden mussten. Zur Kontrolle sind sämtliche Werte im Gleichungssystem (3) mit Hilfe der MAPLE-Software ausgewertet worden. Die Ergebnisse sind im nachstehenden Computerausdruck festgehalten.

>with(linalg):

>K[red]:=matrix(4,4,[[1458/175,-9477/2800,8019/11200,-9477/2800],

> [-9477/2800,1458/175,-9477/2800,8019/11200],

> [8019/11200,-9477/2800,1458/175,-9477/2800],

> [-9477/2800,8019/11200,-9477/2800,1458/175]]);

$$K_{red} := \begin{bmatrix} \frac{1458}{175} & \frac{-9477}{2800} & \frac{8019}{11200} & \frac{-9477}{2800} \\ \frac{-9477}{2800} & \frac{1458}{175} & \frac{-9477}{2800} & \frac{8019}{11200} \\ \frac{8019}{11200} & \frac{-9477}{2800} & \frac{1458}{175} & \frac{-9477}{2800} \\ \frac{-9477}{2800} & \frac{8019}{11200} & \frac{-9477}{2800} & \frac{1458}{175} \end{bmatrix}$$

$$>f:=(9*a^2/8)*\text{vector}([1,1,1,1]);$$

$$f:=\frac{9}{8}a^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich der Lösungsvektor zu:

$$>\Phi[i]:=\text{linsolve}(K[\text{red}],f);$$

$$\Phi_i := \begin{bmatrix} \frac{40}{81}a^2 & \frac{40}{81}a^2 & \frac{40}{81}a^2 & \frac{40}{81}a^2 \end{bmatrix}$$

$$>N[1]:=(xi,eta)->(81/4)*xi*(1-xi)*(1-3*xi)*eta*(1-eta)*(1-3*eta);$$

$$N_1 := (\xi, \eta) \rightarrow \frac{81}{4} \xi (1 - \xi) (1 - 3 \xi) \eta (1 - \eta) (1 - 3 \eta)$$

$$>M[1]:=(8*40/81*G*D*a^4)*\text{int}(\text{int}(N[1](xi,eta),xi=0..1),eta=0..1);$$

$$M_1 := \frac{5}{9} G D a^4$$

$$>N[2]:=(xi,eta)->-(81/4)*xi*(1-xi)*(2-3*xi)*eta*(1-eta)*(1-3*eta);$$

$$N_2 := (\xi, \eta) \rightarrow -\frac{81}{4} \xi (1 - \xi) (2 - 3 \xi) \eta (1 - \eta) (1 - 3 \eta)$$

$$>M[2]:=(8*40/81*G*D*a^4)*\text{int}(\text{int}(N[2](xi,eta),xi=0..1),eta=0..1);$$

$$M_2 := \frac{5}{9} G D a^4$$

$$>N[3]:=(xi,eta)->(81/4)*xi*(1-xi)*(2-3*xi)*eta*(1-eta)*(2-3*eta);$$

$$N_3 := (\xi, \eta) \rightarrow \frac{81}{4} \xi (1 - \xi) (2 - 3 \xi) \eta (1 - \eta) (2 - 3 \eta)$$

$$>M[3]:=(8*G*D*40/81*a^4)*\text{int}(\text{int}(N[3](xi,eta),xi=0..1),eta=0..1);$$

$$M_3 := \frac{5}{9} G D a^4$$

$$>N[4]:=(xi,eta)->-(81/4)*xi*(1-xi)*(1-3*xi)*eta*(1-eta)*(2-3*eta);$$

$$N_4 := (\xi, \eta) \rightarrow -\frac{81}{4} \xi (1 - \xi) (1 - 3 \xi) \eta (1 - \eta) (2 - 3 \eta)$$

$$>M[4] := (8 \cdot 40 / 81 \cdot G \cdot D \cdot a^4) \cdot \text{int}(\text{int}(N[4](xi, eta), xi=0..1), eta=0..1);$$

$$M_4 := \frac{5}{9} G D a^4$$

$$>M := 8 \cdot G \cdot D \cdot a^4 \cdot \text{Int}(\text{Int}(\Phi, xi=0..1), eta=0..1) = M[1] + M[2] + M[3] + M[4];$$

$$M := 8 G D a^4 \int_0^1 \int_0^1 \Phi d\xi d\eta = \frac{20}{9} G D a^4$$

Dieser Wert stimmt mit dem eingliedrigen *RITZ*-Ansatz und dem quadratischen FE-Ansatz überein!

Anmerkung : Die Übungen 7.1.10 und 7.1.11 haben gezeigt, dass die *biquadratischen* und *bikubischen Formfunktionen* auf **dasselbe** Torsionsmoment führen, das auch mit dem *eingliedrigen RITZ-Ansatz* übereinstimmt, wenn man den gesamten Querschnitt des tordierten Stabes als *Einzelement* betrachtet. Bei dieser Diskretisierung erfasst der *biquadratische Ansatz* in (Ü 7.1.10) den Mittelpunkt des tordierten Querschnitts, während sich die *bikubischen Formfunktionen* auf **vier** Knotenpunkte im Querschnitt beziehen, die vom Mittelpunkt in ξ - und η -Richtung um jeweils $\xi = \pm 1/6$ und $\eta = \pm 1/6$ entfernt liegen. So könnte man sich vielleicht die Übereinstimmung erklären.

Ü 7.1.12

Der halbe Querschnitt des Quadratstabes wird vermöge der linearen Transformation

$$x = 2a\xi, \quad y = 2a\eta \quad (1)$$

auf das *Einheitsdreieck* umkehrbar eindeutig abgebildet. Die *JACOBIsche Determinante* ist $J = 4a^2$, so dass

$$dx dy = 4a^2 d\xi d\eta \quad (2)$$

gilt. In der Skizze der Aufgabenstellung sind **10** Knotenpunkte im finiten Dreieckselement eingetragen. Mithin sind *kubische Formfunktionen* zu wählen.

Aufgrund der Randbedingung (7.41) für die *Torsionsfunktion* sind nur die **drei** Knotenwerte Φ_6 , Φ_7 und Φ_{10} von null verschieden, die im Folgenden zu bestimmen sind. Dazu werden die drei *Formfunktionen*

$$N_6 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_2 - 1) = \frac{9}{2} \xi \eta (3\xi - 1) \quad (4.100b)$$

$$N_7 = \frac{9}{2} L_3 L_2 (3L_3 - 1) = \frac{9}{2} \eta \xi (3\eta - 1) \quad (4.101b)$$

$$N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3 = \xi \eta (1 - \xi - \eta) \quad (4.103)$$

benötigt. Darin erfolgt der Übergang von den Flächenkoordinaten L_i zu den Koordinaten (ξ, η) mit Hilfe der Zusammenhänge (4.105a,b,c).

Das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der drei Knotenwerte für die *Torsionsfunktion* hat folgende Gestalt :

$$\begin{bmatrix} K_{66} & K_{67} & K_{610} \\ & K_{77} & K_{710} \\ \text{symm.} & & K_{1010} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_6 \\ \Phi_7 \\ \Phi_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_6 \\ F_7 \\ F_{10} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Darin ermittelt man den "Kraftvektor" nach der Formel (7.69) in Verbindung mit (2) gemäß

$$F_i = 2 \iint_{\Lambda_\Delta} N_i dx dy = 8a^2 \int_0^1 \int_0^{1-\eta} N_i(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (4)$$

Zu beachten ist, dass die Integrationen in den Grenzen $0 \leq \xi \leq 1-\eta$ und $0 \leq \eta \leq 1$ über das *Einheitsdreieck* erfolgen. Mit den oben angegebenen *kubischen Formfunktionen* erhält man aus (4) die einzelnen Werte

$$\boxed{F_6 = F_7 = 3a^2/10 \quad F_{10} = 9a^2/5} \quad (5)$$

der Spaltenmatrix auf der rechten Seite von (3).

Die Knotenpunkte ⑥, ⑦ und ⑩ haben zum Querschnittsmittelpunkt denselben Abstand, so dass $\Phi_6 = \Phi_7 = \Phi_{10}$ gelten muss. Mithin braucht man in (3) nur noch die Koeffizienten K_{66} , K_{67} und K_{610} auszuwerten, um die unbekannten Knotenwerte bestimmen zu können :

$$\boxed{\Phi_6 = \Phi_7 = \Phi_{10} = F_6 / (K_{66} + K_{67} + K_{610})}. \quad (6)$$

Die Formel (7.68) geht mit (1) und (2) in

$$k_{ij}^e = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \quad (7)$$

über, woraus man nach Einsetzen von (4.100b), (4.101b) und (4.103) folgende Werte ermittelt :

$$\boxed{K_{66} = 27/8 \quad K_{67} = -27/40 \quad K_{610} = -81/40}. \quad (8)$$

Mit (5) und (8) liefert (6) die Knotenwerte :

$$\boxed{\Phi_6 = \Phi_7 = \Phi_{10} = 4a^2/9}. \quad (9)$$

Damit erhält man unter Berücksichtigung der *Formfunktionen* (4.100b), (4.101b) und (4.103) die *Torsionsfunktion*

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{4}{9} a^2 \sum_{i=6,7,10} N_i = 2a^2 \xi \eta (4 - 3\xi - 3\eta). \quad (10)$$

Das *Torsionsmoment* folgt aus (7.47) mit (2), (10) und durch Überlagerung der beiden finiten Elemente (doppelter Wert) zu :

$$M = 32 G D a^4 \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi \eta (4 - 3\xi - 3\eta) d\xi d\eta = \frac{32}{15} G D a^4 \approx 2.133 \bar{3} G D a^4. \quad (11)$$

Dieses Ergebnis ist schlechter als der in Ü 7.1.11 erzielte Wert. Der Fehler im Vergleich zur exakten Lösung von TIMOSHENKO / GOODIER (Tabelle 7.5) ist $7/135 \approx 5,2\%$.

Aufgrund der symmetrischen Lage der Knotenpunkte ⑥, ⑦ und ⑩ zum Mittelpunkt des tordierten Querschnitts brauchten nur die Werte F_6 , K_{66} , K_{67} und K_{610} ermittelt zu werden, um gemäß (6) die Knotenwerte bestimmen zu können. Zur Kontrolle sind sämtliche Koeffizienten im Gleichungssystem (3) mit Hilfe der MAPLE-Software bestimmt worden. Multipliziert man das Gleichungssystem auf beiden Seiten noch mit dem Faktor 40, so erhält man

$$\begin{bmatrix} 135 & -27 & -81 \\ -27 & 135 & -81 \\ -81 & -81 & 324 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_6 \\ \Phi_7 \\ \Phi_{10} \end{Bmatrix} = a^2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 12 \\ 72 \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Daraus ergibt sich ein *Lösungsvektor*, der mit (9) übereinstimmt!

Ü 7.1.13

Aus Symmetriegründen braucht man nur eine Hälfte des Querschnitts zu betrachten. Aufgrund der in der Skizze vorgegebenen Anzahl von Knotenpunkten sind *quadratische Formfunktionen* zu wählen.

Die Abbildung der drei finiten Elemente auf die entsprechenden *Einheits-elemente* erfolgt mittels der linearen Transformation

$$x = a\xi, \quad y = a\eta, \quad (1)$$

so dass für die Flächenelemente der Zusammenhang

$$dx dy = a^2 d\xi d\eta \quad (2)$$

gilt. Aufgrund der *homogenen Randbedingung* (7.41) sind nur die Knotenwerte Φ_1 bis Φ_6 zu bestimmen. Für die einzelnen finiten Elemente erhält man folgende Ergebnisse.

Element I mit den Knotenpunkten ①, ②, ③, ④

Mit den Ergebnissen (15) und (16b) aus Ü 7.1.10 lautet das Gleichungssystem des *finiten Elementes I* bei entsprechender Knotennummerierung :

$$\begin{bmatrix} 28/45 & -1/5 & -1/5 & -16/45 \\ & 88/45 & -16/45 & -16/15 \\ & & 88/45 & -16/15 \\ \text{symm.} & & & 256/45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = a^2 \begin{Bmatrix} 1/18 \\ 2/9 \\ 2/9 \\ 8/9 \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Element II mit den Knotenpunkten ①, ④, ⑤

Das Gleichungssystem des *finiten Elementes II* hat die Form

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{\text{II}} & K_{14}^{\text{II}} & K_{15}^{\text{II}} \\ & K_{44}^{\text{II}} & K_{45}^{\text{II}} \\ \text{symm.} & & K_{55}^{\text{II}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{\text{II}} \\ F_4^{\text{II}} \\ F_5^{\text{II}} \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Zur Ermittlung der *Steifigkeitsmatrix* K_{ij}^{II} und des "*Kraftvektors*" F_i^{II} nach den Formeln (7.68) und (7.69) werden die *quadratischen Formfunktionen*

$$\boxed{N_1^{\text{II}} = (1-\eta)(1-2\eta) \quad N_4^{\text{II}} = 4(1-\eta)(\xi+\eta) \quad N_5^{\text{II}} = -4\xi(1-\eta)} \quad (5)$$

benötigt.

Für das *finite Element II* ist der Integrationsbereich

$$\boxed{-\eta \leq \xi \leq 0 \quad 0 \leq \eta \leq 1} \quad (6)$$

zu beachten, so dass die Auswerteformel (14) in Ü 7.1.10 entsprechend modifiziert werden muss :

$$\boxed{K_{ij}^{\text{II}} = \int_0^1 \int_{-\eta}^0 \left(\frac{\partial N_i^{\text{II}}}{\partial \xi} \frac{\partial N_j^{\text{II}}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i^{\text{II}}}{\partial \eta} \frac{\partial N_j^{\text{II}}}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta}. \quad (7)$$

Ebenso ist der "*Kraftvektor*" (16a) in Ü 7.1.10 entsprechend zu modifizieren :

$$\boxed{F_i^{\text{II}} = 2a^2 \int_0^1 \int_{-\eta}^0 N_i^{\text{II}}(\xi, \eta) d\xi d\eta}. \quad (8)$$

Mit (5), (7), (8) lautet das Gleichungssystem (4) konkret :

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -2/3 & 0 \\ & 8/3 & -4/3 \\ \text{symm.} & & 8/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} a^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Element III mit den Knotenpunkten ①, ②, ⑥

Das Gleichungssystem des *finiten Elementes III* hat die Form

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{III} & K_{12}^{III} & K_{16}^{III} \\ & K_{22}^{III} & K_{26}^{III} \\ \text{symm.} & & K_{66}^{III} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{III} \\ F_2^{III} \\ F_6^{III} \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Die *quadratischen Formfunktionen* für das finite Element III ergeben sich aus (5) durch Vertauschen von ξ und η aufgrund der Spiegelsymmetrie der Elemente II und III an der Diagonalen $\eta = \xi$ zu :

$$\boxed{N_1^{III} = (1-\xi)(1-2\xi) \quad N_2^{III} = 4(1-\xi)(\xi+\eta) \quad N_6^{III} = -4\eta(1-\xi)} \quad (11)$$

Für das *finite Element III* ist der Integrationsbereich

$$\boxed{-\eta \leq \xi \leq 1 \quad -1 \leq \eta \leq 0} \quad (12)$$

zu beachten, so dass (7) und (8) entsprechend modifiziert werden müssen :

$$\boxed{K_{ij}^{III} = \int_{-1-\eta}^0 \int_{-\eta}^1 \left(\frac{\partial N_i^{III}}{\partial \xi} \frac{\partial N_j^{III}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i^{III}}{\partial \eta} \frac{\partial N_j^{III}}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta}, \quad (13)$$

$$\boxed{F_i^{III} = 2a^2 \int_{-1-\eta}^0 \int_{-\eta}^1 N_i^{III}(\xi, \eta) d\xi d\eta}. \quad (14)$$

Die Auswertung der Integrale in (13) und (14) mit den Formfunktionen (11) führt auf das Gleichungssystem :

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -2/3 & 0 \\ & 8/3 & -4/3 \\ \text{symm.} & & 8/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} a^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

das mit (9) "zahlenmäßig" übereinstimmt, da die finiten Elemente II und III *kon-*
gruent sind. Es genügt also, das Gleichungssystem (4) zu bestimmen, das bei ent-

sprechender Umbenennung der Knotennummern mit (15) übereinstimmt. Durch derartige Überlegungen kann man den Rechenaufwand verringern.

Das Gleichungssystem der Stabhälfte setzt sich aus den Teilsystemen (3), (9) und (15) zusammen. Beispielsweise erhält man folgende Einzelwerte :

$$K_{11} = K_{11}^I + K_{11}^{II} + K_{11}^{III} = 28/45 + 1/2 + 1/2 = 73/45 ,$$

$$K_{14} = K_{14}^I + K_{14}^{II} + K_{14}^{III} = -1/5 - 2/3 + 0 = -13/15 ,$$

$$K_{12} = K_{12}^I + K_{12}^{II} + K_{12}^{III} = -1/5 + 0 - 2/3 = -13/15 ,$$

$$F_1 = F_1^I + F_1^{II} + F_1^{III} = (1/18 + 0 + 0) a^2 = a^2/18 ,$$

$$F_4 = F_4^I + F_4^{II} + F_4^{III} = (2/9 + 1/3 + 0) a^2 = 5a^2/9 .$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem, nachdem man noch mit dem gemeinsamen Nenner **90** auf beiden Seiten multipliziert hat, zu :

$$\begin{bmatrix} 146 & -78 & -32 & -78 & 0 & 0 \\ -78 & 416 & -96 & -32 & 0 & -120 \\ -32 & -96 & 512 & -96 & 0 & 0 \\ -78 & -32 & -96 & 416 & -120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -120 & 240 & 0 \\ 0 & -120 & 0 & 0 & 0 & 240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{bmatrix} = a^2 \begin{bmatrix} 5 \\ 50 \\ 80 \\ 50 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix} . \quad (16)$$

Die Lösung erfolgt mit Hilfe der MAPLE-Software, wie der nachstehende Computerausdruck zeigt.

>with(linalg):

>K[red]:=matrix(6,6,[[146,-78,-32,-78,0,0],[-78,416,-96,-32,0,-120],[-32,-96,512,-96,0,0],[-78,-32,-96,416,-120,0],[0,0,0,-120,240,0],[0,-120,0,0,0,240]]);

$$K_{red} := \begin{bmatrix} 146 & -78 & -32 & -78 & 0 & 0 \\ -78 & 416 & -96 & -32 & 0 & -120 \\ -32 & -96 & 512 & -96 & 0 & 0 \\ -78 & -32 & -96 & 416 & -120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -120 & 240 & 0 \\ 0 & -120 & 0 & 0 & 0 & 240 \end{bmatrix}$$

>f:=a^2*vector([5,50,80,50,30,30]);

$$f := a^2 [5 \quad 50 \quad 80 \quad 50 \quad 30 \quad 30]$$

Der Lösungsvektor ergibt sich zu:

>Phi:=linsolve(K[red],f);

$$\Phi := \begin{bmatrix} \frac{34}{57}a^2 & \frac{103}{228}a^2 & \frac{331}{912}a^2 & \frac{103}{228}a^2 & \frac{20}{57}a^2 & \frac{20}{57}a^2 \end{bmatrix}$$

Aus Symmetriegründen stimmen die Knotenwerte in 2 und 4 überein. Dasselbe gilt für die Knotenwerte in 5 und 6, die sich ebenfalls aus Symmetriegründen vom Knotenwert in 3 nicht unterscheiden dürften. Der geringe Unterschied in den obigen Werten beruht darauf, dass der Knotenpunkt 3 in einem Rechteckelement liegt, während 5 und 6 Knotenpunkte kongruenter Dreieckselemente sind!

>

Zur Ermittlung des *Torsionsmomentes* sind die "*Teilmomente*" der einzelnen *finiten Elemente* aufzustellen. Für das **Element I** gilt

$$\Phi_I(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^4 \Phi_k N_k^I(\xi, \eta) \quad (17)$$

mit den biquadratischen Formfunktionen

$N_1^I = (1-\xi)(1-2\xi)(1-\eta)(1-2\eta)$	$N_2^I = 4\xi(1-\xi)(1-\eta)(1-2\eta)$	(18a,b)
$N_3^I = 16\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)$	$N_4^I = 4\eta(1-\eta)(1-\xi)(1-2\xi)$	(18c,d)

aus Ü 7.1.10 bei entsprechender Umindizierung. Aus der Formel (7.47) erhält man mit (2), (17), (18a,b,c,d) und dem Lösungsvektor aus (16) das Teilmoment

$$M_I = 2GDa^2 \int_0^1 \int_0^1 \Phi_I d\xi d\eta = \frac{571}{1026} GDa^4. \quad (19)$$

Für die finiten Dreieckselemente II und III lauten die *Torsionsfunktionen*

$$\Phi_{II}(\xi, \eta) = \Phi_1 N_1^{II} + \Phi_4 N_4^{II} + \Phi_5 N_5^{II}, \quad (20)$$

$$\Phi_{III}(\xi, \eta) = \Phi_1 N_1^{III} + \Phi_2 N_2^{III} + \Phi_6 N_6^{III}, \quad (21)$$

mit denen man unter Beachtung der Integrationsbereiche (6) und (12) und der Formfunktionen (5) und (11) analog (19) die Teilmomente

$$M_{II} = 2GDa^2 \int_0^1 \int_{-\eta}^0 \Phi_{II} d\xi d\eta = \frac{61}{228} GDa^4, \quad (22)$$

$$M_{III} = 2GDa^2 \int_{-1-\eta}^0 \int_0^1 \Phi_{III} d\xi d\eta = \frac{61}{228} GDa^4 \quad (23)$$

erhält. Die Teilmomente (22) und (23) müssen gleich sein aufgrund der Symmetrie. Zur Kontrolle wurden beide Integrale in (22) und (23) getrennt ausgewertet.

Die Summe der Beiträge (19), (22) und (23) ergibt sich zu $M_{I+III} = (560/513)GDa^4$. Dieser Wert bezieht sich auf die drei finiten Elemente I+III, d.h. auf den halben Querschnitt des tordierten Stabes, so dass sich das *Torsionsmoment* schließlich zu

$$M = \frac{1120}{513} GDa^4 = 2,18324 GDa^4 \quad (24)$$

ergibt. Dieser Wert ist im Vergleich zur exakten Lösung von TIMOSHENKO / GOODIER (Tabelle 7.5) mit einem Fehler von **2,97%** behaftet.

Anmerkung : In Ü 7.1.10 wurde ein besserer Wert erzielt, der mit einem Fehler von nur **0,71%** behaftet ist. Noch besser liegen die Ergebnisse auf der Basis des *zweigliedrigen* und *dreigliedrigen RITZ-Ansatzes* (Tabelle 7.4 mit $a = b$). Es war aufgrund der Geometrie des Torsionsstabes zu erwarten, dass die Diskretisierung in der vorliegenden Übung ein schlechteres Ergebnis liefert als Ü 7.1.10. In der vorliegenden Übung sollte gezeigt werden, wie man Dreieckselemente und Rechteckelemente koppeln kann.

Die Ergebnisse (19), (22), (23) und (24) sind mit Hilfe der MAPLE-Software überprüft worden, wie nachstehender Computerausdruck zeigt.

>

Torsionsfunktion und Teilmoment im finiten Element I:

> Phi[I] := (xi, eta) -> (1/57) * (1-xi) * (1-eta) * (34+35*xi+35*eta+55*xi*eta) * a^2;

$$\Phi_I := (\xi, \eta) \rightarrow \frac{1}{57} (1 - \xi) (1 - \eta) (34 + 35 \xi + 35 \eta + 55 \xi \eta) a^2$$

> M[I] := 2 * G * D * a^2 * Int(Int(Phi[I], xi=0..1), eta=0..1) = 2 * G * D * a^2 *
int(int(Phi[I](xi, eta), xi=0..1), eta=0..1);

$$M_I := 2 G D a^2 \int_0^1 \int_0^1 \Phi_I d\xi d\eta = \frac{571}{1026} G D a^4$$

Torsionsfunktion und Teilmoment im finiten Element II:

> Phi[II] := (xi, eta) -> (1/57) * (1-eta) * (34+23*xi+35*eta) * a^2;

$$\Phi_{II} := (\xi, \eta) \rightarrow \frac{1}{57} (1 - \eta) (34 + 23 \xi + 35 \eta) a^2$$

> M[II] := 2 * G * D * a^2 * Int(Int(Phi[II], xi=-eta..0), eta=0..1) =
2 * G * D * a^2 * int(int(Phi[II](xi, eta), xi=-eta..0), eta=0..1);

$$M_{II} := 2 G D a^2 \int_0^1 \int_{-\eta}^0 \Phi_{II} d\xi d\eta = \frac{61}{228} G D a^4$$

Torsionsfunktion und Teilmoment im finiten Element III:

$$> \text{Phi}[III] := (xi, eta) \rightarrow (1/57) * (1 - xi) * (34 + 23 * eta + 35 * xi) * a^2;$$

$$\Phi_{III} := (\xi, \eta) \rightarrow \frac{1}{57} (1 - \xi) (34 + 23 \eta + 35 \xi) a^2$$

$$> M[III] := 2 * G * D * a^2 * \text{Int}(\text{Int}(\text{Phi}[III], xi = -eta..1), eta = -1..0) = \\ 2 * G * D * a^2 * \text{int}(\text{int}(\text{Phi}[III](xi, eta), xi = -eta..1), eta = -1..0);$$

$$M_{III} := 2 G D a^2 \int_{-1}^0 \int_{-\eta}^1 \Phi_{III} d\xi d\eta = \frac{61}{228} G D a^4$$

Das Torsionsmoment des Stabes ergibt sich aus der doppelten Summe der drei Teilmomente:

$$> M := 2 * (M[I] + M[II] + M[III]);$$

$$M := 4 G D a^2 \int_0^1 \int_0^1 \Phi_I d\xi d\eta + 4 G D a^2 \int_0^1 \int_{-\eta}^0 \Phi_{II} d\xi d\eta + 4 G D a^2 \int_{-1}^0 \int_{-\eta}^1 \Phi_{III} d\xi d\eta = \frac{1120}{513} G D a^4$$

$$> M := G * D * a^4 * \text{evalf}(1120/513);$$

$$M := 2.183235867 G D a^4$$

Der relative Fehler gegenüber dem Wert 2.25 von TIMOSHENKO / GOODIER beträgt:

$$> f := (9/4 - 1120/513) / (9/4) = \text{evalf}((9/4 - 1120/513) / (9/4));$$

$$f := \frac{137}{4617} = .02967294780$$

Der relative Fehler beträgt somit 2.97%. Man beachte obige Anmerkung zu diesem Ergebnis.

>

Ü 7.1.14

Die Abbildung des tordierten Querschnitts auf das *Einheitsquadrat* erfolgt vermöge der linearen Transformation

$$x = a\xi, \quad y = a\eta, \quad (1)$$

so dass

$$\boxed{dx dy = a^2 d\xi d\eta} \quad (2)$$

gilt.

Finite Elemente vom SERENDIPITY-Typ besitzen keine inneren Knotenpunkte (Ziffer 4.5 in Band 1). Dadurch verringert sich der Rechenaufwand im Vergleich zu *Elementen vom LAGRANGE-Typ*.

Aufgrund der Randbedingung (7.41) für die *Torsionsfunktion* werden nur die Formfunktionen N_1 , N_2 und N_3 benötigt. Die Formfunktion N_1 besitzt im Knotenpunkt ① den Wert eins und verschwindet in allen anderen Punkten, d.h. entlang den Geraden $1 - \xi = 0$ und $1 - \eta = 0$ sowie der in der Skizze eingezeichneten Geraden $1 - 2\xi - 2\eta = 0$. Entsprechendes gilt für die Formfunktionen N_2 und N_3 . Mithin findet man folgende *quadratische Formfunktionen vom SERENDIPITY-Typ*:

$$\boxed{N_1 = (1-\xi)(1-\eta)(1-2\xi-2\eta) \quad N_2 = 4\xi(1-\xi)(1-\eta) \quad N_3 = 4\eta(1-\eta)(1-\xi)} \quad (3)$$

Aufgrund der symmetrischen Lage der Knotenpunkte ② und ③ zur Diagonalen $\eta = \xi$ ist N_3 eine duale Form von N_2 : durch Vertauschen von ξ und η geht die eine Form in die andere über.

Aufgrund der Randbedingung (7.41) sind nur die Knotenwerte Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 von NULL verschieden, die aus dem reduzierten Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ & K_{22} & K_{23} \\ \text{symm.} & & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

bestimmt werden. Darin sind insgesamt 9 Werte zu ermitteln, die man analog Ü 7.1.10 aus den Formeln

$$\boxed{K_{ij} = k_{ij}^e := \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta} \quad (5)$$

$$\boxed{F_i = 2a^2 \int_0^1 \int_0^1 N_i(\xi, \eta) d\xi d\eta} \quad (6)$$

gewinnt. Die Auswertung der Integrale in (5) und (6) mit den Formfunktionen (3) führt auf das Gleichungssystem

$$\frac{1}{45} \begin{bmatrix} 52 & -37 & -37 \\ -37 & 104 & 0 \\ -37 & 0 & 104 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6} a^2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

mit den Lösungen

$$\boxed{\Phi_1 = \frac{48}{89} a^2 = 0,539 a^2 \quad \Phi_2 \equiv \Phi_3 = \frac{171}{356} a^2 = 0,48 a^2} \quad (8)$$

Damit liegt die *Torsionsfunktion*

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^3 \Phi_k N_k(\xi, \eta) \quad (9)$$

fest, die man zur Bestimmung des *Torsionsmomentes* (7.47) benötigt. Zu beachten ist, dass man mit (2), (3), (8) und (9) nach der Formel (7.47) nur den vierten Teil des Torsionsmomentes erhält. Mithin gilt :

$$M = 8GDa^4 \int_0^1 \int_0^1 \Phi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{196}{89} GDa^4 \approx 2,202 GDa^4 \quad (10)$$

Der relative Fehler dieses Wertes im Vergleich zum Wert 2,25 von TIMOSHENKO /

GOODIER (**Tabelle 7.5**) ist $17/801 \approx 0,0212 \hat{=} 2,12\%$. Die vergleichbaren Werte in Ü 7.1.10 und Ü 7.1.13 sind **2,234** und **2,183**. Ihr arithmetischer Mittelwert stimmt nahezu mit dem Ergebnis (10) überein, das im Vergleich mit Ü 7.1.10 und Ü 7.1.13 mit dem geringsten Rechenaufwand erzielt wurde. Das schlechteste Ergebnis wird in Ü 7.1.13 erzielt, obwohl der Rechenaufwand am größten ist; denn neben dem finiten Rechteck I mit dem Rechenaufwand gemäß Ü 7.1.10 müssen noch die finiten Dreieckselemente II und III in Ü 7.1.13 behandelt werden!

Ü 7.1.15

Aufgrund der linearen Transformation $x = a\xi$, $y = a\eta$ gilt $dx dy = a^2 d\xi d\eta$ wie in Ü 7.1.14. Die Formfunktion N_1 nimmt im Punkt ① den Wert eins an und verschwindet in allen anderen Knotenpunkten. Entsprechendes gilt für die anderen Formfunktionen, so dass die kubischen Formfunktionen lauten :

$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta)(1-3\xi-3\eta)(2-3\xi-3\eta)$	(1)
$N_2(\xi, \eta) = \frac{9}{2}\xi(1-\xi)(1-\eta)(2-3\xi-3\eta)$	
$N_3(\xi, \eta) = -\frac{9}{2}\xi(1-\xi)(1-\eta)(1-3\xi-3\eta)$	
$N_4(\xi, \eta) = -\frac{9}{2}\eta(1-\eta)(1-\xi)(1-3\eta-3\xi)$	
$N_5(\xi, \eta) = \frac{9}{2}\eta(1-\eta)(1-\xi)(2-3\eta-3\xi)$	

Aufgrund der Randbedingung (7.41) für die *Torsionsfunktion* $\Phi = \Phi(\xi, \eta)$ werden nur die in (1) angegebenen 5 *kubischen Formfunktionen* zur Aufstellung des reduzierten Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ & & & K_{44} & K_{45} \\ \text{symm.} & & & & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

benötigt. Mit den Formeln (5) und (6) aus Ü 7.1.14 und den *kubischen Formfunktionen* (1) erhält man das reduzierte Gleichungssystem

$$\frac{1}{1680} \begin{bmatrix} 2524 & -3303 & 3366 & 3366 & -3303 \\ & 10665 & -11043 & -6804 & 3969 \\ & & 16335 & 9639 & -6804 \\ & & & 16335 & -11043 \\ \text{symm.} & & & & 10665 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} a^2 \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ 9 \\ -3 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

mit den Lösungen:

$$\boxed{\Phi_1 = \frac{650}{1097} a^2 \quad \Phi_2 \equiv \Phi_5 = \frac{141130}{266571} a^2 \quad \Phi_3 \equiv \Phi_4 = \frac{95900}{266571} a^2} \quad (4)$$

Aus Symmetriegründen muss gelten: $\Phi_2 \equiv \Phi_5$ und $\Phi_3 \equiv \Phi_4$. Das Gleichungssystem (3) kann bequem mit Hilfe der MAPLE-Software gelöst werden, wie nachstehender Computerausdruck zeigt.

>with(linalg):

>K[red]:=(1/1680)*matrix(5,5,[[2524,-3303,3366,3366,-3303],
[-3303,10665,-11043,-6804,3969],[3366,-11043,16335,9639,-6804],
[3366,-6804,9639,16335,-11043],[-3303,3969,-6804,-11043,10665]]);

$$K_{red} := \frac{1}{1680} \begin{bmatrix} 2524 & -3303 & 3366 & 3366 & -3303 \\ -3303 & 10665 & -11043 & -6804 & 3969 \\ 3366 & -11043 & 16335 & 9639 & -6804 \\ 3366 & -6804 & 9639 & 16335 & -11043 \\ -3303 & 3969 & -6804 & -11043 & 10665 \end{bmatrix}$$

>F:=(1/8)*a^2*vector([2,-3,9,9,-3]);

$$F := \frac{1}{8} a^2 [2 \quad -3 \quad 9 \quad 9 \quad -3]$$

>Phi:=linsolve(K[red],F);

$$\phi := \left[\frac{650}{1097} a^2 \quad \frac{141130}{266571} a^2 \quad \frac{95900}{266571} a^2 \quad \frac{95900}{266571} a^2 \quad \frac{141130}{266571} a^2 \right]$$

>

Für die *Torsionsfunktion* gilt:

$$\Phi = \sum_{i=1}^4 N_i \Phi_i$$

Darin sind die *Formfunktionen* (1) und die *Lösungen* (4) einzusetzen.Das *Torsionsmoment* erhält man mit Hilfe des MAPLE-Programms folgendermaßen:

>

>N[1]:=(xi,eta)->(1/2)*(1-xi)*(1-eta)*(1-3*xi-3*eta)*(2-3*xi-3*eta):

>N[2]:=(xi,eta)->(9/2)*xi*(1-xi)*(1-eta)*(2-3*xi-3*eta):

>N[3]:=(xi,eta)->-(9/2)*xi*(1-xi)*(1-eta)*(1-3*xi-3*eta):

>N[4]:=(xi,eta)->-(9/2)*eta*(1-eta)*(1-xi)*(1-3*eta-3*xi):

>N[5]:=(xi,eta)->(9/2)*eta*(1-eta)*(1-xi)*(2-3*eta-3*xi):

>M:=8*G*D*a^2*Int(Int(Phi,xi=0..1),eta=0..1)=8*G*D*a^4*
 int(int((650/1097)*N[1](xi,eta)+(141130/266571)*N[2](xi,eta)
 +(95900/266571)*N[3](xi,eta)+(95900/266571)*N[4](xi,eta)
 +(141130/266571)*N[5](xi,eta),xi=0..1), eta=0..1);

$$M := 8 \, G \, D \, a^2 \int_0^1 \int_0^1 \Phi \, d\xi \, d\eta = \frac{199220}{88857} \, G \, D \, a^4$$

>M:=evalf(199220/88857)*G*D*a^4;

$$M := 2.242029328 \, G \, D \, a^4$$

Der relative Fehler gegenüber dem exakten Wert 2.25 von TIMOSHENKO / GODDIER (Tabelle 7.5) beträgt:

>f:=(9/4-199220/88857)/(9/4)=evalf((9/4-199220/88857)/(9/4));

$$f := \frac{2833}{799713} = .003542520879$$

>

Im Computerausdruck findet man neben den Knotenwerten Φ_k der *Torsionsfunktion* auch das *Torsionsmoment* M, das mit einem relativen Fehler von nur **0,35%** behaftet ist! Das in Ü 7.1.14 erzielte Ergebnis weist einen Fehler von **2,12%** auf.

Bei der Ermittlung des *Torsionsmomentes* ist zu beachten, dass man nach der Formel (7.47) nur den vierten Teil des Gesamtmoments erhält. Somit ist der Faktor **2** durch **8** zu ersetzen.

Anmerkung : Das erzielte Ergebnis mit dem vernachlässigbaren Fehler von **0,35%** ließe sich noch geringfügig verbessern, wenn man *bikubische Formfunktionen* vom *LAGRANGESchen Typ* verwenden würde. Dann wären noch **vier** Knotenpunkte im Innern des Einheitsquadrates zu berücksichtigen. Das Gleichungssystem (3) würde somit auf ein Gleichungssystem mit **neun** unbekannten Knotenwerten Φ_k ausgedehnt. Der Rechenaufwand würde zu groß im Vergleich zur erzielten Verbesserung des Ergebnisses.

In dieser Übung ist gezeigt worden, dass auch Formfunktionen vom SERENDIPITY-Typ vorteilhaft eingesetzt werden können.

Ü 7.1.16

a) Für den Kreis führt man zweckmäßigerweise *Polarkoordinaten* $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$ mit $dx dy = r dr d\alpha$ ein. Darin gilt für die *Torsionsfunktion* :

$$\Phi = (R^2 - x^2 - y^2)/2, \quad \Phi = (R^2 - r^2)/2. \quad (3a,b)$$

Mithin gilt für das Korrekturglied in (1) :

$$k := 8GD \int_0^{\pi/2} \int_0^R \left(\frac{1}{2} R^2 - r^2 \right) r dr d\alpha \equiv 0. \quad (4)$$

b) Für den *elliptischen Querschnitt* mit den Halbachsen a und b führt man zweckmäßigerweise *verallgemeinerte Polarkoordinaten*

$$x = a \rho \cos \alpha, \quad y = b \rho \sin \alpha \quad (5a,b)$$

ein, so dass der *elliptische Querschnitt*

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1 \text{ bzw. } \xi^2 + \eta^2 \leq 1 \quad (6a,b)$$

durch $0 \leq \rho \leq 1$ und $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ bzw. durch $-\sqrt{1-\eta^2} \leq \xi \leq \sqrt{1-\eta^2}$ und

$-1 \leq \eta \leq 1$ vollständig erfasst wird. Die Transformation (5a,b) vermittelt eine Abbildung des *elliptischen Querschnitts* (6a) auf das Innere des *Einheitskreises* (6b). Die *JACOBIsche Determinante* der Transformation (5a,b) ist gemäß

$$J := \begin{vmatrix} \partial x / \partial \rho & \partial x / \partial \alpha \\ \partial y / \partial \rho & \partial y / \partial \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \alpha & -a \rho \sin \alpha \\ b \sin \alpha & b \rho \cos \alpha \end{vmatrix} = ab\rho \quad (7)$$

gegeben, so dass $dx dy = a b \rho d\rho d\alpha$ gilt.

In Erweiterung von (3a,b) lautet die *Torsionsfunktion* für den *elliptischen Querschnitt* folgendermaßen :

$$\Phi = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} (1 - \rho^2). \quad (8)$$

Damit erhält man aus (7.47) unter Berücksichtigung von (7), und wenn man die Integration aus Symmetriegründen im ersten Quadranten durchführt, das exakte *Torsionsmoment* zu :

$$M = 8GD \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho d\rho d\alpha = \pi GD \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} . \quad (9)$$

Das *polare Flächenträgheitsmoment* ergibt sich zu :

$$\begin{aligned} I_p &:= \iint_A (x^2 + y^2) dx dy = 4ab \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha) \rho^3 d\rho d\alpha \\ &= \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2) , \end{aligned} \quad (10)$$

so dass man mit (10) die Aufspaltung (1) durch

$$M = GDI_p + k = GDI_p - \frac{\pi}{4} GD \frac{ab}{a^2 + b^2} (a^2 - b^2)^2 \quad (11)$$

erhält. Darin ist der Korrekturterm

$$k = -\frac{\pi}{4} GDa^4 \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} (1 - \lambda^2)^2 \quad (12)$$

für beliebige Verhältnisse $\lambda \equiv a/b < 1$ oder > 1 immer **negativ** und verschwindet für den Kreis mit $a = b = R$, so dass die elementare Theorie **zu große Torsionsmomente** liefert.

Alternativ zur Aufspaltung (1) kann ein *Korrekturfaktor* κ eingeführt werden :

$$M = \kappa GDI_p \quad \text{mit} \quad \kappa \leq 1 , \quad (13)$$

der sich wegen (7.47) und mit (9), (10) zu

$$\kappa := \frac{2}{I_p} \iint_A \Phi dx dy = 4 \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} = 4 \frac{\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2} \quad (14)$$

ergibt und für beliebige Verhältnisse $\lambda \equiv a/b < 1$ oder > 1 immer **kleiner als eins** ist, wie in (13) angedeutet, so dass die *elementare Theorie zu große Torsionsmomente* liefert. Für den Kreis ($\kappa = 1$) gilt die elementare Theorie exakt.

c) Nach Ü 7.1.5 erhält man für einen *gleichseitigen Dreiecksquerschnitt* der Höhe h das *Torsionsmoment*

$$M = \frac{1}{45} \sqrt{3} GDh^4 \quad (15)$$

so dass mit dem *polaren Flächenträgheitsmoment*

$$I_p = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{27} \sqrt{3} h^4 \quad (16)$$

der Korrekturfaktor zu

$$\kappa = \frac{M}{GDI_p} = \frac{3}{5} \quad (17)$$

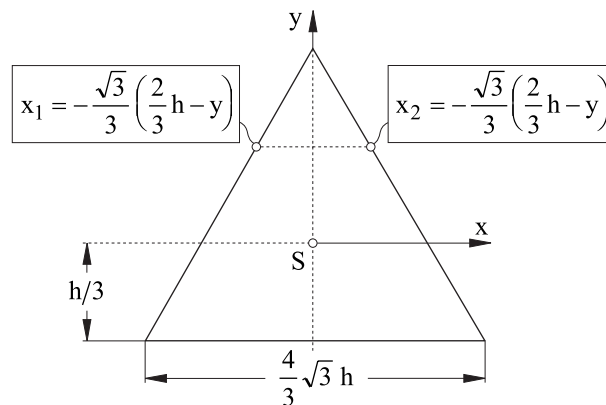
folgt, d.h., die *elementare Theorie* ist beim gleichseitigen Dreieck mit einem Fehler von $66\frac{2}{3}\%$ behaftet!

Die Integrationsgrenzen in (16),

$$x_1 \equiv -\frac{1}{3}\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}h - y\right) \leq x \leq \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}h - y\right) \equiv x_2, \quad (18a)$$

$$y_1 \equiv -\frac{1}{3}h \leq y \leq \frac{2}{3}h \equiv y_2, \quad (18b)$$

entnimmt man nachstehender Skizze.



Das *polare Flächenträgheitsmoment* (16) ist mit Hilfe der MAPLE-Software überprüft worden, wie der nachstehende Computerausdruck zeigt.

>

Polares Flächenträgheitsmoment für ein gleichseitiges Dreieck der Höhe h:

>J[p]:=Int(Int(x^2+y^2,x=-(2*h/3-y)/sqrt(3)..(2*h/3-y)/sqrt(3)),y=-h/3..2*h/3)=
int(int(x^2+y^2,x=-(2*h/3-y)/sqrt(3)..(2*h/3-y)/sqrt(3)),y=-h/3..2*h/3);

$$J_p := \int_{-1/3 h}^{2/3 h} \int_{-1/3 (2/3 h - y) \sqrt{3}}^{1/3 (2/3 h - y) \sqrt{3}} x^2 + y^2 dx dy = \frac{1}{27} \sqrt{3} h^4$$

Das Torsionsmoment ergibt sich aus Ü 7.1.5 zu:

>M:=(sqrt(3)/45)*G*D*h^4;

$$M := \frac{1}{45} \sqrt{3} G D h^4$$

Als Korrekturfaktor erhält man:

$$>\kappa := 27/45;$$

$$\kappa := \frac{3}{5}$$

Die elementare Theorie liefert den 5/3-fachen Wert der exakten Lösung!

>

d) Die exakte Lösung für den *quadratischen Querschnitt* der Kantenlänge $2a$ ist nach TIMOSHENKO / GOODIER durch $M = 2,25 G D a^4$ gegeben (Tabelle 7.5). Die Lösung der *elementaren Biegetheorie* lautet :

$$M = G D I_p \quad \text{mit} \quad I_p = \frac{8}{3} a^4, \quad (19)$$

so dass der *Korrekturfaktor* zu

$$\kappa = \frac{M}{G D I_p} = \frac{27}{32} \approx 0,85 \quad (20)$$

folgt, d.h., die elementare Theorie ist beim *quadratischen Querschnitt* mit einem Fehler von **18,52%** behaftet!

Anmerkung : Obige Beispiele haben gezeigt, dass für *nichtkreisförmige Querschnitte* das Torsionsproblem nicht mehr elementar lösbar ist. Vielmehr ist die *elementare Theorie* durch einen Korrekturfaktor κ gemäß

$$M = G D I_t \quad \text{mit} \quad I_t = \kappa I_p \leq I_p \quad (21)$$

zu modifizieren, für den stets $\kappa \leq 1$ gilt, wie in (21) angedeutet. Nur für den *kreisförmigen Querschnitt* mit $\kappa = 1$ liefert die elementare Theorie exakte Ergebnisse. Für andere Querschnitte können die Abweichungen erheblich sein, wie obige Beispiele zeigen! Die in (21) definierte Größe $I_t = \kappa I_p$ wird *Torsionsträgheitsmoment* genannt.

Die Ermittlung des *Korrekturfaktors* erfolgt auf der Basis der *POISSONschen Differentialgleichung* (7.39) über die *Torsionsfunktion* :

$$\kappa := \frac{2}{I_p} \iint_A \Phi dx dy \quad \text{mit} \quad I_p := \iint_A (x^2 + y^2) dx dy, \quad (22)$$

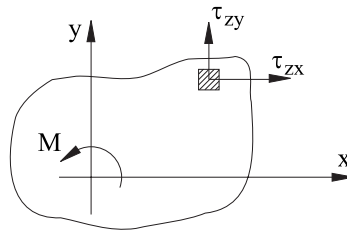
die man beispielsweise nach dem RITZ-Verfahren oder der *Methode der Finiten Elemente* (FEM) gewinnen kann, wie in Ziffer 7.1 und in den Übungen 7.1.4 bis 7.1.15 gezeigt wird.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die *Verwölbung* des Querschnitts Ursache ist für die Abweichung der *elementaren Biegetheorie* von der Lösung der *POISSONschen Differentialgleichung*.

Das *Torsionsmoment* kann durch

$$M = \iint_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dx dy \quad (23)$$

ausgedrückt werden, wie man aus nachstehender Skizze ablesen kann.



Nach dem *HOOKESchen Gesetz* (4.45a) für linearelastisches isotropes Werkstoffverhalten gilt :

$$\tau_{zx} \equiv \sigma_{31} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{31} \equiv G \gamma_{zx} \quad \text{und} \quad \tau_{zy} = G \gamma_{zy} . \quad (24a,b)$$

Darin können die *Gleitungen* $\gamma_{zx} = 2\epsilon_{zx}$ und $\gamma_{zy} = 2\epsilon_{zy}$ aufgrund der geometrischen Beziehung (4.26) durch

$$\gamma_{zx} = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z \quad \text{und} \quad \gamma_{zy} = \partial w / \partial y + \partial v / \partial z \quad (25a,b)$$

oder nach Einsetzen des Verschiebungsfeldes

$$u = -Dyz, \quad v = Dxz, \quad w = D\phi(x,y) \quad (26a,b,c)$$

durch

$$\gamma_{zx} = \partial w / \partial x - Dy \quad \text{und} \quad \gamma_{zy} = \partial w / \partial y + Dx \quad (27a,b)$$

ausgedrückt werden [BETTEN, 2001], so dass mit (24a,b) und (27a,b) das *Torsionsmoment* (23) gemäß

$$M = GDI_p + G \iint_A \left(x \frac{\partial w}{\partial y} - y \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy \quad (28)$$

dargestellt werden kann. Darin entspricht der integralfreie Term der *elementaren Theorie*, während das Integral als *Korrekturglied* durch die *Verwölbung* (26c) bestimmt ist und nur für kreisförmigen Querschnitt verschwindet, der **eben bleibt**.

Bei Abwesenheit von *Volumenkräften* gilt für die Schubspannungen (24a,b) die *Gleichgewichtsbedingung*

$$\partial \tau_{zx} / \partial x + \partial \tau_{zy} / \partial y = 0 . \quad (29)$$

Setzt man darin (24a,b) mit (27a,b) und (26c) ein, so folgt unmittelbar

$$\boxed{\Delta\varphi = 0}, \quad (30)$$

d.h., die *Verwölbungsfunktion* $\varphi(x,y)$ in (26c) ist eine *harmonische Funktion* im Gegensatz zur *Torsionsfunktion* $\Phi(x,y)$, die der *POISSONschen Differentialgleichung* (7.39) genügt. Diese erhält man folgendermaßen. Man leite (27a) nach y und (27b) nach x ab, wodurch die Verwölbung w eliminiert wird :

$$\partial\gamma_{zx} / \partial y - \partial\gamma_{zy} / \partial x = -2D. \quad (31)$$

Setzt man darin (24a,b) ein, so folgt mit (7.40a,b) unmittelbar die *POISSONsche Differentialgleichung* (7.39).

Ü 7.2.1

Setzt man die Näherung

$$T \approx \tilde{T} = \sum_{j=1}^3 T_j N_j(t) \quad (5)$$

in (4) ein, so erhält man das *Residuum*

$$R(t) = \sum_{j=1}^3 T_j \left(\frac{dN_j}{dt} + 2N_j \right) - 1. \quad (6)$$

Die *Verfahren der gewichteten Residuen* fordern, dass der Integralausdruck (7.111) bzw.

$$\boxed{\int_0^* W_i(t) R(t) dt \stackrel{!}{=} 0}, \quad (7)$$

d.h. das *Residuum* in einem *gewichteten Mittel* verschwindet. Darin sind die $W_i(t)$ *Wichtungsfunktionen*, deren notwendige Anzahl mit der Anzahl der zu bestimmenden Ansatzfreiwerte des Näherungsansatzes übereinstimmen muss. Die Anzahl der Wichtungsfunktionen kann auch größer sein. Dann erhält man ein *überbestimmtes Gleichungssystem*, das man nach dem *GAUSSschen Ausgleichsprinzip* (Ü 3.1.30 / Ü 7.2.6 / Ü 7.2.7) lösen kann. Im vorliegenden Beispiel mit drei Knotenpunkten und drei Knotenvariablen T_j in (5) sind mindestens drei *Wichtungsfunktionen* $W_i(t)$ zu wählen und die Integrale

$$\boxed{\int_0^* \left[\sum_{j=1}^3 T_j \left(\frac{dN_j}{dt} + 2N_j \right) - 1 \right] W_i(t) dt = 0, \quad i = 1, 2, 3,} \quad (8)$$

elementweise auszuwerten. Je nach Wahl der *Wichtungsfunktionen* unterscheidet man folgende Verfahren.

Verfahren der Kollokation in Teilbereichen (*subdomain method*)

Der gesamte Integrationsbereich $0 \leq t \leq 1$ wird in diesem Beispiel in mindestens drei Teilintervalle unterteilt, z.B.

$$t = \langle 0, 1/4 \rangle, t = \langle 1/4, 3/4 \rangle \text{ und } t = \langle 3/4, 1 \rangle,$$

wobei sämtliche Wichtungsfunktionen zu $W_i(t) = 1$ angenommen werden.

Somit erhält man aus (8) folgende Integralausdrücke:

$$\sum_{j=1}^3 T_j \int_0^{1/4} (dN_j / dt + 2N_j) dt = \int_0^{1/4} dt = \frac{1}{4}, \quad (9a)$$

$$\sum_{j=1}^3 T_j \int_{1/4}^{3/4} (dN_j / dt + 2N_j) dt = \int_{1/4}^{3/4} dt = \frac{1}{2}, \quad (9b)$$

$$\sum_{j=1}^3 T_j \int_{3/4}^1 (dN_j / dt + 2N_j) dt = \int_{3/4}^1 dt = \frac{1}{4}. \quad (9c)$$

Das Ergebnis der Auswertung von (9a,b,c) kann in Matrizenform ausgedrückt werden:

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & 6 & 5 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 = 1 \\ T_2 = ? \\ T_3 = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Lässt man darin zunächst den Anfangswert T_1 offen, so liefert (10) die "triviale" Lösung

$$\{T\} = \{1/2 \quad 1/2 \quad 1/2\}^t, \quad (11)$$

d.h., es findet keine Abkühlung statt. Der Anfangswert T_1 ergibt sich zu T_∞ , der vorgegebenen Umgebungstemperatur. Mit dem Anfangswert $T_1 = 1$ ergeben sich drei verschiedene *Abkühlungskurven*, je nach Wahl von zwei Gleichungen aus dem System (10):

a) aus der **ersten** und **zweiten** Gleichung folgt:

$$\{T\} = \{1 \quad 3/5 = 0,6 \quad 17/25 = 0,68\}^t, \quad (12a)$$

b) aus der **zweiten** und **dritten** Gleichung folgt:

$$\{T\} = \{1 \quad 13/19 = 0,6842 \quad 11/19 = 0,57895\}^t, \quad (12b)$$

c) aus der **dritten** und **ersten** Gleichung folgt:

$$\{T\} = \{1 \quad 3/5 = 0,6 \quad 19/35 = 0,5429\}^t. \quad (12c)$$

Im Vergleich dazu liefert die *exakte Lösung* (2) folgende Knotenwerte:

$$\{T\} = \{1 \quad 0,68394 \quad 0,56767\}^t. \quad (13)$$

Damit stimmt (12b) am besten überein.

Verfahren der punktweisen Kollokation (*collocation method*)

Bei diesem Verfahren wird das *Residuum* in n einzelnen Punkten des betrachteten Bereichs gleich NULL gesetzt, um n Bestimmungsgleichungen für die n unbekannten Ansatzfreiwerte $(T_i, i = 1, 2, \dots, n)$ zu gewinnen (7.126). Von der Wahl der *Kollokationspunkte* hängt die Genauigkeit ab. Im vorliegenden Beispiel werden (mindestens) drei *Kollokationspunkte* benötigt, bzw. bei Vorgabe der Anfangstemperatur $T_1 = 1$ nur zwei. Wählt man die beiden Punkte $t = 1/4$ und $t = 3/4$, die jeweils in der Mitte der beiden finiten Elemente liegen, so erhält man aus (6) mit $T_1 = 1$ die Ergebnisse:

$$R(1/4) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow T_2 = 2/3, \quad R(3/4) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow T_3 = (1 + T_2)/3 = 5/9,$$

insgesamt also:

$$\{T\} = \{1 \quad 0,66\bar{6} \quad 0,55\bar{5}\}^t. \quad (14)$$

Durch optimale Wahl der Kollokationspunkte können die Knotenwerte der exakten Lösung (13) erzielt werden, die man in (6) einsetzt:

im **finiten Element I**:

$$R(t_I) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 1 \cdot [-2 + 2(1 - 2t_I)] + 0,68394(2 + 4t_I) = 1,$$

im **finiten Element II**:

$$R(t_{II}) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 0,68394[-2 + 4(1 - t_{II})] + 0,56767[2 + 2(1 - 2t_{II})] = 1.$$

Damit ergeben sich die *optimalen Kollokationspunkte* zu:

$$\boxed{t_I = 0,291 \quad t_{II} = 0,527}. \quad (15a,b)$$

Verfahren nach GALERKIN

Beim *GALERKIN-Verfahren* wird die *Wichtungsfunktion* $W_i(t)$ in (7) unmittelbar dem Näherungsansatz (5) entnommen,

$$W_i(t) = N_i(t), \quad (16)$$

so dass man mit (6) die Forderung

$$\sum_{j=1}^3 T_j \int_t (dN_j / dt + 2N_j) N_i dt = \int_t N_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (17)$$

erhält. Darin ist *elementweise* unter Berücksichtigung von (3a,...,f) zu integrieren. Das führt jeweils auf eine 2×2 *Steifigkeitsmatrix*, die man durch Überlappung zu einer 3×3 *Gesamtsteifigkeitsmatrix* zusammenfügt:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 = 1 \\ T_2 = ? \\ T_3 = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 3/2 \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

Beispielsweise ermittelt man den Wert -2 in der zweiten Zeile ($i = 2$) und ersten Spalte ($j = 1$) nach (17) folgendermaßen:

$$\int_0^{1/2} (dN_1 / dt + 2N_1) N_2 dt = \int_0^{1/2} (-8t^3) dt = -1/3. \quad (19a)$$

Die Integration erfolgt nur von $t = 0$ bis $t = 1/2$, da N_1 im Bereich $1/2 \leq t \leq 1$ nicht existiert (3d). Der *Lastvektor* auf der rechten Seite in (17) erhält in der zweiten Zeile ($i = 2$) den Wert

$$\int_0^1 N_2 dt = \int_0^{1/2} 2t dt + \int_{1/2}^1 2(1-t) dt = 1/2. \quad (19b)$$

Multipliziert man beide Werte (19a,b) mit 6, so erhält man die Werte -2 und 3, die man in (18) an den oben genannten Stellen ($i = 2, j = 1$) erkennt. Den Wert 4 in der zweiten Zeile ($i = 2$) und zweiten Spalte ($j = 2$) der Steifigkeitsmatrix in (18), der durch "Überlappung" entsteht, ermittelt man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (dN_2 / dt + 2N_2) N_2 dt &= \\ &= \int_0^{1/2} (2 + 4t) \cdot 2t dt + \int_{1/2}^1 [-2 + 4(1-t)] \cdot 2(1-t) dt = \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (20)$$

Multipliziert man die Werte (20) und (19b) jeweils mit 6, so erhält man die Werte 4 und 3, die man in (18) an den entsprechenden Stellen ($i = 2, j = 2$) erkennt.

Lässt man in (18) zunächst den Anfangswert T_1 offen, so erhält man wieder die "triviale" Lösung (11). Mit dem Anfangswert $T_1 = 1$ ergeben sich analog (12a,b,c) drei verschiedene *Abkühlungskurven*, je nach Wahl von zwei Gleichungen aus dem System (18):

a) aus der **ersten** und **zweiten** Gleichung folgt:

$$\{T\} = \{1 \quad 5/8 = 0,625 \quad 5/8\}^t, \quad (21a)$$

b) aus der **zweiten** und **dritten** Gleichung folgt:

$$\{T\} = \{1 \quad 19/28 = 0,6786 \quad 4/7 = 0,57143\}^t, \quad (21b)$$

c) aus der **dritten** und **ersten** Gleichung folgt:

$$\{T\} = \{1 \quad 5/8 = 0,625 \quad 11/20 = 0,55\}^t. \quad (21c)$$

Von diesen drei Lösungsvektoren stimmt (21b) am besten mit der exakten Lösung (13) überein. Da der gegebene Knotenwert $T_1 = 1$ in (10) und (18) jeweils in der ersten Zeile des Lösungsvektors steht, liefern die **zweiten** und **dritten** Gleichungen die besten Lösungen (12b) und (21b).

Verfahren der kleinsten Quadrate (*least squares method*)

Bei diesem Verfahren wird als *Wichtungsfunktion* das *Residuum* (6) selbst gewählt und der Integralausdruck (7) bezüglich der *Knotenvariablen* T_i mit $i = 1, 2, 3$ minimiert:

$$\frac{\partial}{\partial T_i} \int_t [R(t)]^2 dt \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \int_t R(t) \frac{\partial R}{\partial T_i} dt \stackrel{!}{=} 0. \quad (22)$$

Setzt man darin das Residuum (6) ein, so erhält man analog zu (17) das Gleichungssystem ($i=1,2,3$)

$$\sum_{j=1}^3 T_j \int_t \left(\frac{dN_j}{dt} + 2N_j \right) \left(\frac{dN_i}{dt} + 2N_i \right) dt = \int_t \left(\frac{dN_i}{dt} + 2N_i \right) dt, \quad (23)$$

das man in Matrixform darstellen kann. Dabei sind i der *Zeilenindex* und j der *Spaltenindex*. Die Integration erfolgt *elementweise* unter Berücksichtigung der *Formfunktionen* (3a,...,f). Somit erhält man analog (18) die Darstellung

$$\begin{bmatrix} 4 & -10 & 0 \\ -10 & 32 & -10 \\ 0 & -10 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 = 1 \\ T_2 = ? \\ T_3 = ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Lässt man in (24) zunächst den Anfangswert T_1 offen, so erhält man wieder die "triviale" Lösung (11). Mit dem Anfangswert $T_1 = 1$ ergeben sich analog (12a,b,c) und analog (21a,b,c) drei verschiedene *Abkühlungskurven*, je nach Wahl von zwei Gleichungen aus dem System (24):

a) aus der **ersten** und **zweiten** Gleichung folgt:

$$\{T\} = \{1 \quad 0,7 \quad 16/25 = 0,64\}^t, \quad (25a)$$

b) aus der **zweiten** und **dritten** Gleichung folgt:

$$\{T\} = \{1 \quad 269/398 = 0,6759 \quad 112/199 = 0,5628\}^t, \quad (25b)$$

c) aus der **dritten** und **ersten** Gleichung folgt:

$$\{T\} = \{1 \quad 0,7 \quad 4/7 = 0,57143\}^t. \quad (25c)$$

Von diesen drei Lösungsvektoren stimmt (25b) am besten mit der exakten Lösung (13) überein.

Anmerkung: Die Dgl. (1) besitzt kein Funktional.

Ü 7.2.2

Nach Ü 3.1.23 sind die *quadratischen Ansatzfunktionen* durch

$$N_1 = 1 - 3t + 2t^2, \quad N_2 = 4t(1 - t), \quad N_3 = -t(1 - 2t) \quad (2a,b,c)$$

gegeben.

Setzt man die Näherung

$$T \approx \tilde{T} = \sum_{j=1}^3 T_j N_j(t) \quad (3)$$

in die Differentialgleichung (1) ein, so erhält man das *Residuum*

$$R(t) = \sum_{j=1}^3 T_j \left(dN_j / dt + k N_j \right) - k T_\infty, \quad (4)$$

das, mit einer *Wichtungsfunktion* W_i multipliziert, im Mittel verschwinden muss:

$$\boxed{\int_0^1 W_i(t) R(t) dt \stackrel{!}{=} 0} \quad (5)$$

Beim *GALERKIN-Verfahren* werden als *Wichtungsfunktionen* die *Ansatzfunktionen* gewählt ($W_i = N_i$), so dass mit (4) aus (5) die Beziehung

$$\sum_{j=1}^3 T_j \int_0^1 \left(dN_j / dt + k N_j \right) N_i dt = k T_\infty \int_0^1 N_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

entsteht, die man in der Matrixform

$$\boxed{[K] \{T\} = \{F\}} \quad (7)$$

darstellen kann, wenn man darin die "Steifigkeitsmatrix" $[K]$ gemäß

$$[K] := \begin{bmatrix} \int_0^1 N_i \left(dN_j / dt + k N_j \right) dt \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

den Lösungsvektor gemäß

$$\{T\} := \{T_1 \quad T_2 \quad T_3\}^t \quad (9)$$

und den "Belastungsvektor" gemäß

$$\{F\} := k T_\infty \left\{ \int_0^1 N_1 dt \quad \int_0^1 N_2 dt \quad \int_0^1 N_3 dt \right\}^t \quad (10)$$

definiert. Setzt man in (8) und (10) die *quadratischen Ansatzfunktionen* (2a,b,c) ein, so ergibt sich die Matrixform (7) zu:

$$\begin{bmatrix} -15+4k & 20+2k & -5-k \\ -20+2k & 16k & 20+2k \\ 5-k & -20+2k & 15+4k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = k T_\infty \begin{Bmatrix} 5 \\ 20 \\ 5 \end{Bmatrix}. \quad (11a)$$

Als Zahlenbeispiel seien wie in Ü 7.2.1 die Konstante $k = 2$ und die Umgebungstemperatur $T_\infty = 1/2$ gewählt:

$$\begin{bmatrix} -7 & 24 & -7 \\ -16 & 32 & 24 \\ 3 & -16 & 23 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 20 \\ 5 \end{Bmatrix}. \quad (11b)$$

Lässt man in (11a,b) zunächst den Anfangswert T_1 offen, so erhält man die "triviale" Lösung

$$\{T\} = \{T_\infty \quad T_\infty \quad T_\infty\}^t \quad \text{bzw.} \quad \{T\} = \{1/2 \quad 1/2 \quad 1/2\}^t. \quad (12a,b)$$

Mit dem Anfangswert $T_1 = 1$ ergeben sich drei *Abkühlungskurven*, je nach Wahl von zwei Gleichungen aus dem System (11b). Diese Lösungen sind mit der MAPLE - Software V, Release 8, ermittelt, wie der Computerausdruck zeigt.

>

>with (linalg):

>A:=matrix(3,3,[[-7, 24, -7], [-16, 32, 24], [3, -16, 23]]);

$$A := \begin{bmatrix} -7 & 24 & -7 \\ -16 & 32 & 24 \\ 3 & -16 & 23 \end{bmatrix}$$

>a:=vector([5, 20, 5]);

$$a := [5 \quad 20 \quad 5]$$

Lässt man zunächst den Anfangswert T(0) offen, so erhält man die Lösung:

>linsolve(A,a);

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Es findet keine Abkühlung statt, da die Anfangstemperatur T(0) **nicht** vorgegeben wurde. Somit stimmen alle Knotenwerte mit der Umgebungstemperatur T(1) überein.

Nimmt man als Anfangstemperatur jedoch den Wert T(0) = 1 an, so erhält man folgende Lösungen:

a) aus der **ersten** und **zweiten** Gleichung:

>solve({-7+14*X[2]-7*X[3]=5, -16+32*X[2]+24*X[3]=20}, {X[2],X[3]});

$$\left\{ X_2 = \frac{27}{28}, X_3 = \frac{3}{14} \right\}$$

>X[2]:=evalf(27/28); X[3]:=evalf(3/14);

$$X_2 := .9642857143$$

$$X_3 := .2142857143$$

b) aus der **zweiten** Gleichung und **dritten** Gleichung:

>solve({-16+32*T[2]+24*T[3]=20, 3-16*T[2]+23*T[3]=5}, {T[2], T[3]});

$$\left\{ T_2 = \frac{39}{56}, T_3 = \frac{4}{7} \right\}$$

>T[2]:=evalf(39/56); T[3]:=evalf(4/7);

$$T_2 := .6964285714$$

$$T_3 := .5714285714$$

c) aus der **dritten** und **ersten** Gleichung:

>solve({3-16*Y[2]+23*Y[3]=5, -7+24*Y[2]-7*Y[3]=5}, {Y[2], Y[3]});

$$\left\{ Y_3 = \frac{6}{11}, Y_2 = \frac{29}{44} \right\}$$

>Y[2]:=evalf(29/44); Y[3]:=evalf(6/11);

$$Y_2 := .6590909091$$

$$Y_3 := .5454545455$$

Die Lösung aus der zweiten und dritten Gleichung stimmt mit den exakten Werten von 0.68394 und 0.56767 am besten überein. Man vergleiche die Lösung mit der

Übung 7.2.1. Der nachstehende Output zeigt die Lösung aus der zweiten und dritten Gleichung des Systems (11a) für beliebige Werte von T_∞ und k .

>with (linalg):

>A:=matrix(3,3,[[-15+4*k, 20+2*k, -5-k], [-20+2*k, 16*k, 20+2*k], [5-k, -20+2*k, 15+4*k]]);

$$A := \begin{bmatrix} -15 + 4k & 20 + 2k & -5 - k \\ -20 + 2k & 16k & 20 + 2k \\ 5 - k & -20 + 2k & 15 + 4k \end{bmatrix}$$

>a:=k*T[infinity]*vector([5,20,5]);

$$a := k T_\infty \begin{bmatrix} 5 & 20 & 5 \end{bmatrix}$$

Lässt man zunächst den Anfangswert $T(0)$ offen, so erhält man die "triviale" Lösung

>linsolve(A,a);

$$\begin{bmatrix} T_\infty & T_\infty & T_\infty \end{bmatrix}$$

bei der alle Knotenwerte mit der Umgebungstemperatur übereinstimmen, d.h., es liegt kein Abkühlvorgang vor. Nimmt man als Anfangstemperatur jedoch den Wert $T(0) = 1$ an, so erhält man beispielsweise aus der zweiten und dritten Gleichung folgende Lösung:

>solve({-20+2*k+16*k*T[2]+(20+2*k)*T[3]=20*k*T[infinity],

> 5-k+(-20+2*k)*T[2]+(15+4*k)*T[3]=5*k*T[infinity] }, {T[2],T[3]});

$$\left\{ T_3 = \frac{-8k + k^2 + 20 + 20kT_\infty + 2k^2T_\infty}{12k + 20 + 3k^2}, T_2 = \frac{1}{2} \frac{40 + 4k + 20kT_\infty - k^2 + 7k^2T_\infty}{12k + 20 + 3k^2} \right\}$$

>T[2]:=evalf(subs(T[infinity]=1/2,k=2,(40+4*k+20*k*T[infinity]-

> k^2+7*k^2*T[infinity])/(24*k+40+6*k^2)));

$$T_2 := .6964285714$$

>T[3]:=evalf(subs(T[infinity]=1/2,k=2,(-8*k+k^2+20*k*T[infinity]

> +2*k^2*T[infinity]+20)/(12*k+20+3*k^2)));

$$T_3 := .5714285714$$

Man vergleiche diese Lösung mit der entsprechenden Lösung aus der Übung 7.2.1 und den exakten Werten von 0.68394 und 0.56767.

>

Schließlich zeigt der nächste Output die Herleitung der Matrixgleichung (11a).

> with(linalg):

> Funktionen_N:=matrix(1,3,[N[1],N[2],N[3]]);

$$\text{Funktionen_N} := \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix}$$

> Funktionen_M:=matrix(1,3,[M[1],M[2],M[3]]);

$$\text{Funktionen_M} := [M_1 \quad M_2 \quad M_3]$$

$$> J := \text{multiply}(\text{transpose}(\text{Funktionen_N}), \text{Funktionen_M});$$

$$> K := \text{Int}(\text{evalm}(J), t);$$

$$K := \int \begin{bmatrix} N_1 M_1 & N_1 M_2 & N_1 M_3 \\ N_2 M_1 & N_2 M_2 & N_2 M_3 \\ N_3 M_1 & N_3 M_2 & N_3 M_3 \end{bmatrix} dt$$

$$> N[1] := t \rightarrow 1 - 3*t + 2*t^2; N[2] := t \rightarrow 4*t*(1-t); N[3] := t \rightarrow t*(-1+2*t);$$

$$N_1 := t \rightarrow 1 - 3 t + 2 t^2$$

$$N_2 := t \rightarrow 4 t (1 - t)$$

$$N_3 := t \rightarrow t (-1 + 2 t)$$

$$> M[1] := t \rightarrow -3 + 4*t + k*(1-3*t+2*t^2); M[2] := t \rightarrow 4-8*t+4*k*t*(1-t); M[3] := t \rightarrow -1+4*t+k*t*(-1+2*t);$$

$$M_1 := t \rightarrow -3 + 4 t + k (1 - 3 t + 2 t^2)$$

$$M_2 := t \rightarrow 4 - 8 t + 4 k t (1 - t)$$

$$M_3 := t \rightarrow -1 + 4 t + k t (-1 + 2 t)$$

$$> K := \text{map}(\text{int}, J(t), t=0..1);$$

$$K := \begin{bmatrix} \frac{2k}{15} - \frac{1}{2} & \frac{k}{15} + \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} - \frac{k}{30} \\ \frac{k}{15} - \frac{2}{3} & \frac{8k}{15} & \frac{k}{15} + \frac{2}{3} \\ -\frac{k}{30} + \frac{1}{6} & \frac{k}{15} - \frac{2}{3} & \frac{2k}{15} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$> F := k*T[\text{infinity}] * \text{map}(\text{Int}, \text{Funktionen_N}, t=0..1);$$

$$F := k T_{\infty} \begin{bmatrix} \int_0^1 N_1 dt & \int_0^1 N_2 dt & \int_0^1 N_3 dt \end{bmatrix}$$

$$> F := k*T[\text{infinity}] * \text{map}(\text{int}, \text{Funktionen_N}(t), t=0..1);$$

$$F := k T_{\infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Multipliziert man beide Seiten, d.h. die Steifigkeitsmatrix [K] und den Lastvektor {F}, mit dem Faktor 30, so erhält man die Matrixgleichung (11a), deren Richtigkeit somit überprüft ist!

>

Ü 7.2.3

Die Lösung erfolgt mit Hilfe des MAPLE-Programms, wie nachfolgender Ausdruck zeigt.

> with(linalg):

> Funktionen_N := matrix(1,4,[N[1],N[2],N[3],N[4]]);

$$\text{Funktionen_N} := \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

> Funktionen_M := matrix(1,4,[M[1],M[2],M[3],M[4]]);

$$\text{Funktionen_M} := \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{bmatrix}$$

> J := multiply(transpose(Funktionen_N),Funktionen_M):

K := Int(evalm(J),t);

$$K := \int \begin{bmatrix} N_1 M_1 & N_1 M_2 & N_1 M_3 & N_1 M_4 \\ N_2 M_1 & N_2 M_2 & N_2 M_3 & N_2 M_4 \\ N_3 M_1 & N_3 M_2 & N_3 M_3 & N_3 M_4 \\ N_4 M_1 & N_4 M_2 & N_4 M_3 & N_4 M_4 \end{bmatrix} dt$$

> N[1] := t -> 1-(11/2)*t+9*t^2-(9/2)*t^3;

$$N_1 := t \rightarrow 1 - \frac{11}{2}t + 9t^2 - \frac{9}{2}t^3$$

> N[2] := t -> 9*t-(45/2)*t^2+(27/2)*t^3;

$$N_2 := t \rightarrow 9t - \frac{45}{2}t^2 + \frac{27}{2}t^3$$

> N[3] := t -> -(9/2)*t+18*t^2-(27/2)*t^3;

$$N_3 := t \rightarrow -\frac{9}{2}t + 18t^2 - \frac{27}{2}t^3$$

> N[4] := t -> t-(9/2)*t^2+(9/2)*t^3;

$$N_4 := t \rightarrow t - \frac{9}{2}t^2 + \frac{9}{2}t^3$$

Die Funktionen M erhält man daraus nach der Formel $M = k \cdot N + dN/dt$:

> M[1] := t -> -11/2+18*t-(27/2)*t^2+k*(1-(11/2)*t+9*t^2-(9/2)*t^3);

$$M_1 := t \rightarrow -\frac{11}{2} + 18t - \frac{27}{2}t^2 + k \left(1 - \frac{11}{2}t + 9t^2 - \frac{9}{2}t^3 \right)$$

> M[2] := t -> 9-45*t+(81/2)*t^2+k*(9*t-(45/2)*t^2+(27/2)*t^3);

$$M_2 := t \rightarrow 9 - 45t + \frac{81}{2}t^2 + k \left(9t - \frac{45}{2}t^2 + \frac{27}{2}t^3 \right)$$

> M[3] := t -> -9/2+36*t-(81/2)*t^2+k*(-(9/2)*t+18*t^2-(27/2)*t^3);

$$M_3 := t \rightarrow -\frac{9}{2} + 36t - \frac{81}{2}t^2 + k\left(-\frac{9}{2}t + 18t^2 - \frac{27}{2}t^3\right)$$

$$> M[4] := t \rightarrow 1 - 9t + \frac{27}{2}t^2 + k\left(t - \frac{9}{2}t^2 + \frac{9}{2}t^3\right);$$

$$M_4 := t \rightarrow 1 - 9t + \frac{27}{2}t^2 + k\left(t - \frac{9}{2}t^2 + \frac{9}{2}t^3\right)$$

$$> K := \text{map}(\text{int}, J(t), t=0..1);$$

$$K := \begin{bmatrix} \frac{8k}{105} - \frac{1}{2} & \frac{33k}{560} + \frac{57}{80} & -\frac{3k}{140} - \frac{3}{10} & \frac{7}{80} + \frac{19k}{1680} \\ \frac{33k}{560} - \frac{57}{80} & \frac{27k}{70} & -\frac{27k}{560} + \frac{81}{80} & -\frac{3k}{140} - \frac{3}{10} \\ -\frac{3k}{140} + \frac{3}{10} & -\frac{27k}{560} - \frac{81}{80} & \frac{27k}{70} & \frac{33k}{560} + \frac{57}{80} \\ \frac{19k}{1680} - \frac{7}{80} & -\frac{3k}{140} + \frac{3}{10} & \frac{33k}{560} - \frac{57}{80} & \frac{8k}{105} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$> F := k * T[\text{infinity}] * \text{map}(\text{Int}, \text{Funktionen_N}, t=0..1);$$

$$F := k T_{\infty} \begin{bmatrix} \int_0^1 N_1 dt & \int_0^1 N_2 dt & \int_0^1 N_3 dt & \int_0^1 N_4 dt \end{bmatrix}$$

$$> F := k * T[\text{infinity}] * \text{map}(\text{int}, \text{Funktionen_N}(t), t=0..1);$$

$$F := k T_{\infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Als Zahlenbeispiel sei $k = 2$ und die Umgebungstemperatur $T(1) = 1/2$ wie in Ü 7.2.1 gewählt. Dann wird:

$$> M[1] := t \rightarrow -7/2 + 7t + (9/2)t^2 - 9t^3; M[2] := t \rightarrow 9 - 27t - (9/2)t^2 + 27t^3;$$

$$M[3] := t \rightarrow -9/2 + 27t - (9/2)t^2 - 27t^3; M[4] := t \rightarrow 1 - 7t + (9/2)t^2 + 9t^3;$$

$$> N[1] := t \rightarrow 1 - (11/2)t + 9t^2 - (9/2)t^3; N[2] := t \rightarrow 9t - (45/2)t^2 + (27/2)t^3;$$

$$N[3] := t \rightarrow -(9/2)t + 18t^2 - (27/2)t^3; N[4] := t \rightarrow t - (9/2)t^2 + (9/2)t^3;$$

$$> K := \text{map}(\text{int}, J(t), t=0..1);$$

$$K := \begin{bmatrix} \frac{-73}{210} & \frac{93}{112} & \frac{-12}{35} & \frac{37}{336} \\ \frac{-333}{560} & \frac{27}{35} & \frac{513}{560} & \frac{-12}{35} \\ \frac{9}{35} & \frac{-621}{560} & \frac{27}{35} & \frac{93}{112} \\ \frac{-109}{1680} & \frac{9}{35} & \frac{-333}{560} & \frac{137}{210} \end{bmatrix}$$

$$> F := \text{map}(\text{int}, \text{Funktionen_N}(t), t=0..1);$$

$$F := \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

> f:=vector([1/8,3/8,3/8,1/8]);

$$f := \begin{bmatrix} \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Lässt man die Anfangstemperatur zunächst offen, so erhält man die "triviale" Lösung

> linsolve(K,f);

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Nimmt man die Anfangstemperatur $T(0) = 1$ an, so ergibt sich aus den letzten drei Gleichungen der Matrixgleichung folgende Knotentemperaturen:

> solve({-333/560+(27/35)*T[2]+(513/560)*T[3]-(12/35)*T[4]=3/8, 9/35-(621/560)*T[2]+(27/35)*T[3]+(93/112)*T[4]=3/8, -109/1680+(9/35)*T[2]-(333/560)*T[3]+(137/210)*T[4]=1/8}, {T[2],T[3],T[4]});

$$\{ T_3 = \frac{5137}{8127}, T_2 = \frac{881}{1161}, T_4 = \frac{171}{301} \}$$

> T[2]:=evalf(881/1161); T[3]:=evalf(5137/8127); T[4]:=evalf(171/301);

$$T_2 := 0.7588285960$$

$$T_3 := 0.6320905623$$

$$T_4 := 0.5681063123$$

Die exakten Werte ergeben sich zu:

> Tau[2]:=evalf(exp(-2/3)+(1-exp(-2/3))/2);

$$T_2 := 0.7567085595$$

> Tau[3]:=evalf(exp(-4/3)+(1-exp(-4/3))/2);

$$T_3 := 0.6317985691$$

> Tau[4]:=evalf(exp(-2)+(1-exp(-2))/2);

$$T_4 := 0.5676676416$$

Die nach der FEM ermittelten Knotenwerte stimmen mit der exakten Lösung gut überein!

Die folgende graphische Darstellung vergleicht die Abkühlkurven aus den FEM-Lösungen 7.2.1 bis 7.2.3 nach dem GALERKIN-Verfahren mit der exakten Lösung:

1) lineare Ansätze / zwei finite Elemente / aus Ü 7.2.1

> T[I]:=1-2*t+2*(19/28)*t;

$$T_I := 1 - \frac{9}{14} t$$

$$> T[II] := 2 * (19/28) * (1-t) + (4/7) * (-1+2*t);$$

$$T_{II} := \frac{11}{14} - \frac{3}{14} t$$

2) quadratische Ansätze / Einzelement / aus Ü 7.2.2

$$> Q := 1 - 3*t + 2*t^2 + 4*(39/56)*t*(1-t) + (4/7)*t*(-1+2*t);$$

$$Q := 1 - 3 t + 2 t^2 + \frac{39 t (1-t)}{14} + \frac{4 t (-1+2 t)}{7}$$

3) kubische Ansätze / Einzelement / aus Ü 7.2.3

$$> K := 1 - (11/2)*t + 9*t^2 - (9/2)*t^3 + (881/1161)*(9*t -$$

$$(45/2)*t^2 + (27/2)*t^3) + (5137/8127)*(-9/2)*t + 18*t^2 - (27/2)*t^3) + (171/301)*(t - (9/2)*t^2 + (9/2)*t^3);$$

$$K := 1 - \frac{285}{301} t + \frac{225}{301} t^2 - \frac{10}{43} t^3$$

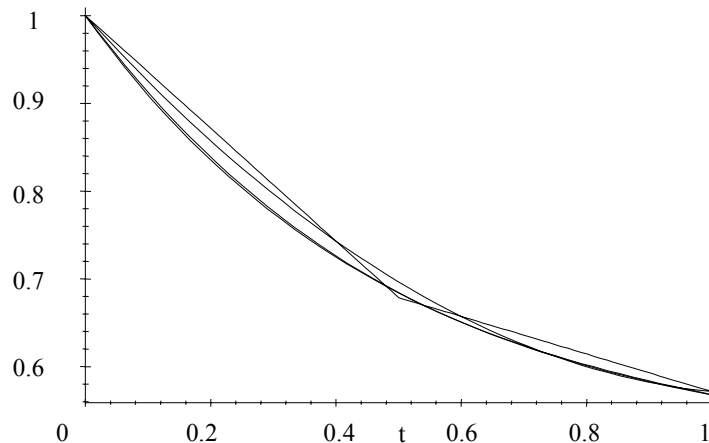
4) exakte Lösung / Gesamtbereich / aus Ü 7.2.1

$$> \text{Tau} := (1/2) * (1 + \exp(-2*t));$$

$$T := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{(-2 t)}$$

> with(plots);

> plot1:=plot({T[I](t)},t=0..1/2,color=black): plot2:=plot({T[II](t)},t=1/2..1,
color=black): plot3:=plot({Q(t)},t=0..1,color=black): plot4:=plot({K(t)},t=0..1,
color=black): plot5:=plot({Tau(t)},t=0..1,color=black): plots[display]({plot1,
plot2,plot3,plot4,plot5});



Im Bild erkennt man, dass die Lösung auf der Basis kubischer Formfunktionen nur geringfügig von der exakten Lösung abweicht. Die "lineare" und "quadratische" Lösung nehmen in $t = 1$ denselben Wert von $4/7$ an.

>

Ü 7.2.4

Zweckmäßigerweise stellt man das Randwertproblem in *dimensionsloser Form* dar. Mit den *dimensionslosen* Größen

$$\Theta := (T - T_1) / (T_0 - T_1), \quad (5)$$

$$\xi := x / d, \quad (6)$$

$$a := \mu(T_0 - T_1) / \lambda_1 \quad (7)$$

kann die Differentialgleichung (1) auf die *dimensionslose Form*

$$(1 + a\Theta) \frac{d^2 \Theta}{d\xi^2} + a \left(\frac{d\Theta}{d\xi} \right)^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{d}{d\xi} \left[(1 + a\Theta) \frac{d\Theta}{d\xi} \right] = 0} \quad (8a,b)$$

gebracht werden, während die Randbedingungen (3a,b) durch

$$\Theta(0) = 1 \quad \text{und} \quad \Theta(1) = 0 \quad (9a,b)$$

auszudrücken sind.

Die *exakte Lösung* der Differentialgleichung (8b) kann leicht gefunden werden. Zunächst kann aus (8b)

$$(1 + a\Theta) \frac{d\Theta}{d\xi} = A$$

gefolgt werden. Anschließend erhält man durch Trennung der Veränderlichen:

$$(1 + a\Theta)d\Theta = A d\xi \Rightarrow \Theta + \frac{a}{2}\Theta^2 = A\xi + B. \quad (10)$$

Darin bestimmt man die Integrationskonstanten A und B aus den Randbedingungen (9a,b) zu

$$-A = B = 1 + a/2, \quad (11)$$

so dass damit aus der quadratischen Gleichung (10) schließlich die *exakte Lösung*

$$\boxed{\Theta = -1/a + \sqrt{(1/a)^2 + (1 + 2/a)(1 - \xi)}} \quad (12)$$

gefolgt werden kann. Darin muss das positive Vorzeichen vor der Wurzel gewählt werden, da Θ wegen (4) positiv ist.

Anmerkung: Zur Umformulierung der Ausgangsdifferentialgleichung (2) in die dimensionslose Form (8a,b) sind die Ableitungen

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_0 - T_1}{d} \frac{d\Theta}{d\xi} \quad \text{und} \quad \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_0 - T_1}{d^2} \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} \quad (13a,b)$$

zu beachten.

a) Lösung nach dem klassischen GALERKIN-Verfahren

Als *Näherung* sei der Polynomansatz

$$\Theta \approx \Theta_n = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \xi^i \quad (14)$$

gewählt. Aufgrund der Randbedingungen (9a,b) gilt für die Ansatzfreiwerte:

$$c_0 = 1 \quad \text{und} \quad 1 + \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0, \quad (15a,b)$$

so dass der *Näherungsansatz* (14) gemäß

$$\Theta_n = 1 - \xi + \sum_{i=1}^n C_i (1 - \xi^i) \xi \quad (16)$$

ausgedrückt werden kann. Diese Aufspaltung ähnelt den *RITZ-Ansätzen* (7.1 a,b,c), d.h., der erste Term $(1 - \xi)$ spielt eine "Sonderrolle". Er erfüllt die *inhomogene Randbedingung* (9a), während die übrigen n Funktionen

$$\psi_i(\xi) := (1 - \xi^i) \xi, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

an den Randpunkten verschwinden.

Durch die Berücksichtigung der Randbedingungen (9a,b) ist die Anzahl der $n+2$ Ansatzfreiwerte c_i in (14) wegen (15a,b) auf n zu bestimmende Werte C_i in (16) reduziert worden.

Die *Verfahren der gewichteten Residuen* fordern, dass der Integralausdruck (7.111) bzw.

$$\int_0^1 W_i(\xi) R(\xi) d\xi \stackrel{!}{=} 0 \quad (18)$$

d.h. das *Residuum* in einem *gewichteten Mittel* verschwindet (Ü 7.2.1).

Darin erhält man das *Residuum* durch Einsetzen der Näherung (16), (17) in die Differentialgleichung (8a):

$$R(\xi, \Theta_n) = (1 + a \Theta_n) \Theta_n'' + a \Theta_n'^2. \quad (19)$$

Nach dem *klassischen GALERKIN-Verfahren* sind als *Wichtungsfunktionen* $W_i(\xi)$ in (18) die Ansatzfunktionen (*trial functions, test functions*) $\psi_i(\xi)$ gemäß (17) zu wählen:

$$\boxed{W_i(\xi) = \psi_i(\xi)} . \quad (20)$$

Als Beispiel sei die erste Näherung

$$\boxed{\Theta_1 = 1 - \xi + C_1(1 - \xi)\xi} \quad (21)$$

gewählt und der Parameter $a = 1$ gesetzt. Dann wird

$$\psi_1(\xi) = (1 - \xi)\xi \quad (22)$$

und

$$R(\xi, \Theta_1; a = 1) = 1 - 4C_1 + 2C_1\xi - 2C_1^2(1 - \xi)\xi + C_1[C_1(1 - 2\xi) - 2](1 - 2\xi). \quad (23)$$

Mit (20), (22) und (23) folgt aus (18) eine quadratische Gleichung

$$1 - 3C_1 - \frac{1}{5}C_1^2 = 0 \quad (24)$$

mit den beiden Lösungen

$$C_1 = 0,32624 \quad \text{und} \quad C_1 = -15,32624, \quad (25a,b)$$

die mit dem MAPLE- Programm ermittelt wurden, wie der nachstehende Output zeigt.

```
> W(xi):=(1-xi)*xi;
```

$$W(\xi) := (1 - \xi)\xi$$

```
> R(xi):=1-4*C[1]+2*C[1]*xi-2*C[1]^2*(1-xi)*xi+C[1]*(C[1]*
(1-2*xi)-2)*(1-2*xi);
```

$$R(\xi) := 1 - 4C_1 + 2C_1\xi - 2C_1^2(1 - \xi)\xi + C_1(C_1(1 - 2\xi) - 2)(1 - 2\xi)$$

```
> Int(W*R,xi=0..1)=int(W(xi)*R(xi),xi=0..1);
```

$$\int_0^1 W R d\xi = -\frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{30}C_1^2 + \frac{1}{6}$$

```
> evalf(solve(1/6-(1/2)*C[1]-C[1]^2/30=0,C[1]));
```

$$-15.32623792, .326237923$$

```
>
```

Von den Lösungen (25a,b) ist nur der positive Wert physikalisch sinnvoll; denn mit (25b) würde (21) beispielsweise in Schichtmitte ($\xi = 1/2$) eine **negative**

dimensionslose Temperatur von $\Theta_1(1/2) = -3,332$ liefern! Mithin ist die *erste Näherung* (21) durch

$$\boxed{\Theta_1 = 1 - \xi + 0,32624(1 - \xi)\xi} \quad (26a)$$

bzw.

$$\boxed{\Theta_1 = 1 - 0,673762077\xi - 0,326237923\xi^2} \quad (26b)$$

gegeben.

b) Lösung mit Hilfe der FEM

Lineare Ansatzfunktionen wie in Ü 7.2.1 sind hier unzuweckmäßig, da in der Differentialgleichung (8a) bzw. im Residuum (19) der Term mit der zweiten Ableitung verschwinden würde. Folglich sollen im Folgenden *quadratische Ansatzfunktionen* aus Ü 3.1.23 gewählt werden:

$$N_1(\xi) = 1 - 3\xi + 2\xi^2, \quad N_2(\xi) = 4\xi(1 - \xi), \quad N_3(\xi) = (-1 + 2\xi)\xi, \quad (27a,b,c)$$

so dass drei Knotenpunkte für ein finites Element vorzusehen sind. Mithin ist der *Näherungsansatz* gemäß

$$\Theta \approx \tilde{\Theta} = \sum_{j=1}^3 \Theta_j N_j(\xi) \quad (28)$$

anzusetzen. Darin sind Θ_j die *Knotenwerte*. Betrachtet man als erste Näherung die gesamte Schicht als Einzelement, so gilt aufgrund der Randbedingungen (9a,b) für die Knotenwerte:

$$\Theta_1 = 1, \quad \Theta_2 = ?, \quad \Theta_3 = 0, \quad (29a,b,c)$$

d.h., man braucht nur einen Knotenwert $\left[\Theta_2 = \tilde{\Theta}(1/2)\right]$ zu bestimmen. Dazu setzt man den Ansatz (28) unter Berücksichtigung der Randbedingungen (29a,c) in (19) ein und erhält z.B. für $a = 1$ das *Residuum*

$$R(\xi, \tilde{\Theta}) = \left[2 - 3\xi + 2\xi^2 + 4\xi(1 - \xi)\Theta_2\right](4 - 8\Theta_2) + \left[-3 + 4\xi + (4 - 8\xi)\Theta_2\right]^2. \quad (30)$$

Nach dem "modifizierten" GALERKIN-Verfahren werden als *Wichtungsfunktionen* in (18) die *shape functions* (27a,b,c) im Gegensatz zu (20) gewählt:

$$\boxed{W_i(\xi) = N_i(\xi)}. \quad (31)$$

Mit (30) und (31) erhält man wegen (27a,b,c) aus der Forderung (18) **drei** unterschiedliche quadratische Gleichungen zur Bestimmung von Θ_2 , also insgesamt **6** verschiedene Lösungen, von denen aber nur **zwei** brauchbar sind, nämlich $\Theta_2 = 0,542140212$ und $\Theta_2 = 0,581559481$. Der letzte Wert stimmt mit der *exak-*

ten Lösung $\Theta_2 = 0,581138830$ nahezu überein. Die numerische Auswertung ist mit Hilfe der MAPLE-Software durchgeführt, wie folgender Output zeigt.

```
>R(xi):=(2-3*xi+2*xi^2+4*xi*(1-xi)*Theta[2])*(4-8*Theta[2])+
> (-3+4*xi+(4-8*xi)*Theta[2])^2;
```

$$R(\xi) := (2 - 3\xi + 2\xi^2 + 4\xi(1 - \xi)\Theta_2)(4 - 8\Theta_2) + (-3 + 4\xi + (4 - 8\xi)\Theta_2)^2$$

```
>N[1]:=1-3*xi+2*xi^2; N[2]:=4*xi*(1-xi); N[3]:=xi*(-1+2*xi);
```

$$N_1 := 1 - 3\xi + 2\xi^2$$

$$N_2 := 4\xi(1 - \xi)$$

$$N_3 := \xi(-1 + 2\xi)$$

```
>Int(N[1]*R,xi=0..1) = int(N[1]*R(xi),xi=0..1);
```

$$\int_0^1 (1 - 3\xi + 2\xi^2) R d\xi = -\frac{76}{15}\Theta_2 + \frac{16}{15}\Theta_2^2 + \frac{73}{30}$$

```
>Int(N[2]*R,xi=0..1) = int(N[2]*R(xi),xi=0..1);
```

$$\int_0^1 4\xi(1 - \xi) R d\xi = -\frac{88}{15}\Theta_2 - \frac{32}{15}\Theta_2^2 + \frac{62}{15}$$

```
>Int(N[3]*R,xi=0..1) = int(N[3]*R(xi),xi=0..1);
```

$$\int_0^1 \xi(-1 + 2\xi) R d\xi = -\frac{16}{15}\Theta_2 + \frac{16}{15}\Theta_2^2 + \frac{13}{30}$$

```
>evalf(solve(-(76/15)*Theta[2]+(16/15)*Theta[2]^2+73/30=0,Theta[2]));
```

$$4.207859788, .542140212$$

```
>evalf(solve(-(88/15)*Theta[2]-(32/15)*Theta[2]^2+62/15=0,Theta[2]));
```

$$-3.331559481, .581559481$$

```
>solve(-(16/15)*Theta[2]+(16/15)*Theta[2]^2+13/30=0,Theta[2]);
```

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}I\sqrt{10}, \frac{1}{2} - \frac{1}{8}I\sqrt{10}$$

Die exakte Lösung ist:

```
>Theta[e]:=sqrt(4-3*xi) - 1;
```

$$\Theta_e := \sqrt{4 - 3\xi} - 1$$

Am Knotenpunkt 1/2 ergibt sich daraus der Wert:

```
>Theta[e]:=evalf(subs(xi=1/2,"));
```

$$\Theta_e := .581138830$$

Der Näherungswert 0.581559481 stimmt bis zur vierten Stelle nach dem Komma mit der exakten Lösung überein!

>

Setzt man den ermittelten Näherungswert $\Theta_2 = 0,581559481$ unter Berücksichtigung der Randbedingungen (29a,c) in (28) ein, so erhält man die *Temperaturverteilung*

$$\tilde{\Theta} = \Theta_q = 1 - 0,673762076 \xi - 0,326237924 \xi^2, \quad (32)$$

die mit der Näherung (26b) identisch ist, wenn man in den Koeffizienten von ξ und ξ^2 die Unterschiede ab der neunten Stelle nach dem Komma nicht beachtet.

Wählt man in (18) als *Wichtungsfunktion* $W_i = 1$, was dem *Verfahren der Kollokation in Teilbereichen (subdomain method)* entspricht, so ermittelt man einen Wert $\Theta_2 = 7 / 12$ und damit nach (28) eine Näherung

$$\tilde{\Theta} \equiv \Theta_s = 1 - \frac{2}{3} \xi - \frac{1}{3} \xi^2, \quad (33)$$

die schlechter ist als die Lösung nach dem *GALERKIN-Verfahren*. Der MAPLE-Output ist im Folgenden abgedruckt.

```
>R(xi):=(2-3*xi+2*xi^2+4*xi*(1-xi)*Theta[2])*(4-8*Theta[2])+
```

```
> (-3+4*xi+(4-8*xi)*Theta[2])^2;
```

$$R(\xi) := (2 - 3\xi + 2\xi^2 + 4\xi(1 - \xi)\Theta_2)(4 - 8\Theta_2) + (-3 + 4\xi + (4 - 8\xi)\Theta_2)^2$$

```
>Int(R,xi=0..1) = simplify(int(R(xi),xi=0..1));
```

$$\int_0^1 R d\xi = -12 \Theta_2 + 7$$

```
>Theta[2]:=solve(-12*Theta[2]+7=0, Theta[2]);
```

$$\Theta_2 := \frac{7}{12}$$

```
>Theta[2]:=evalf("");
```

$$\Theta_2 := .5833333333$$

Dieser Wert ist schlechter als die Lösung nach dem GALERKIN-Verfahren.

>

Die *Näherungen* (26), (32), (33) und die *exakte Lösung* (12) mit $a = 1$ sind im nachstehenden Bild mit Hilfe der MAPLE-Grafik dargestellt.

>

Temperaturverteilung in einer homogenen Schicht mit temperaturabhängiger Wärmeleitfähigkeit, nichtlineares Wärmeleitungsproblem,
Exakte Lösung:

>Theta[e] := sqrt(4-3*xi)-1;

$$\Theta_e := \sqrt{4 - 3\xi} - 1$$

Näherungslösung mit eingliedrigem GALERKIN-Ansatz:

>Theta[l] := 1-xi+0.326237923*(1-xi)*xi;

$$\Theta_l := 1 - \xi + .326237923 (1 - \xi) \xi$$

Näherung mit quadratischen shape functions (FEM /GALERKIN):

>Theta[q] := 1 - 0.673762076*xi-0.326237924*xi^2;

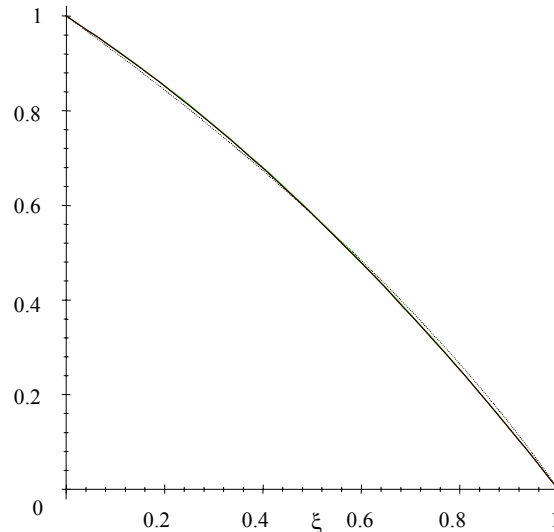
$$\Theta_q := 1 - .673762076 \xi - .326237924 \xi^2$$

Näherung nach der subdomain method:

>Theta[s] := 1- 2*xi/3-xi^2/3;

$$\Theta_s := 1 - \frac{2}{3}\xi - \frac{1}{3}\xi^2$$

>plot({Theta[e],Theta[l],Theta[q],Theta[s]},xi=0..1);



Im Bild erkennt man, dass die *Näherungen* im Bereich der Strichstärke zusammenfallen und nur geringfügig von der *exakten Lösung* abweichen. Die gemeinsamen Punkte mit der exakten Lösung sind mit dem MAPLE- Programm ermittelt, wie folgender Output zeigt.

```
>solve(Theta[e] = Theta[1],xi);
1., .5081451346, 0
>subs(xi = 0.5081451346, Theta[e]);
.573392702
>solve(Theta[e] = Theta[q],xi);
1., 0, .5081451394
>subs(xi = 0.5081451394, Theta[e]);
.573392698
>evalf(solve(Theta[e] = Theta[s],xi));
1., 0, .541381265
>subs(xi = 0.541381265, Theta[e]);
.541381265
```

Bemerkung: Das vorliegende *nichtlineare* Problem konnte einfach gelöst werden, da die gesamte Schicht als *Einzelement* betrachtet wurde und somit nur Θ_2 gemäß (29a,b,c) bestimmt werden musste. Teilt man jedoch die Schicht in mehrere finite Elemente auf, so sind bei quadratischen *shape functions* in jedem Element **drei** Knotenwerte $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ zu bestimmen. Das führt aufgrund der *Nichtlinearität* auf eine Matrixengleichung

$$\boxed{[K(\Theta)]\{\Theta\} = \{F(\Theta)\}}, \quad (34)$$

in der die *Steifigkeitsmatrix* $[K]$ und auch der *Belastungsvektor* $\{F\}$ von den unbekannten Knotenwerten $\{\Theta\}$ abhängen, wie in (34) angedeutet. Zur Lösung solcher *nichtlinearer Probleme* bieten sich *iterative Methoden* (z.B. NEWTON-RAPHSON-Methode) oder die *inkrementelle Methode* an (\rightarrow Kapitel 8). Ein Beispiel zu (34) wird in Ü 7.2.5 diskutiert.

Zur Beurteilung der Güte der Näherungsfunktionen (26), (32) und (33) können verschiedene Kriterien herangezogen werden (Ziffer 7.2).

Im nachstehenden Output und der MAPLE-Grafik ist der *wahre Fehler* der einzelnen Näherungen dargestellt.

>
Darstellung des wahren Fehlers der einzelnen Näherungen:

```
>F(xi) := Theta[e] -Theta;
F(ξ) := Θe - Θ
```

exakte Lösung:

```
>Theta[e] := sqrt(4-3*xi) -1;
Θe := √(4-3ξ) - 1
```

1) Näherungslösung mit eingliedrigem GALERKIN-Ansatz:

$$> \text{Theta}[1] := 1 - \xi + 0.326237923 * (1 - \xi) * \xi;$$

$$\Theta_1 := 1 - \xi + .326237923 (1 - \xi) \xi$$

$$> F[1](\xi) := \text{Theta}[e] - \text{Theta}[1];$$

$$F_1(\xi) := \sqrt{4 - 3\xi} - 2 + \xi - .326237923 (1 - \xi) \xi$$

2) Näherung mit quadratischen shape functions (FEM / GALERKIN):

$$> \text{Theta}[q] := 1 - 0.673762076 * \xi - 0.326237924 * \xi^2;$$

$$\Theta_q := 1 - .673762076 \xi - .326237924 \xi^2$$

$$> F[q](\xi) := \text{Theta}[e] - \text{Theta}[q];$$

$$F_q(\xi) := \sqrt{4 - 3\xi} - 2 + .673762076 \xi + .326237924 \xi^2$$

3) Näherung nach der "subdomain method":

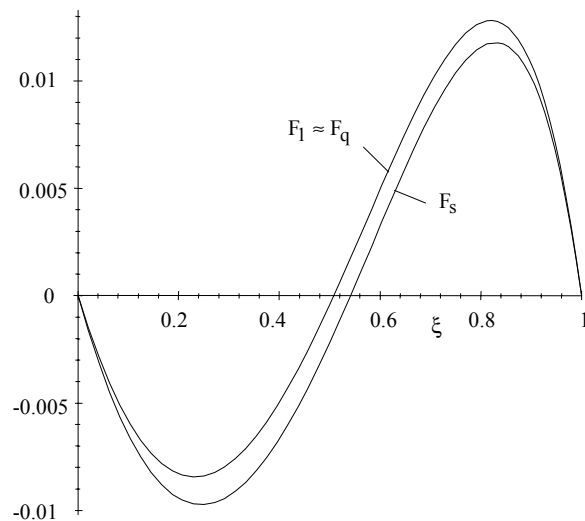
$$> \text{Theta}[s] := 1 - 2 * \xi / 3 - \xi^2 / 3;$$

$$\Theta_s := 1 - \frac{2}{3} \xi - \frac{1}{3} \xi^2$$

$$> F[s](\xi) := \text{Theta}[e] - \text{Theta}[s];$$

$$F_s(\xi) := \sqrt{4 - 3\xi} - 2 + \frac{2}{3} \xi + \frac{1}{3} \xi^2$$

$$> \text{plot}(\{F[s](\xi), F[1](\xi)\}, \xi = 0..1);$$



Als weiteres Kriterium zur Beurteilung der Güte der Näherungen kann die L_2 – *Fehlernorm* (7.133) herangezogen, die mit Hilfe der MAPLE-Software für die einzelnen Näherungen (26), (32) und (33) bestimmt worden ist, wie der nachstehende Computerausdruck zeigt.

>

Ermittlung der L- zwei- Fehlernormen für die einzelnen Näherungen:

>L_2 := sqrt(int(F(xi)^2, xi = 0..1));

$$L_2 := \sqrt{\int_0^1 F(\xi)^2 d\xi}$$

Darin ist F die Differenz aus der exakten Lösung und der Näherung, d.h. der wahre Fehler.

1) Näherungslösung mit eingliedrigem GALERKIN -Ansatz:

>F[1](xi) := sqrt(4-3*xi)-2+xi-0.326237923*(1-xi)*xi;

$$F_1(\xi) := \sqrt{4-3\xi} - 2 + \xi - .326237923 (1-\xi)\xi$$

>L_2[1] := evalf(sqrt(int(F[1](xi)^2,xi = 0..1)));

$$L_{2_1} := .007695174732$$

2) Näherungslösung mit quadratischen shape functions (FEM / GALERKIN):

>F[q](xi) := sqrt(4-3*xi)-2+0.673762076*xi+0.326237924*xi^2;

$$F_q(\xi) := \sqrt{4-3\xi} - 2 + .673762076 \xi + .326237924 \xi^2$$

>L_2[q] := evalf(sqrt(int(F[q](xi)^2,xi = 0..1)));

$$L_{2_q} := .007695174712$$

3) Näherungslösung nach der "subdomain method":

>F[s](xi) := sqrt(4-3*xi)-2+2*xi/3+xi^2/3;

$$F_s(\xi) := \sqrt{4-3\xi} - 2 + \frac{2}{3}\xi + \frac{1}{3}\xi^2$$

>L_2[s] := evalf(sqrt(int(F[s](xi)^2,xi = 0..1)));

$$L_{2_s} := .007667395106$$

Man erkennt, dass sich die L-zwei-Fehlernormen für alle drei Näherungen kaum unterscheiden, wobei die "subdomain method" am besten abschneidet.

>

Der nachstehende Computerausdruck zeigt die Ermittlung der *Residuen* und "*optimalen*" *Kollokationspunkte*, d.h. der Kollokationspunkte, die man wählen muss,

damit das *Kollokationsverfahren* dieselben Ergebnisse liefert wie die drei angegebenen Verfahren.

>

Ermittlung der Residuen und optimalen Kollokationspunkte für die einzelnen Näherungen:

>R(xi) := (1 + a*Theta(xi))*(diff(Theta(xi),xi\$2))+a*(diff(Theta(xi),xi))^2;

$$R(\xi) := (1 + a \Theta(\xi)) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Theta(\xi) \right) + a \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \Theta(\xi) \right)^2$$

Mit dem Parameter a = 1 erhält man folgende Ergebnisse:

1) Näherungslösung mit eingliedrigem GALERKIN-Ansatz:

>Theta[1] := 1-xi + 0.326237923*(1-xi)*xi;

$$\Theta_1 := 1 - \xi + .326237923 (1 - \xi) \xi$$

>R[1](xi):=simplify((1+Theta[1])*(diff(Theta[1],xi\$2))+(diff(Theta[1],xi))^2);

$$R_1(\xi) := -.8509963556 + 1.318840444 \xi + .6385870944 \xi^2$$

>X[1]:=solve(R[1](xi)=0,xi);

$$X_1 := .516226006, -2.581473574$$

2) Näherungslösung mit quadratischen shape functions (FEM / GALERKIN):

>Theta[q] := 1 - 0.673762076*xi - 0.326237924*xi^2;

$$\Theta_q := 1 - .673762076 \xi - .326237924 \xi^2$$

>R[q](xi):=simplify((1+Theta[q])*(diff(Theta[q],xi\$2))+(diff(Theta[q],xi))^2);

$$R_q(\xi) := -.8509963609 + 1.318840446 \xi + .6385870983 \xi^2$$

>X[q]:=solve(R[q](xi)=0,xi);

$$X_q := .516226007, -2.581473567$$

3) Näherungslösung nach der "subdomain method":

>Theta[s] := 1 - 2*xi/3 -xi^2/3;

$$\Theta_s := 1 - \frac{2}{3} \xi - \frac{1}{3} \xi^2$$

>R[s](xi):=simplify((1+Theta[s])*(diff(Theta[s],xi\$2))+(diff(Theta[s],xi))^2);

$$R_s(\xi) := -\frac{8}{9} + \frac{4}{3} \xi + \frac{2}{3} \xi^2$$

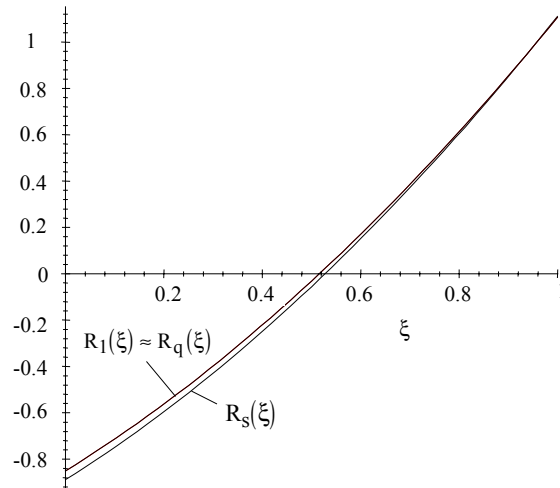
>X[s]:=evalf(solve(R[s](xi)=0,xi));

$$X_s := .527525232, -2.527525232$$

Von den ermittelten Kollokationspunkten X liegen nur die positiven innerhalb der Schichtbreite.

Das folgende Bild zeigt die grafische Darstellung der Residuen.

`>plot({R[1](xi),R[q](xi),R[s](xi)},xi = 0..1);`



Durch eine feinere *Diskretisierung* der Schicht in mehrere finite Elemente kann das Residuum verkleinert werden, so dass man die Verbesserung der Rechnung bzw. das *Konvergenzverhalten* an der Verbesserung des Residuums beobachten kann (Bild 7.4).

Die im Bild dargestellten Residuen der ersten Näherungen für die drei Verfahren erwecken den Eindruck einer schlechten Näherung. Dagegen sprechen aber die ermittelten Temperaturverteilungen und auch die L_2 -Fehlernormen, die mehr aussagen über die Güte der Näherungen.

c) Ermittlung des spezifischen Wärmestromes

Neben den oben diskutierten Kriterien zur Beurteilung der Güte der einzelnen Näherungen kann bei der vorliegenden Aufgabe auch der *spezifische Wärmestrom* herangezogen werden, der bei *stationärer Wärmeleitung* ohne *innere Wärmequellen* in der Schicht konstant sein muss.

Man ermittelt ihn nach dem *FOURIERSchen Gesetz*

$$\dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (35a)$$

das mit (4), (5), (7) und (13a) auf die dimensionslose Form

$$Q \equiv \frac{d}{\lambda_1(T_0 - T_1)} \dot{q} = -(1 + a\Theta) \frac{d\Theta}{d\xi} \quad (35b)$$

gebracht werden kann, die man auch durch Integration unmittelbar aus (8b) erhält und aus der *exakten Lösung* zu

$$\boxed{Q \equiv -A = 1 + a/2} \quad (11)$$

folgt. Für $a = 1$ gilt: $\boxed{Q = 3/2}$. Die aus den Näherungen (26), (32) und (33) ermittelten Q -Werte für $a = 1$ sind dem nachstehenden Computerausdruck zu entnehmen.

>

Ermittlung des "dimensionslosen" spezifischen Wärmestromes für die einzelnen Näherungen:

> $Q := -(1 + a * Theta(xi)) * diff(Theta(xi), xi);$

$$Q := -(1 + a \Theta(\xi)) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \Theta(\xi) \right)$$

Mit dem Parameter $a = 1$ erhält man folgende Ergebnisse:

1) Näherungslösung mit eingliedrigem GALERKIN-Ansatz:

> $Theta[1] := 1 - xi + 0.326237923 * (1 - xi) * xi;$

$$\Theta_1 := 1 - \xi + .326237923 (1 - \xi) \xi$$

> $Q[1] := expand(-(1 + Theta[1]) * diff(Theta[1], xi));$

$$Q_1 := 1.347524154 + .8509963556 \xi - .6594202218 \xi^2 - .2128623648 \xi^3$$

Die Werte an den Schichtflächen (0,1) ergeben sich zu:

> $Q[10] := subs(xi = 0, "Q[1]");$ $Q[11] := subs(xi = 1, "Q[1]");$

$$Q_{10} := 1.347524154$$

$$Q_{11} := 1.326237923$$

Aufgrund der Näherung ergeben sich unterschiedliche Werte an den Schichtflächen. Der exakte Wert ist konstant $Q = 3/2$. Die Fehler betragen 10,2% und 11,6%. Der Wärmestrom besitzt ein Maximum am Kollokationspunkt

> $X[1] := fsolve((diff(Q[1], xi) = 0, xi = 0..1));$

$$X_1 := .5162260059$$

mit dem Wert

> $M[1] := subs(xi = X_1, Q[1]);$

$$M_1 := 1.581818979$$

Der Mittelwert stimmt mit dem exakten Wert $Q = 3/2$ überein:

> $Int(Q[1], xi = 0..1) = int(Q[1], xi = 0..1);$

$$\int_0^1 1.347524154 + .8509963556 \xi - .6594202218 \xi^2 - .2128623648 \xi^3 d\xi = 1.500000000$$

2) Näherungslösung mit quadratischen shape functions :

$$> \text{Theta}[q] := 1 - 0.67362076 * xi - 0.326237924 * xi^2;$$

$$\Theta_q := 1 - .67362076 \xi - .326237924 \xi^2$$

$$> Q[q] := \text{expand}(-(1 + \text{Theta}[q]) * \text{diff}(\text{Theta}[q], xi));$$

$$Q_q := 1.34724152 + .8511867677 \xi - .6592819149 \xi^2 - .2128623661 \xi^3$$

Die Werte an den Schichtflächen (0,1) ergeben sich zu:

$$> Q[q0] := \text{subs}(xi = 0, ""); \quad Q[q1] := \text{subs}(xi = 1, "");$$

$$Q_{q0} := 1.34724152$$

$$Q_{q1} := 1.326284007$$

Wie bei der vorigen Näherung ergeben sich unterschiedliche und vom exakten Wert abweichende Wärmeströme mit Fehlern von 10,2 % und 11,6 %. Der Wärmestrom besitzt ein Maximum am Kollokationspunkt

$$> X[q] := \text{fsolve}((\text{diff}(Q[q], xi) = 0, xi = 0..1));$$

$$X_q := .5163944636$$

mit dem Wert

$$> M[q] := \text{subs}(xi = "", Q[q]);$$

$$M_q := 1.581671525$$

Der Mittelwert stimmt mit dem exakten Wert $Q = 3/2$ überein:

$$> \text{Int}(Q[q], xi = 0..1) = \text{int}(Q[q], xi = 0..1);$$

$$\int_0^1 1.34724152 + .8511867677 \xi - .6592819149 \xi^2 - .2128623661 \xi^3 d\xi = 1.499858674$$

3) Näherungslösung nach der "subdomain method":

$$> \text{Theta}[s] := 1 - 2 * xi / 3 - xi^2 / 3;$$

$$\Theta_s := 1 - \frac{2}{3} \xi - \frac{1}{3} \xi^2$$

$$> Q[s] := \text{expand}(-(1 + \text{Theta}[s]) * \text{diff}(\text{Theta}[s], xi));$$

$$Q_s := \frac{4}{3} + \frac{8}{9} \xi - \frac{2}{3} \xi^2 - \frac{2}{9} \xi^3$$

Die Werte an den Schichtflächen (0,1) ergeben sich zu:

$$> Q[s0] := \text{subs}(xi = 0, ""); \quad Q[s1] := \text{subs}(xi = 1, "");$$

$$Q_{s0} := \frac{4}{3}$$

$$Q_{s1} := \frac{4}{3}$$

Die Werte an den Schichtflächen stimmen überein und weichen vom exakten Wert $Q = 3/2$ um 11% ab. Der Wärmestrom besitzt ein Maximum am Kollokationspunkt

```
>X[s] := fsolve((diff(Q[s],xi) = 0,xi = 0..1));
X_s := .5275252317
```

mit dem Wert

```
>M[s] := subs(xi = ",Q[s]);
M_s := 1.584100240
```

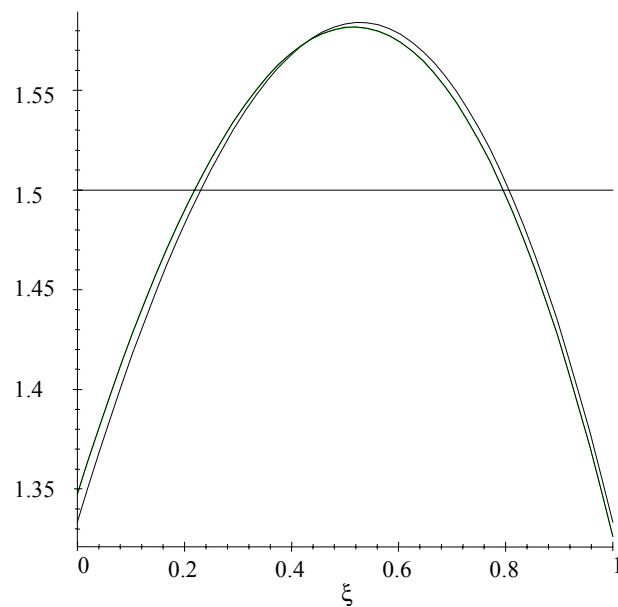
Der Mittelwert stimmt mit dem exakten Wert $Q = 3/2$ überein:

```
>Int(Q[s],xi = 0..1) = int(Q[s],xi = 0..1);
```

$$\int_0^1 \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{9}\xi - \frac{2}{3}\xi^2 - \frac{2}{9}\xi^3 \right) d\xi = \frac{3}{2}$$

Im nachstehenden Bild sind die Wärmeströme grafisch dargestellt:

```
>plot({Q[1],Q[q],Q[s],3/2},xi = 0..1);
```



Ü 7.2.5

Die *exakte Lösung* kann leicht gefunden werden durch Trennung der Veränderlichen:

$$(yy')' = 1 \Rightarrow yy' = A + x \Rightarrow ydy = (A + x)dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = Ax + \frac{1}{2}x^2 + B.$$

In Verbindung mit den Randbedingungen (2a,b) folgt schließlich die *exakte Lösung*:

$$\boxed{y_e = 1 - x}. \quad (4)$$

Sowohl unter Punkt **a)** als auch **b)** sind **drei Knotenpunkte** vorhanden, so dass der *Näherungsansatz* gemäß

$$y \approx \sum_{j=1}^3 y_j N_j(x) \quad (5)$$

darstellbar ist. Darin sind y_j die *Knotenwerte* und N_j die *shape functions*, die *linear* bzw. *quadratisch* in x gegeben sind.

Im Sinne von GALERKIN muss der Integralausdruck (7.111)

$$\boxed{\int_0^1 N_i(x) R(x) dx \stackrel{!}{=} 0}, \quad (6)$$

d.h. das *Residuum* im *gewichteten Mittel* verschwinden, wobei die Wichtungsfunktionen durch die shape functions ersetzt werden ($W_i \equiv N_i$). Setzt man den Näherungsansatz (5) in die Differentialgleichung (1) ein, so ergibt sich ein Residuum $R(x) = (yy')' - 1$. Damit geht die Forderung (6) über in:

$$-\int_0^1 N_i (yy')' dx = -\int_0^1 N_i dx, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Darin entspricht die rechte Seite dem "*Belastungsvektor*" in (3):

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad \text{mit} \quad F_i \equiv -\int_0^1 N_i dx. \quad (8)$$

Zweckmäßigerweise formt man die linke Seite in (7) durch partielle Integration folgendermaßen um:

$$-\int_0^1 N_i (yy')' dx = -N_i (yy') \Big|_0^1 + \int_0^1 N_i' (yy') dx. \quad (9)$$

Darin verschwindet der integralfreie Term aufgrund der homogenen Randbedingungen (2a,b), so dass (7) mit (9) in

$$\boxed{\int_0^1 N_i'(yy')dx = - \int_0^1 N_i dx} \quad (10)$$

übergeht.

Darin ist der Näherungsansatz (5) zu berücksichtigen und das Produkt yy' gemäß

$$yy' = \sum_{k=1}^3 y_k N_k(x) \sum_{j=1}^3 y_j N_j'(x) \quad (11)$$

einzusetzen.

Nach diesen Vorarbeiten können die Punkte a) und b) der Aufgabenstellung im Einzelnen behandelt werden.

a) Aufteilung des Gesamtbereichs in zwei lineare finite Elemente

Gemäß Ü 7.2.1 gilt:

$$\left. \begin{array}{l} N_1(x) = 1 - 2x \\ N_2(x) = 2x \\ N_3(x) = 0 \end{array} \right\} \text{im ersten finiten Element: } \boxed{0 \leq x \leq 1/2} \quad \begin{array}{l} (12a) \\ (12b) \\ (12c) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} N_1(x) \equiv 0 \\ N_2(x) = 2(1 - x) \\ N_3(x) = -1 + 2x \end{array} \right\} \text{im zweiten finiten Element: } \boxed{1/2 \leq x \leq 1} \quad \begin{array}{l} (12d) \\ (12e) \\ (12f) \end{array}$$

Mit diesen *shape functions* ermittelt man den "Belastungsvektor" $\{F\}$ in (3) aus (8) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} F_1 &= - \int_0^{1/2} N_1(x) dx = - \int_0^{1/2} (1 - 2x) dx = -\frac{1}{4} , \\ F_2 &= - \left[\int_0^{1/2} N_2(x) dx + \int_{1/2}^1 N_2(x) dx \right] = - \left[\int_0^{1/2} 2x dx + \int_{1/2}^1 2(1 - x) dx \right] = -\frac{1}{2} , \\ F_3 &= - \int_{1/2}^1 N_3(x) dx = - \int_{1/2}^1 (-1 + 2x) dx = -\frac{1}{4} , \end{aligned}$$

$$\boxed{\{F\} = -\frac{1}{4}\{1 \quad 2 \quad 1\}^t}. \quad (13)$$

Die linke Seite in (10) führt auf die "*Steifigkeitsmatrix*" $[K] = [k_{ij}]$ in Verbindung mit (11) und (12). Der Integrationsbereich ist entsprechend der Diskretisierung mit den zugehörigen *shape functions* (12a ÷ f) aufzuteilen. Im Einzelnen erhält man folgende Ergebnisse:

$$\left. \begin{matrix} i=1 \\ j=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow k_{11} = \int_0^{1/2} N_1'(y_1 N_1 + y_2 N_2) N_1' dx = y_1 + y_2, \quad (14a)$$

$$\left. \begin{matrix} i=1 \\ j=2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow k_{12} = \int_0^{1/2} N_1'(y_1 N_1 + y_2 N_2) N_2' dx = -(y_1 + y_2) = k_{21}, \quad (14b)$$

$$\left. \begin{matrix} i=1 \\ j=3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow k_{13} = \int_0^{1/2} N_1'(y_1 N_1 + y_2 N_2) N_3' dx = 0 = k_{31}, \quad (14c)$$

$$\left. \begin{matrix} i=2 \\ j=2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow k_{22} = \int_0^{1/2} N_2'(y_1 N_1 + y_2 N_2) N_2' dx + \int_{1/2}^1 N_2'(y_2 N_2 + y_3 N_3) N_2' dx = y_1 + 2y_2 + y_3, \quad (14d)$$

$$\left. \begin{matrix} i=2 \\ j=3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow k_{23} = \int_{1/2}^1 N_2'(y_2 N_2 + y_3 N_3) N_3' dx = -(y_2 + y_3) = k_{32}, \quad (14e)$$

$$\left. \begin{matrix} i=3 \\ j=3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow k_{33} = \int_{1/2}^1 N_3'(y_2 N_2 + y_3 N_3) N_3' dx = y_2 + y_3. \quad (14f)$$

Mit diesen Werten und mit dem Ergebnis (13) lautet die *nichtlineare Matrixgleichung* (3) schließlich:

$$\begin{bmatrix} y_1 + y_2 & -(y_1 + y_2) & 0 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 & -(y_2 + y_3) \\ \text{symmetrisch} & & y_2 + y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

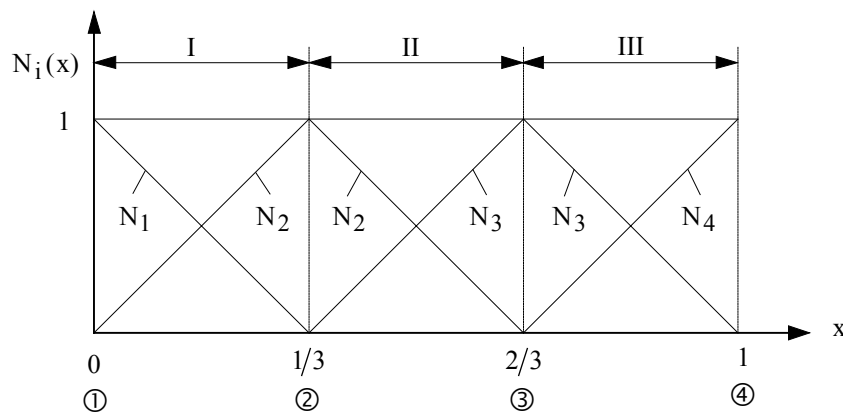
Die globale "Steifigkeitsmatrix" $[K] = [k_{ij}]$ in (15) hat *Bandstruktur*; sie ist *symmetrisch* und *singulär* und setzt sich aus **zwei** 2×2 Teilmatrizen zusammen

$$[K_I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ y_1 + y_2 & -(y_1 + y_2) \\ -(y_1 + y_2) & y_1 + y_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \text{und} \quad [K_{II}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ y_2 + y_3 & -(y_2 + y_3) \\ -(y_2 + y_3) & y_2 + y_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \quad (16a,b)$$

die an der Nahtstelle (Knotenpunkt ②, d.h.: $i = j = 2$) überlappt werden, woraus (15) gebildet wird. Man vergleiche hierzu (18) in Ü 7.2.1. Mithin genügt es, eine 2×2 Einzelmatrix aufzustellen, z.B. (16a) mit den Werten (14a) und (14b). Der Wert $(k_{22})_I$ in der Matrix (16a) entspricht dem ersten Integralausdruck in (14d).

Die "lokale" Matrix (16b) geht unmittelbar aus (16a) hervor durch entsprechende Vertauschung der Knotennummerierung ("lokal" \rightarrow "global"). Somit sind nur drei Integrale auszuwerten, nämlich (14a), (14b) und das erste Integral in (14d). Alle anderen Integrale in (14) sind überflüssig! Man vergleiche hierzu auch (7.83a + d) und (7.84) mit den entsprechenden Bemerkungen oder auch die im Zusammenhang mit (3.18a,b) und (3.19) aufgestellten Regeln I und II für die *direkte Methode*.

Mit einer Erhöhung der Elementzahl bleibt die Bandbreite erhalten. Auch wird sich der Rechenaufwand zur Aufstellung der "Steifigkeitsmatrix" $[K]$ und des "Lastvektors" $\{F\}$ in (3) kaum erhöhen. Zur Demonstration sei im Folgenden die Anzahl der finiten Elemente im betrachteten Bereich $0 \leq x \leq 1$ auf **drei** erhöht (Skizze).



Es genügt, ein Element (z.B. Element I) herauszugreifen mit den linearen *shape functions*

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 1 - 3x \\ N_2 &= 3x \\ N_3 &= N_4 \equiv 0 \end{aligned} \right\} \text{im finiten Element I} \quad \begin{aligned} (17a) \\ (17b) \\ (17c,d) \end{aligned}$$

Für die anderen Elemente lauten die shape functions in *globalen Koordinaten* folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= N_4 \equiv 0 \\ N_2 &= 2 - 3x \\ N_3 &= -1 + 3x \end{aligned} \right\} \text{im finiten Element II} \quad \begin{aligned} (17e,f) \\ (17g) \\ (17h) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= N_2 \equiv 0 \\ N_3 &= 3(1 - x) \\ N_4 &= -2 + 3x \end{aligned} \right\} \text{im finiten Element III} \quad \begin{aligned} (17i,j) \\ (17k) \\ (17l) \end{aligned}$$

Für das finite Element **I** ermittelt man den "Lastvektor" (8) zu:

$$\{F^e\} = \left\{ - \int_0^{1/3} N_i dx \right\} = -\frac{1}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

Damit erhält man in Erweiterung von (13) für die *Gesamtstruktur* $0 \leq x \leq 1$ unter Beachtung der "Überlappung" an den gemeinsamen *Knotenpunkten* ② und ③ den **globalen** "Lastvektor" zu:

$$\boxed{\{F\} = -\frac{1}{6} \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \end{Bmatrix}^t}. \quad (19)$$

Zur Ermittlung der **lokalen** "Steifigkeitsmatrix" $[K_I]$ sind analog (14a), (14b) und (14d) folgende Integrale unter Berücksichtigung von (17a,b) auszuwerten:

$$k_{11} = \int_0^{1/3} N_1' (y_1 N_1 + y_2 N_2) N_1' dx = \frac{3}{2} (y_1 + y_2) \quad , \quad (20a)$$

$$k_{12} = \int_0^{1/3} N_1' (y_1 N_1 + y_2 N_2) N_2' dx = -\frac{3}{2} (y_1 + y_2) = k_{21} \quad , \quad (20b)$$

$$k_{22} = \int_0^{1/3} N_2' (y_1 N_1 + y_2 N_2) N_2' dx = \frac{3}{2} (y_1 + y_2) \quad . \quad (20c)$$

Damit lautet die *Elementsteifigkeitsmatrix* $[K_I]$ analog (16a):

$$[K_I] = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ y_1 + y_2 & -(y_1 + y_2) \\ -(y_1 + y_2) & y_1 + y_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad (21)$$

Mit (19) und (21) erhält man analog (15) schließlich die Matrixgleichung für die Gesamtstruktur:

$$\begin{bmatrix} y_1 + y_2 & -(y_1 + y_2) & 0 & 0 \\ -(y_1 + y_2) & y_1 + 2y_2 + y_3 & -(y_2 + y_3) & 0 \\ 0 & -(y_2 + y_3) & y_2 + 2y_3 + y_4 & -(y_3 + y_4) \\ 0 & 0 & -(y_3 + y_4) & y_3 + y_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

Die globalen "Steifigkeitsmatrizen" $[K]$ in (15) und (22) haben dieselben Eigenschaften.

Zur Lösung von (15) und (22) sind die Randbedingungen (2a,b), d.h. $y_1 = 1$ und $y_3 = 0$, zu berücksichtigen. Damit vereinfacht sich (15) gemäß Ziffer 3.6 zu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + 2y_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1/2 + (1 + y_2) \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

Daraus ergeben sich die Lösungen

$$y_2 = \pm 1/2, \quad (27)$$

von denen aber nur $y_2 = +1/2$ brauchbar ist. Setzt man $y_2 = 1/2$ in (5) ein, so erhält man unter Berücksichtigung von (2a,b) und (12) die Lösungen innerhalb der beiden finiten Elemente I und II zu:

$$\boxed{y_I = N_1 + y_2 N_2 = 1 - x} \quad \text{und} \quad \boxed{y_{II} = y_2 N_2 = 1 - x} \quad (28a,b)$$

Die Lösungen (28a,b) stimmen mit der exakten Lösung (4) überein.

Mit den Randbedingungen (2a,b), d.h. $y_1 \equiv 1$ und $y_4 \equiv 0$, vereinfacht sich die Matrixgleichung (22) gemäß Ziffer 3.6 zu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0(1 + 2y_2 + y_3) - (y_2 + y_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(y_2 + y_3) & y_2 + 2y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2/9 + (1 + y_2) \\ -2/9 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (29)$$

woraus das *reduzierte Gleichungssystem*

$$2y_2^2 - y_3^2 = 7/9, \quad y_2^2 - 2y_3^2 = 2/9 \quad (30a,b)$$

entsteht, das die exakten Werte

$$\boxed{y_2 = 2/3} \quad \text{und} \quad \boxed{y_3 = 1/3} \quad (31a,b)$$

liefert. Damit ergeben sich unter Berücksichtigung der Randbedingungen (2a,b) und der entsprechenden *shape functions* (17a ÷ ℓ) analog (28a,b) aus (5) folgende Lösungen innerhalb der drei finiten Elemente:

$$\boxed{y_I = N_1 + y_2 N_2 = 1 - x} \quad \boxed{y_{II} = y_2 N_2 + y_3 N_3 = 1 - x} \quad \boxed{y_{III} = y_3 N_3 = 1 - x} \quad (32a,b,c)$$

die mit der *exakten Lösung* (4) übereinstimmen.

b) Gesamtbereich als quadratisches Einzelement

Im Gegensatz zu (12a ÷ f) bzw. (17a ÷ ℓ) sind die quadratischen *shape functions*

$$N_1 = 1 - 3x + 2x^2, \quad N_2 = 4x(1 - x), \quad N_3 = x(-1 + 2x) \quad (33a,b,c)$$

in obige Beziehungen einzusetzen. Die Auswertungen sind mit Hilfe der MAPLE-Software durchgeführt. Der Programmablauf ähnelt dem entsprechenden Programm in Ü7.2.2. Der Computeroutput ist im Folgenden abgedruckt.

>

> with(linalg):

> Matrix_d := matrix(1,3,[d[1],d[2],d[3]]);

$$\text{Matrix_d} := [d_1 \quad d_2 \quad d_3]$$

> J := multiply(transpose(Matrix_d), S * Matrix_d):

> K := Int(evalm(J), x);

$$K := \int \begin{bmatrix} S d_1^2 & d_1 S d_2 & d_1 S d_3 \\ d_1 S d_2 & S d_2^2 & d_2 S d_3 \\ d_1 S d_3 & d_2 S d_3 & S d_3^2 \end{bmatrix} dx$$

Die quadratischen "shape functions" lauten:

> N[1] := x -> 1 - 3*x + 2*x^2; N[2] := x -> 4*x*(1-x); N[3] := x -> x*(-1 + 2*x);

$$N_1 := x \rightarrow 1 - 3x + 2x^2$$

$$N_2 := x \rightarrow 4x(1 - x)$$

$$N_3 := x \rightarrow x(-1 + 2x)$$

Die Summe der Produkte aus den "shape functions" mit den entsprechenden Knotenwerten ist:

> S := x -> N[1]*y[1] + N[2]*y[2] + N[3]*y[3];

$$S := x \rightarrow N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen $y_1 = y(0) = 1$ und $y_3 = y(1) = 0$ wird:

$$\begin{aligned} > S := x \rightarrow 1 - 3x + 2x^2 + 4x(1-x)y_2; \\ S &:= x \rightarrow 1 - 3x + 2x^2 + 4x(1-x)y_2 \end{aligned}$$

Die erste Ableitung der "shape functions" führt auf die Größen d1,d2,d3 in obiger Matrix:

$$\begin{aligned} > d[1] &:= x \rightarrow -3 + 4x; & d[2] &:= x \rightarrow 4 - 8x; & d[3] &:= x \rightarrow -1 + 4x; \\ d_1 &:= x \rightarrow -3 + 4x \\ d_2 &:= x \rightarrow 4 - 8x \\ d_3 &:= x \rightarrow -1 + 4x \end{aligned}$$

Die "Steifigkeitsmatrix" [K] ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} > p := \text{map}(\text{int}, J(x), x = 0..1): \quad K := (1/30) * \text{evalm}(30 * p); \\ K &:= \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 37 + 36y_2 & -44 - 32y_2 & 7 - 4y_2 \\ -44 - 32y_2 & 48 + 64y_2 & -4 - 32y_2 \\ 7 - 4y_2 & -4 - 32y_2 & -3 + 36y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

> Inverse(K) := inverse(K);
Error, (in inverse) singular matrix

Die "Steifigkeitsmatrix" ist symmetrisch und singulär. Den "Lastvektor" {F} ermittelt man gemäß:

$$\begin{aligned} > \text{Matrix_N} &:= \text{matrix}(1, 3, [N[1], N[2], N[3]]): \quad F := -\text{map}(\text{Int}, \text{Matrix_N}, x=0..1); \\ F &:= - \begin{bmatrix} \int_0^1 N_1 dx & \int_0^1 N_2 dx & \int_0^1 N_3 dx \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > q &:= -\text{map}(\text{int}, \text{Matrix_N}(x), x=0..1): \quad F := (1/30) * \text{evalm}(30 * q); \\ F &:= \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -5 & -20 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Knotenwertes y_2 erhält man aus der Matrizengleichung drei algebraische Gleichungen:

$$\begin{aligned} > \text{eqn}[1] &:= \text{expand}(37 + 36*y[2] - (32*y[2] + 44)*y[2]) = -5; \\ \text{eqn}_1 &:= 37 - 8y_2 - 32y_2^2 = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \text{eqn}[2] &:= \text{expand}(-44 - 32*y[2] + (48 + 64*y[2])*y[2]) = -20; \\ \text{eqn}_2 &:= -44 + 16y_2 + 64y_2^2 = -20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \text{eqn}[3] &:= \text{expand}(7 - 4*y[2] - (4 + 32*y[2])*y[2]) = -5; \\ \text{eqn}_3 &:= 7 - 8y_2 - 32y_2^2 = -5 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichungen ergeben sich zu:

> $L[1] := \text{evalf}(\text{solve}(\text{eqn}[1]));$

$$L_1 := -1.277443057, 1.027443057$$

> $L[2] := \text{solve}(\text{eqn}[2]);$

$$L_2 := \frac{1}{2}, \frac{-3}{4}$$

> $L[3] := \text{solve}(\text{eqn}[3]);$

$$L_3 := \frac{-3}{4}, \frac{1}{2}$$

Von diesen Lösungen liegt nur der Wert $y_2 = 1/2$ im betrachteten Bereich $0 < x < 1$ und stimmt mit dem exakten Wert überein. Damit erhält man die Näherung:

> $Y := N[1] + N[2]*y[2];$

$$Y := N_1 + N_2 y_2$$

> $Y := \text{expand}(N[1](x) + N[2](x)/2);$

$$Y := 1 - x$$

die mit der exakten Lösung übereinstimmt !

Ergänzung: Die *reduzierte Matrixgleichung* mit "eingebauten" Randbedingungen folgt nach dem Schema in Ziffer 3.6 zu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 48 + 64y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -20 + 44 + 32y_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

woraus man obige Werte $y_2 = 1/2$ und $y_2 = -3/4$ erhält.

c) Gesamtbereich als kubisches Einzelement

Man kann dasselbe MAPLE-Programm verwenden, wobei die **quadratischen** "shape functions" gegen die **kubischen** auszutauschen sind, wie der folgende Output zeigt.

> $\text{with}(\text{linalg});$

> $\text{Matrix_d} := \text{matrix}(1, 4, [d[1], d[2], d[3], d[4]]);$

$$\text{Matrix_d} := [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4]$$

> $J := \text{multiply}(\text{transpose}(\text{Matrix_d}), S * \text{Matrix_d}); \quad K := \text{Int}(\text{evalm}(J), x);$

$$K := \int \begin{bmatrix} S d_1^2 & d_1 S d_2 & d_1 S d_3 & d_1 S d_4 \\ d_1 S d_2 & S d_2^2 & d_2 S d_3 & d_2 S d_4 \\ d_1 S d_3 & d_2 S d_3 & S d_3^2 & d_3 S d_4 \\ d_1 S d_4 & d_2 S d_4 & d_3 S d_4 & S d_4^2 \end{bmatrix} dx$$

Die kubischen "shape functions" können Ü3.1.24 entnommen werden. Aus ihren ersten Ableitungen erhält man die Matrix d:

$$> N[1] := x \rightarrow 1 - 11*x/2 + 9*x^2 - 9*x^3/2; \quad d[1] := x \rightarrow -11/2 + 18*x - 27*x^2/2;$$

$$N_1 := x \rightarrow 1 - \frac{11}{2}x + 9x^2 - \frac{9}{2}x^3$$

$$d_1 := x \rightarrow -\frac{11}{2} + 18x - \frac{27}{2}x^2$$

$$> N[2] := x \rightarrow 9*x - 45*x^2/2 + 27*x^3/2; \quad d[2] := x \rightarrow 9 - 45*x + 81*x^2/2;$$

$$N_2 := x \rightarrow 9x - \frac{45}{2}x^2 + \frac{27}{2}x^3$$

$$d_2 := x \rightarrow 9 - 45x + \frac{81}{2}x^2$$

$$> N[3] := x \rightarrow -9*x/2 + 18*x^2 - 27*x^3/2; \quad d[3] := x \rightarrow -9/2 + 36*x - 81*x^2/2;$$

$$N_3 := x \rightarrow -\frac{9}{2}x + 18x^2 - \frac{27}{2}x^3$$

$$d_3 := x \rightarrow -\frac{9}{2} + 36x - \frac{81}{2}x^2$$

$$> N[4] := x \rightarrow x - 9*x^2/2 + 9*x^3/2; \quad d[4] := x \rightarrow 1 - 9*x + 27*x^2/2;$$

$$N_4 := x \rightarrow x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3$$

$$d_4 := x \rightarrow 1 - 9x + \frac{27}{2}x^2$$

Die Summe S ist folgendermaßen definiert:

$$> S := x \rightarrow N[1]*y[1] + N[2]*y[2] + N[3]*y[3] + N[4]*y[4];$$

$$S := x \rightarrow N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen $y_1 = y(0) = 1$ und $y_4 = y(1) = 0$ wird:

$$> S := x \rightarrow 1 - 11*x/2 + 9*x^2 - 9*x^3/2 + (9*x - 45*x^2/2 + 27*x^3/2)*y[2] + (-9*x/2 + 18*x^2 - 27*x^3/2)*y[3];$$

$$S := x \rightarrow 1 - \frac{11}{2}x + 9x^2 - \frac{9}{2}x^3 + \left(9x - \frac{45}{2}x^2 + \frac{27}{2}x^3\right)y_2 + \left(-\frac{9}{2}x + 18x^2 - \frac{27}{2}x^3\right)y_3$$

Die "Steifigkeitsmatrix" [K] ergibt sich zu:

$$> p := \text{map}(\text{int}, J(x), x = 0..1); \quad K := (1/2240)*\text{evalm}(2240*p);$$

$$K := \frac{1}{2240} \begin{bmatrix} -1455 y_3 + 4795 + 4539 y_2 & 1053 y_3 - 6753 - 4131 y_2 & 243 y_3 + 2481 - 567 y_2 & 159 y_3 - 523 + 159 y_2 \\ 1053 y_3 - 6753 - 4131 y_2 & 4131 y_3 + 9585 + 8505 y_2 & -4617 y_3 - 3699 - 4617 y_2 & -567 y_3 + 867 + 243 y_2 \\ 243 y_3 + 2481 - 567 y_2 & -4617 y_3 - 3699 - 4617 y_2 & 4131 y_2 + 8505 y_3 + 1971 & -4131 y_3 - 753 + 1053 y_2 \\ 159 y_3 - 523 + 159 y_2 & -567 y_3 + 867 + 243 y_2 & -4131 y_3 - 753 + 1053 y_2 & 4539 y_3 + 409 - 1455 y_2 \end{bmatrix}$$

```
> Inverse(K) := inverse(K);
```

Error, (in inverse) singular matrix

Die "Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch und singulär. Den "Lastvektor" {F} ermittelt man gemäß:

```
> Matrix_N := matrix(1,4,[N[1],N[2],N[3],N[4]]):
```

```
Lastvektor_F := - map(Int,Matrix_N,x=0..1);
```

$$\text{Lastvektor}_F := - \begin{bmatrix} \int_0^1 N_1 dx & \int_0^1 N_2 dx & \int_0^1 N_3 dx & \int_0^1 N_4 dx \end{bmatrix}$$

```
> q := -map(int,Matrix_N(x),x=0..1): Lastvektor_F := (1/8)*evalm(8*q);
```

$$\text{Lastvektor}_F := \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

```
>
```

Analog (29) können die Randbedingungen (2a,b), d.h. $y_1 = 1$ und $y_4 = 0$, in die Matrizengleichung (3) eingebaut werden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ F_2 - K_{21} \\ F_3 - K_{31} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (34)$$

woraus man unmittelbar die *reduzierte Matrixgleichung* mit $K_{32} = K_{23}$ ablesen kann:

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 - K_{21} \\ F_3 - K_{31} \end{Bmatrix}. \quad (35)$$

Darin sind die K_{ij} und F_i obigem Computeroutput zu entnehmen:

$$\left. \begin{aligned} K_{21} &\equiv (-6752 - 4131y_2 + 1053y_3)/2240, \\ K_{22} &\equiv (9585 + 8505y_2 + 4131y_3)/2240, \\ K_{23} &\equiv (-3699 + 4617y_2 + 4617y_3)/2240, \\ \hline K_{31} &\equiv (2481 - 567y_2 + 243y_3)/2240 \equiv K_{13}, \\ K_{32} &\equiv K_{23}, \\ K_{33} &\equiv (1971 + 4131y_2 + 8505y_3)/2240, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$F_2 = F_3 \equiv -3/8. \quad (37)$$

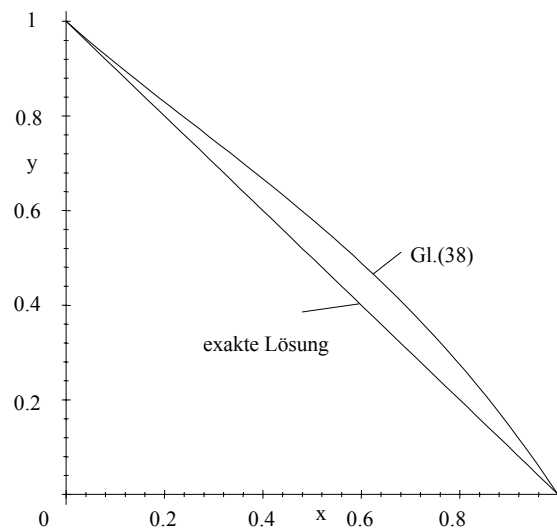
Da die unbekannten Knotenwerte y_2 und y_3 in (36) enthalten sind, stellt (35) eine **nichtlineare** Matrixengleichung dar, wie auch in (3) angedeutet.

Zur Lösung von (35) kann man *iterativ* vorgehen, indem man zunächst von Startwerten für y_2 und y_3 ausgeht und diese in (36) einsetzt. Damit kann (35) als lineares Gleichungssystem nach y_2 und y_3 aufgelöst werden. Der Vergleich dieser Werte mit den zunächst angenommenen gibt Aufschluss über die Notwendigkeit einer weiteren iterativen Verbesserung.

Nimmt man als Startwerte $y_2 = 1$ und $y_3 = 0$ an, also Werte, die mit den Randwerten $y_1 = 1$ und $y_4 = 0$ übereinstimmen und somit a priori einen schlechten Start darstellen, so folgen aus (35) die Werte $y_2 = 0,93$ und $y_3 = 0,82$. Eine etwas bessere Näherung erhält man, wenn man $y_2 = 3/4$ und $y_3 = 1/4$ in (36) einsetzt, womit aus (35) die Werte $y_2 = 0,722$ und $y_3 = 0,423$ folgen. Damit ergibt sich eine Lösungskurve

$$y = 1 - 0,909x + 0,3792x^2 - 0,4706x^3, \quad (38)$$

die immer noch zu stark von der exakten Lösung $y = 1 - x$ abweicht, wie im folgenden Bild dargestellt.



Geht man mit den Werten $y_2 = 2/3$ und $y_3 = 1/3$ in (36) ein, so folgen aus (35) dieselben Werte, d.h. die *exakten Knotenwerte* und damit auch die exakte Lösung $y = 1 - x$, wie der nachfolgende Computerausdruck zeigt. Zu beachten ist, dass im Computerprogramm die K_{ij} - und F_i -Werte aus (36) und (37) mit dem Faktor 2240 multipliziert wurden.

```
> K[21] := subs({y[2] = 2/3, y[3] = 1/3}, - 6753 - 4131*y[2] + 1053*y[3]);
      K21 := -9156
```

```

> K[22] := subs({y[2] = 2/3, y[3] = 1/3}, 9585 + 8505*y[2] + 4131*y[3]);
      K22 := 16632
> K[23] := subs({y[2] = 2/3, y[3] = 1/3}, -3699 - 4617*y[2] - 4617*y[3]);
      K23 := -8316
> K[31] := subs({y[2] = 2/3, y[3] = 1/3}, 2481 - 567*y[2] + 243*y[3]);
      K31 := 2184
> K[32] := subs({y[2] = 2/3, y[3] = 1/3}, -3699 - 4617*y[2] - 4617*y[3]);
      K32 := -8316
> K[33] := subs({y[2] = 2/3, y[3] = 1/3}, 1971 + 4131*y[2] + 8505*y[3]);
      K33 := 7560

> with(linalg):
> Matrix_K := matrix(2,2,[[K[22],K[23]], [K[23],K[33]]]);
      Matrix_K :=  $\begin{bmatrix} 16632 & -8316 \\ -8316 & 7560 \end{bmatrix}$ 
> Vektor_k := vector([-840 - K[21], -840 - K[31]]);
      Vektor_k := [ 8316, -3024 ]
> Y := linsolve(Matrix_K, Vektor_k);
      Y :=  $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ 

```

Das Ergebnis stimmt mit den angenommenen Werten von $y_2 = 2/3$ und $y_3 = 1/3$ überein. Damit ist das Ergebnis bestätigt, das mit der exakten Lösung übereinstimmt !

```

> N[1] := x-> 1-11*x/2+9*x^2-9*x^3/2;
      N1 :=  $x \rightarrow 1 - \frac{11}{2}x + 9x^2 - \frac{9}{2}x^3$ 
> N[2] := x-> 9*x-45*x^2/2+27*x^3/2;
      N2 :=  $x \rightarrow 9x - \frac{45}{2}x^2 + \frac{27}{2}x^3$ 
> N[3] := x-> -9*x/2+18*x^2-27*x^3/2;
      N3 :=  $x \rightarrow -\frac{9}{2}x + 18x^2 - \frac{27}{2}x^3$ 
> N[4] := x-> x+9*x^2/2+9*x^3/2;
      N4 :=  $x \rightarrow x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3$ 

```

```
> Y_ := N[1]*y[1] + N[2]*y[2] + N[3]*y[3] + N[4]*y[4];
      Y_ := N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4
```

Mit den Knotenwerten $y_1 = 1$, $y_2 = 2/3$, $y_3 = 1/3$, $y_4 = 0$ erhält man die Näherung:

```
> Y_ := N[1](x) + 2*N[2](x)/3 + N[3](x)/3;
      Y_ := 1 - x
```

die mit der exakten Lösung übereinstimmt !

>

Mit diesem MAPLE-Programm werden einige Iterationen durchgeführt, und zwar beginnend mit den sehr schlechten Startwerten von $y_2 = 1$ und $y_3 = 0$ für die zu ermittelnden Knotenwerte. Nach jedem Programmdurchlauf sind die y_2 - und y_3 -Werte in die Koeffizienten K_{ij} der *Steifigkeitsmatrix* $[K]$ erneut einzugeben. In jeder Schleife ermittelt das Programm auch einen neuen Verlauf $y = y(x)$. Die Ergebnisse dieser Iterationen sind in nachstehender Tabelle aufgelistet.

Anzahl der Iterationen n	Knotenwerte		Lösungskurve $y = y(x)$
	y_2	y_3	
0	1	0	$y = N_1 + N_2 = 1 + \frac{7}{2}x - \frac{27}{2}x^2 + 9x^3$
1	0,931	0,8175	$1 - 0,8x + 2,77x^2 - 2,97x^3$
2	0,6123	0,3301	$1 - 1,48x + 1,17x^2 - 0,69x^3$
3	0,649	0,297	$1 - 0,996x - 0,26x^2 + 0,252x^3$
4	0,672	0,335	$1 - 0,96x - 0,112x^2 + 0,067x^3$
5	0,668	0,337	$1 - 1,0003x + 0,023x^2 - 0,023x^3$
6	0,6665	0,33303	$1 - 0,99996x - 0,0021x^2 + 0,0021x^3$
exakt	2/3	1/3	$y = 1 - x$

Die in dieser Tabelle aufgelisteten Lösungskurven $y = y(x)$ sind im folgenden Bild grafisch dargestellt.

>

Darstellung der Lösungskurven $Y = Y(x)$ nach den einzelnen Iterationsschritten, beginnend mit den Startwerten $y_2 = 1$ und $y_3 = 0$, die mit den Randwerten $y_1 = 1$ und $y_4 = 0$ übereinstimmen.

```
> Y[1] := 1 - 0.799491*x + 2.76703*x^2 - 2.96754*x^3;
```

$$Y_1 := 1 - .799491 x + 2.76703 x^2 - 2.96754 x^3$$

```
> Y[3] := 1 - 0.9955*x - 0.2565*x^2 + 0.25196*x^3;
```

```


$$Y_3 := 1 - .9955 x - .2565 x^2 + .25196 x^3$$

>Y[5] := 1 - 1.0003*x + 0.0234*x^2 - 0.02313*x^3;

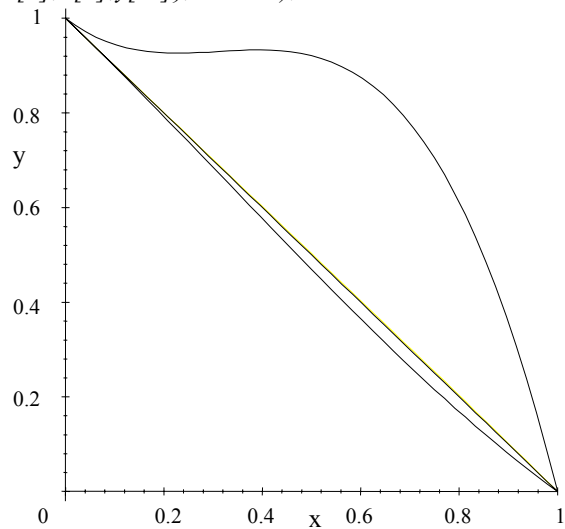
$$Y_5 := 1 - 1.0003 x + .0234 x^2 - .02313 x^3$$

>y[ex] := 1 - x;

$$y_{ex} := 1 - x$$

>plot({Y[1],Y[3],Y[5],y[ex]}, x = 0..1);

```



Benutzt man zum Start die Knotenwerte $y_2 = 3/4$ und $y_3 = 1/4$, so gelangt man schneller zum Ziel, wie folgende Tabelle zeigt.

Anzahl der Iterationen n	Knotenwerte		Lösungskurve $y = y(x)$
	y_2	y_3	
0	3/4	1/4	$1 + \frac{1}{8}x - \frac{27}{8}x^2 + \frac{9}{4}x^3$
1	0,7218	0,4234	$1 - 0,91x + 0,38x^2 - 0,47x^3$
2	0,6576	0,3384	$1 - 1,105x + 0,296x^2 - 0,19x^3$
3	0,6621	0,3256	$1 - 1,006x - 0,037x^2 + 0,043x^3$
4	0,6675	0,3329	$1 - 0,991x - 0,027x^2 + 0,017x^3$
5	0,6671	0,334	$1 - 0,999x + 0,003x^2 - 0,004x^3$
exakt	2/3	1/3	$y = 1 - x$

Ü 7.2.6

Die Lösung der *homogenen Dgl.* kann durch $A \sin x$ ausgedrückt werden, während der "inhomogene" Anteil in Form der *Störfunktion*, d.h. gemäß Bx , angesetzt wird. Damit erhält man unter Berücksichtigung der Randbedingungen (2a,b) die *exakte Lösung*

$$y_e = \sin(x)/\sin(1) - x. \quad (3)$$

Die Näherungslösungen sind dem folgende MAPLE-Output zu entnehmen.

> Differentialgleichung: $\text{diff}(y(x), x^2) + y + x = 0;$

> Randbedingungen: $y(0) = 0; \quad y(1) = 0;$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) + y + x = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 0$$

a) Näherungslösung mit einem eingliedrigen GALERKIN-Ansatz:

> $y[1] := c[1] * x * (1-x);$

$$y_1 := c_1 x (1-x)$$

Damit ergibt sich das Residuum aus der Differentialgleichung zu:

> $R[1] := \text{diff}(y[1], x^2) + y[1] + x;$

$$R_1 := -2 c_1 + c_1 x (1-x) + x$$

Als Wichtungsfunktion (Testfunktion /trial function) wird

> $w := x * (1-x);$

$$w := x (1-x)$$

in die " GALERKIN -Forderung" gemäß (7.111) eingesetzt:

> $\text{Int}(w * R[1], x = 0..1) = \text{int}(w * R[1], x = 0..1);$

$$\int_0^1 x (1-x) (-2 c_1 + c_1 x (1-x) + x) dx = -\frac{3}{10} c_1 + \frac{1}{12}$$

Dieses Integral muss nach (7.111) verschwinden, so dass sich die Konstante zu

> $c[1] := \text{solve}(1/12 - 3 * c[1]/10 = 0);$

$$c_1 := \frac{5}{18}$$

ergibt. Damit lautet der eingliedrige Näherungsansatz folgendermaßen:

> $y[1] := \text{subs}(c[1] = \text{"}, y[1]);$

$$y_1 := \frac{5}{18} x (1 - x)$$

Im Vergleich dazu ist die exakte Lösung durch

$$>y[ex] := \sin(x)/\sin(1) - x;$$

$$y_{ex} := \frac{\sin(x)}{\sin(1)} - x$$

gegeben.

b) Näherung mit einem zweigliedrigen GALERKIN -Ansatz:

$$>y[2] := x*(1-x)*(C[1] + C[2]*x);$$

$$y_2 := x(1-x)(C_1 + C_2 x)$$

Zur Bestimmung der beiden Konstanten werden zwei Wichtungsfunktionen benötigt:

$$>w[1] := x*(1-x); \quad w[2] := x^2*(1-x);$$

$$w_1 := x(1-x)$$

$$w_2 := x^2(1-x)$$

Das Residuum folgt mit dem Näherungsansatz aus der Differentialgleichung:

$$>R[2] := \text{diff}(y[2], x\$2) + y[2] + x;$$

$$R_2 := -2 C_1 - 4 C_2 x + 2(1-x) C_2 + x(1-x)(C_1 + C_2 x) + x$$

Mit den beiden Wichtungsfunktionen erhält man aus der Forderung (7.111) zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der beiden Konstanten:

$$>\text{Int}(w[1]*R[2], x=0..1) = \text{int}(w[1]*R[2], x=0..1);$$

$$\int_0^1 x(1-x) \left(-2 C_1 - 4 C_2 x + 2(1-x) C_2 + x(1-x)(C_1 + C_2 x) + x \right) dx = -\frac{3}{10} C_1 - \frac{3}{20} C_2 + \frac{1}{12}$$

$$>\text{Int}(w[2]*R[2], x=0..1) = \text{int}(w[2]*R[2], x=0..1);$$

$$\int_0^1 x^2(1-x) \left(-2 C_1 - 4 C_2 x + 2(1-x) C_2 + x(1-x)(C_1 + C_2 x) + x \right) dx = -\frac{3}{20} C_1 - \frac{13}{105} C_2 + \frac{1}{20}$$

Die Integrale müssen verschwinden, so dass man das folgende Gleichungssystem erhält:

$$>\text{with(linalg):}$$

$$>A*C = a;$$

$$A C = a$$

Darin ist $\{ C \}$ der gesuchte Lösungsvektor. Die Matrix $[A]$ und der Vektor $\{ a \}$ sind obigen Integralen zu entnehmen:

```
>A := matrix (2,2,[[3/10, 3/20], [3/20, 13/105]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{13}{105} \end{bmatrix}$$

```
>a := vector ([1/12, 1/20]);
```

$$a := \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

```
>C := linsolve(A,a);
```

$$C := \begin{bmatrix} \frac{71}{369} & \frac{7}{41} \end{bmatrix}$$

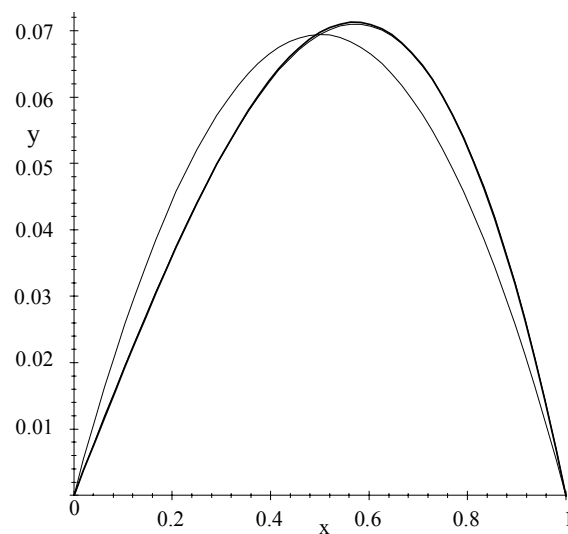
Damit lautet der zweigliedrige GALERKIN -Ansatz:

```
>y[2] := subs({C[1]=71/369,C[2]=7/41},y[2]);
```

$$y_2 := x(1-x) \left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x \right)$$

Im folgenden Bild sind die Ergebnisse mit Hilfe der MAPLE-Grafik dargestellt:

```
>plot({y[ex],y[1],y[2]}, x = 0..1);
```



Mann erkennt, dass sich der zweigliedrige Ansatz kaum von der exakten Lösung unterscheidet, während der eingliedrige Ansatz merkliche Unterschiede aufweist !

c) Ermittlung der “optimalen Kollokationspunkte“

Benutzt man das Kollokationsverfahren, so benötigt man bei einem n-gliedrigen Näherungsansatz mindestens n Kollokationspunkte, um die n Ansatzfreiwerte

bestimmen zu können. Man kann die Kollokationspunkte so wählen, dass man mit dem Kollokationsverfahren dieselben Ergebnisse erzielt wie beispielsweise nach dem GALERKIN-Verfahren. Dazu setzt man die nach dem GALERKIN-Verfahren gewonnenen Näherungen in die Ausgangsdifferentialgleichung ein und fordert, dass das Residuum verschwindet.

Eingliedriger Ansatz:

>y[1] := (5/18)*x*(1-x);

$$y_1 := \frac{5}{18} x (1 - x)$$

>fsolve(diff(y[1], x\$2) + y[1] + x = 0);

.4861642853, 4.113835715

Man erhält eine quadratische Gleichung. Von den beiden Lösungen liegt nur eine im betrachteten Bereich von $0 < x < 1$. Dieser Wert gibt die "optimale" Lage des Kollokationspunktes an.

Zweigliedriger Ansatz:

>y[2] := x*(1-x)*(71/369 + 7*x/41);

$$y_2 := x (1 - x) \left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41} x \right)$$

>fsolve(diff(y[2], x\$2) + y[2] + x = 0);

-1.161999941, .2955775064, .7394383078

Man erhält eine kubische Gleichung. Von den drei Lösungen liegen nur zwei im betrachteten Bereich von $0 < x < 1$. Diese Werte geben die "optimale" Lage der Kollokationspunkte an.

Ergänzung: Man kann auch eine größere Anzahl von Kollokationspunkten wählen als die Anzahl der zu bestimmenden Ansatzfreiwerte. Dann erhält man ein überbestimmtes Gleichungssystem. So könnte man beispielsweise für den zweigliedrigen Ansatz die drei Kollokationspunkte $X = 1/4$, $X = 1/2$ und $X = 3/4$ wählen. Diese willkürlich gewählten Werte setzt man in den Ansatz

>Y := X*(1-X)*(C[1] + C[2]*X);

$$Y := X (1 - X) (C_1 + C_2 X)$$

ein und erhält aus der Forderung (7.126) drei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Freiwerte:

> eqn[1] := subs(X = 1/4, diff(Y, X\$2) + Y + X = 0);

$$eqn_1 := -\frac{29}{16} C_1 + \frac{35}{64} C_2 + \frac{1}{4} = 0$$

eqn[2] := subs(X = 1/2, diff(Y, X\$2) + Y + X = 0);

$$eqn_2 := -\frac{7}{4}C_1 - \frac{7}{8}C_2 + \frac{1}{2} = 0$$

eqn[3] := subs(X = 3/4, diff(Y, X\$2) + Y + X = 0);

$$eqn_3 := -\frac{29}{16}C_1 - \frac{151}{64}C_2 + \frac{3}{4} = 0$$

Diese Gleichungen kann man in der Matrixform $[A] \cdot \{c\} = \{a\}$ schreiben, wenn man folgende Matrizen einführt.

>with(linalg):

>A := matrix(3,2,[[116, -35],[112, 56],[116, 151]]);

$$A := \begin{bmatrix} 116 & -35 \\ 112 & 56 \\ 116 & 151 \end{bmatrix}$$

>a := matrix(3,1,[[16],[32],[48]]);

$$a := \begin{bmatrix} 16 \\ 32 \\ 48 \end{bmatrix}$$

Multipliziert man die Matrizengleichung $[A] \cdot \{C\} = \{a\}$ von links mit der Transponierten von $[A]$, so erhält man eine neue Gleichung $[B] \cdot \{C\} = \{b\}$ mit folgenden Matrizen:

>B := multiply (transpose(A),A);

$$B := \begin{bmatrix} 39456 & 19728 \\ 19728 & 27162 \end{bmatrix}$$

>b := multiply (transpose(A),a);

$$b := \begin{bmatrix} 11008 \\ 8480 \end{bmatrix}$$

Damit kann der Lösungsvektor mit den beiden Konstanten ermittelt werden:

>C := linsolve(B,b);

$$C := \begin{bmatrix} \frac{7376}{38223} \\ \frac{16}{93} \end{bmatrix}$$

Der Näherungsansatz ergibt sich damit zu:

>Y := x*(1-x)*(7376/38223 + (16/93)*x);

$$Y := x(1-x) \left(\frac{7376}{38223} + \frac{16}{93}x \right)$$

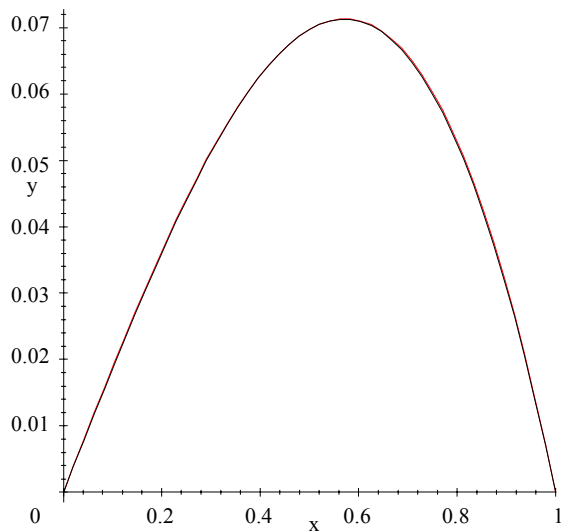
Die exakte Lösung lautet:

`>y[ex] := sin(x)/sin(1) - x;`

$$y_{ex} := \frac{\sin(x)}{\sin(1)} - x$$

Im folgenden Bild sind diese beiden Lösungen dargestellt.

`>plot({Y,y[ex]},x = 0..1);`



Die Näherung weicht nur im Rahmen der Strichstärke von der exakten Lösung ab !

Anmerkung: Zur experimentellen Bestimmung von Parametern führt man Messungen durch, deren Anzahl größer ist als die Anzahl der zu bestimmenden Parameter, um dadurch unvermeidbare Beobachtungsfehler auszugleichen. Die sich ergebenden Gleichungssysteme sind im Allgemeinen nicht exakt lösbar. Analog dazu führt auch die Wahl einer größeren Anzahl von Kollokationspunkten zu einem überbestimmten Gleichungssystem, wie oben erwähnt.

Nach dem *GAUSSschen Ausgleichsprinzip* (\rightarrow *Methode der kleinsten Quadrate*) wird das Quadrat der *EUKLIDischen Norm* $\{\mathbf{r}\}^t \{\mathbf{r}\}$ des *Residuenvektors* $\{\mathbf{r}\} := [\mathbf{A}]\{\mathbf{C}\} - \{\mathbf{a}\}$ minimiert (Ü 3.1.30). Das führt auf die *Normalengleichung* $[\mathbf{B}]\{\mathbf{C}\} = \{\mathbf{b}\}$. Darin ist die *GAUSSsche Transformation* $[\mathbf{B}] := [\mathbf{A}]^t[\mathbf{A}]$ eine *symmetrische positiv definite* Matrix, während der Spaltenvektor auf der rechten Seite durch $\{\mathbf{b}\} = [\mathbf{A}]^t\{\mathbf{a}\}$ gegeben ist, wie im obigen MAPLE-Programm dargestellt.

Im folgenden MAPLE-Output wird die L_2 -Fehlernorm (7.133) für die einzelnen Ansätze ermittelt.

>

Ermittlung der L_{zwei} - Fehlernormen für die einzelnen Näherungsfunktionen

>L_2 := sqrt(int(F(x)^2, x = 0..1));

$$L_2 := \sqrt{\int_0^1 F(x)^2 dx}$$

Darin ist $F(x)$ die Differenz aus der Näherungsfunktion und der exakten Lösung, d.h. der wahre Fehler.

a) eingliedriger GALERKIN-Ansatz

>F[1] := 5*x*(1-x)/18 - (sin(x)/sin(1) - x);

$$F_1 := \frac{5}{18} x (1-x) - \frac{\sin(x)}{\sin(1)} + x$$

>L_2[1] := evalf(sqrt(int(F[1](x)^2, x = 0..1)));

$$L_{2_1} := .005901082374$$

b) zweigliedriger GALERKIN -Ansatz

>F[2] := x*(1-x)*(71/369 + 7*x/41) - (sin(x)/sin(1) - x);

$$F_2 := x (1-x) \left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41} x \right) - \frac{\sin(x)}{\sin(1)} + x$$

>L_2[2] := evalf(sqrt(int(F[2](x)^2, x = 0..1)));

$$L_{2_2} := .0001897699346$$

c) zweigliedriger Ansatz und drei Kollokationspunkte ("*überbestimmte*" Kollokation)

>F[3] := x*(1-x)*(7376/38223 + 16*x/93) - (sin(x)/sin(1) - x);

$$F_3 := x (1-x) \left(\frac{7376}{38223} + \frac{16}{93} x \right) - \frac{\sin(x)}{\sin(1)} + x$$

>L_2[3] := evalf(sqrt(int(F[3](x)^2, x = 0..1)));

$$L_{2_3} := .0002379057546$$

>

Der zweigliedrige GALERKIN -Ansatz liefert die besten Ergebnisse. Die "*überbestimmte*" Kollokation ist etwas ungünstiger. Das liegt an der willkürlichen Wahl der drei Kollokationspunkte. Bei "optimaler" Lage erzielt man mit dem Kollokationsverfahren dieselbe Genauigkeit wie nach dem GALERKIN -Verfahren !

Ü 7.2.7

Diese Randwertaufgabe unterscheidet sich von Ü 7.2.6 durch die Randbedingung (2b). Die *exakte Lösung* kann ähnlich wie in Ü 7.2.6 leicht gefunden werden:

$$\boxed{y_{\text{ex}} = \sin(x)/\cos(1) - x} . \quad (3)$$

Zur Ermittlung der Näherungslösungen kann das MAPLE-Programm aus Ü 7.2.6 verwendet werden. Allerdings sind die *Wichtungsfunktionen* aufgrund der unterschiedlichen Randbedingungen abweichend von denen aus Ü 7.2.6. Man gewinnt sie folgendermaßen:

a) eingliedriger Ansatz

Man geht aus von dem Polynom

$$y_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (4)$$

und erhält daraus aufgrund der Randbedingungen (2a,b) den *eingliedrigen Ansatz*

$$\boxed{y_1 = a_1 x (1 - x/2)} \quad (5)$$

b) zweigliedriger Ansatz

Setzt man in das Polynom

$$y_2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (6)$$

die Randbedingungen (2a,b) ein, so gewinnt man den *zweigliedrigen Ansatz*

$$\boxed{y_2 = a_1 x \left(1 - \frac{1}{3} x^2\right) + a_2 x^2 \left(1 - \frac{2}{3} x\right)} \quad (7)$$

Die Ansätze (5), (7) und die entsprechenden *Wichtungsfunktionen* sind im folgenden MAPLE-Programm verwendet.

> Differentialgleichung: $\text{diff}(y(x), x^2) + y + x = 0;$
 > Randbedingungen: $y(0)=0; \text{diff}(y(x), x)(1)=0;$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) + y + x = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) (1) = 0$$

a) Näherungslösung mit einem eingliedrigen GALERKIN-Ansatz

> $y[1] := c[1] * x * (1 - x/2);$

$$y_1 := c_1 x \left(1 - \frac{1}{2} x\right)$$

Damit ergibt sich das Residuum aus der Differentialgleichung zu:

> $R[1] := \text{diff}(y[1], x^2) + y[1] + x;$

$$R_1 := -c_1 + c_1 x \left(1 - \frac{1}{2} x\right) + x$$

Als Wichtungsfunktion (Testfunktion / trial function) wird

$w := x(1-x/2);$

$$w := x \left(1 - \frac{1}{2} x \right)$$

in die "GALERKIN-Forderung" gemäß (7.111) eingesetzt:

$\text{Int}(w \cdot R[1], x=0..1) = \text{int}(w \cdot R[1], x=0..1);$

$$\int_0^1 x \left(1 - \frac{1}{2} x \right) \left(-c_1 + c_1 x \left(1 - \frac{1}{2} x \right) + x \right) dx = -\frac{1}{5} c_1 + \frac{5}{24}$$

Dieses Integral muss nach (7.111) verschwinden, so dass sich die Konstante zu

$c[1] := \text{solve}(5/24 - c[1]/5 = 0);$

$$c_1 := \frac{25}{24}$$

ergibt. Damit lautet der eingliedrige Ansatz folgendermaßen:

$y[1] := \text{subs}(c[1] = \text{"}, y[1]);$

$$y_1 := \frac{25}{24} x \left(1 - \frac{1}{2} x \right)$$

Im Vergleich dazu ist die exakte Lösung durch

$y[\text{ex}] := \sin(x)/\cos(1) - x;$

$$y_{\text{ex}} := \frac{\sin(x)}{\cos(1)} - x$$

gegeben.

b) Näherung mit einem zweigliedrigen Ansatz

$y[2] := C[1] \cdot x \cdot (1 - x^2/3) + C[2] \cdot x^2 \cdot (1 - 2x/3);$

$$y_2 := C_1 x \left(1 - \frac{1}{3} x^2 \right) + C_2 x^2 \left(1 - \frac{2}{3} x \right)$$

Zur Bestimmung der beiden Konstanten werden zwei Wichtungsfunktionen benötigt:

$w[1] := x \cdot (1 - x^2/3); \quad w[2] := x^2 \cdot (1 - 2x/3);$

$$w_1 := x \left(1 - \frac{1}{3} x^2 \right)$$

$$w_2 := x^2 \left(1 - \frac{2}{3} x \right)$$

Das Residuum folgt mit dem Näherungsansatz aus der Differentialgleichung:

>R[2]:=diff(y[2],x\$2)+y[2]+x;

$$R_2 := -2 C_1 x + 2 C_2 \left(1 - \frac{2}{3} x\right) - \frac{8}{3} C_2 x + C_1 x \left(1 - \frac{1}{3} x^2\right) + C_2 x^2 \left(1 - \frac{2}{3} x\right) + x$$

Mit den beiden Wichtungsfunktionen erhält man aus der Forderung (7.111) zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der beiden Konstanten:

>Int(w[1]*R[2],x=0..1)=int(w[1]*R[2],x=0..1);

$$\int_0^1 x \left(1 - \frac{1}{3} x^2\right) \left(-2 C_1 x + 2 C_2 \left(1 - \frac{2}{3} x\right) - \frac{8}{3} C_2 x + C_1 x \left(1 - \frac{1}{3} x^2\right) + C_2 x^2 \left(1 - \frac{2}{3} x\right) + x\right) dx = -\frac{20}{63} C_1 - \frac{59}{420} C_2 + \frac{4}{15}$$

>Int(w[2]*R[2],x=0..1)=int(w[2]*R[2],x=0..1);

$$\int_0^1 x^2 \left(1 - \frac{2}{3} x\right) \left(-2 C_1 x + 2 C_2 \left(1 - \frac{2}{3} x\right) - \frac{8}{3} C_2 x + C_1 x \left(1 - \frac{1}{3} x^2\right) + C_2 x^2 \left(1 - \frac{2}{3} x\right) + x\right) dx = -\frac{59}{420} C_1 - \frac{29}{315} C_2 + \frac{7}{60}$$

Die Integrale müssen verschwinden, so dass man das folgende Gleichungssystem erhält:

>with(linalg):

>A*C=a;

$$A C = a$$

Darin ist {C} der gesuchte Lösungsvektor. Die Matrix [A] und {a} sind obigen Integralen zu entnehmen:

>A:=matrix(2,2,[[20/63, 59/420],[59/420,29/315]]);

$$A := \begin{bmatrix} \frac{20}{63} & \frac{59}{420} \\ \frac{59}{420} & \frac{29}{315} \end{bmatrix}$$

>a:=vector([4/15, 7/60]);

$$a := \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & \frac{7}{60} \end{bmatrix}$$

>C:=linsolve(A,a);

$$C := \begin{bmatrix} \frac{1851}{2153} & \frac{-96}{2153} \end{bmatrix}$$

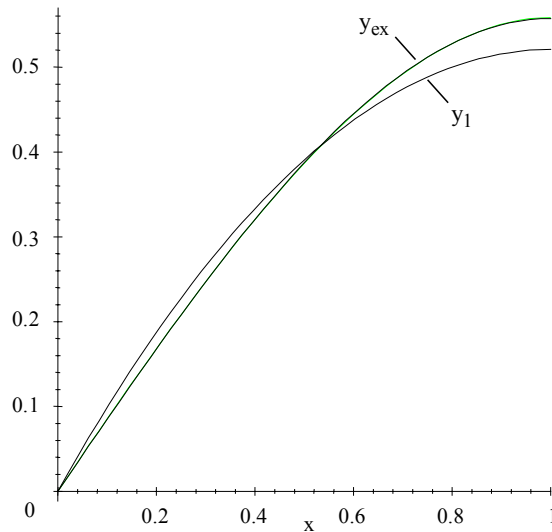
Damit lautet der zweigliedrige GALERKIN-Ansatz:

>y[2]:=subs({C[1]=1851/2153, C[2]=-96/2153}, y[2]);

$$y_2 := \frac{1851}{2153} x \left(1 - \frac{1}{3} x^2\right) - \frac{96}{2153} x^2 \left(1 - \frac{2}{3} x\right)$$

Im folgenden Bild sind die Ergebnisse mit Hilfe der MAPLE-Grafik dargestellt:

```
>plot({y[ex],y[1],y[2]},x=0..1);
```



Man erkennt, dass der eingliedrige Ansatz geringfügig von der exakten Lösung abweicht. Der zweigliedrige Ansatz unterscheidet sich von der exakten Lösung nur im Rahmen der Strichstärke!

c) Ermittlung der optimalen Kollokationspunkte

Man geht wie in Ü 7.2.6 vor, d.h., man setzt die nach dem GALERKIN-Verfahren gewonnenen Näherungen in die Ausgangsdifferentialgleichung ein und fordert, dass das Residuum verschwindet:

Eingliedriger Ansatz:

```
>y[1]:=25*x*(1-x/2)/24;
```

$$y_1 := \frac{25}{24}x \left(1 - \frac{1}{2}x\right)$$

```
>fsolve(diff(y[1],x$2)+y[1]+x=0);
```

```
.6029443637, 3.317055636
```

Man erhält eine quadratische Gleichung. Von den beiden Lösungen liegt nur eine im betrachteten Bereich von $0 < x < 1$. Dieser Wert gibt die "optimale" Lage des Kollokationspunktes an.

Zweigliedriger Ansatz:

```
>y[2]:=1851*x*(1-x^2/3)/2153 - 96*x^2*(1-2*x/3)/2153;
```

$$y_2 := \frac{1851}{2153}x \left(1 - \frac{1}{3}x^2\right) - \frac{96}{2153}x^2 \left(1 - \frac{2}{3}x\right)$$

```
>fsolve(diff(y[2],x$2)+y[2]+x=0);
```

```
-1.316351091, .3209493952, .8218031429
```

Man erhält eine kubische Gleichung. Von den drei Lösungen liegen nur zwei im betrachteten Bereich von $0 < x < 1$. Diese Werte geben die "optimale" Lage der Kollokationspunkte an.

Ergänzung: Man kann auch eine größere Anzahl von Kollokationspunkten wählen als erforderlich. Wie in Ü 7.2.6 sollen im Folgenden für den zweigliedrigen Ansatz die drei Kollokationspunkte $X=1/4$, $X=1/2$ und $X=3/4$ willkürlich gewählt werden. Diese setzt man in den Ansatz

```
>Y:=C[1]*X*(1-X^2/3)+C[2]*X^2*(1-2*X/3);
```

$$Y := C_1 X \left(1 - \frac{1}{3} X^2 \right) + C_2 X^2 \left(1 - \frac{2}{3} X \right)$$

ein und erhält aus der Forderung (7.126) drei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Freiwerte:

```
>eqn[1]:=subs(X=1/4, diff(Y,X$2)+Y+X=0);
```

$$eqn_1 := -\frac{49}{192} C_1 + \frac{101}{96} C_2 + \frac{1}{4} = 0$$

```
>eqn[2]:=subs(X=1/2, diff(Y,X$2)+Y+X=0);
```

$$eqn_2 := -\frac{13}{24} C_1 + \frac{1}{6} C_2 + \frac{1}{2} = 0$$

```
>eqn[3]:=subs(X=3/4, diff(Y,X$2)+Y+X=0);
```

$$eqn_3 := -\frac{57}{64} C_1 - \frac{23}{32} C_2 + \frac{3}{4} = 0$$

Diese Gleichungen kann man in der Matrixform $[A] * \{C\} = \{a\}$ schreiben, wenn man folgende Matrizen einführt:

```
>with (linalg):
```

```
>A:=matrix(3,2,[[49,-192*101/96],[192*13/24,-192/6],
```

```
> [192*57/64,192*23/32]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 49 & -202 \\ 104 & -32 \\ 171 & 138 \end{bmatrix}$$

```
>a:=matrix(3,1,[[192/4],[192/2],[3*192/4]]);
```

$$a := \begin{bmatrix} 48 \\ 96 \\ 144 \end{bmatrix}$$

Multipliziert man die Matrixgleichung $[A] \cdot \{C\} = \{a\}$ von links mit der Transponierten von $[A]$, so erhält man eine neue Gleichung $[B] \cdot \{C\} = \{b\}$ mit folgenden Matrizen:

`>B:=multiply(transpose(A),A);`

$$B := \begin{bmatrix} 42458 & 10372 \\ 10372 & 60872 \end{bmatrix}$$

`>b:=multiply(transpose(A),a);`

$$b := \begin{bmatrix} 36960 \\ 7104 \end{bmatrix}$$

Damit kann der Lösungsvektor mit den beiden Konstanten bestimmt werden:

`>C:=linsolve(B,b);`

$$C := \begin{bmatrix} 3778032 \\ 4300217 \\ -141888 \\ 4300217 \end{bmatrix}$$

`>C:=matrix(2,1,[[evalf(C[1,1])],[evalf(C[2,1])]]);`

$$C := \begin{bmatrix} .8785677560 \\ -.03299554418 \end{bmatrix}$$

Der Näherungsansatz ergibt sich damit zu:

`>Y:=(3778032/4300217)*x*(1-x^2/3)+(-141888/4300217)*x^2*(1-2*x/3);`

$$Y := \frac{3778032}{4300217} x \left(1 - \frac{1}{3} x^2 \right) - \frac{141888}{4300217} x^2 \left(1 - \frac{2}{3} x \right)$$

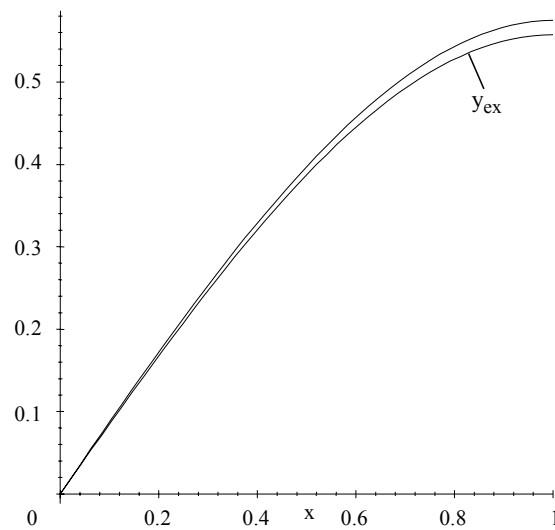
Die exakte Lösung lautet:

`>y[ex]:=sin(x)/cos(1)-x;`

$$y_{ex} := \frac{\sin(x)}{\cos(1)} - x$$

Im folgenden Bild sind diese beiden Lösungen grafisch dargestellt:

```
>plot({Y, y[ex]}, x=0..1);
```



Die Näherung weicht nur geringfügig von der exakten Lösung ab!

Ermittlung der L-zwei-Fehlernormen für die einzelnen Näherungsfunktionen:

```
>L_2:=sqrt(int(F(xi)^2,xi=0..1));
```

$$L_2 := \sqrt{\int_0^1 F(\xi)^2 d\xi}$$

Darin ist F die Differenz aus der Näherungsfunktion und der exakten Lösung d.h. der wahre Fehler.

a) eingliedriger GALERKIN- Ansatz

```
>F[1]:=25*x*(1-x/2)/24-(sin(x)/cos(1)-x);
```

$$F_1 := \frac{25}{24}x \left(1 - \frac{1}{2}x\right) - \frac{\sin(x)}{\cos(1)} + x$$

```
>L_2[1]:=evalf(sqrt(int(F[1]^2, x=0..1)));
```

$$L_{2_1} := .02027458118$$

b) zweigliedriger GALERKIN- Ansatz

```
>F[2]:=(1851/2153)*x*(1-x^2/3)-(96/2153)*x^2*(1-2*x/3)-(sin(x)/cos(1)-x);
```

$$F_2 := \frac{1851}{2153}x \left(1 - \frac{1}{3}x^2\right) - \frac{96}{2153}x^2 \left(1 - \frac{2}{3}x\right) - \frac{\sin(x)}{\cos(1)} + x$$

```
>L_2[2]:=evalf(sqrt(int(F[2]^2, x=0..1)));
```

$$L_{2_2} := .0005166538687$$

Der eingliedrige RITZ-Ansatz liefert bereits eine brauchbare Lösung.

c) "überbestimmte" Kollokation

> F[3]:=Y-y[ex];

$$F_3 := \frac{3778032x \left(1 - \frac{x^2}{3}\right)}{4300217} - \frac{141888x^2 \left(1 - \frac{2x}{3}\right)}{4300217} - \frac{\sin(x)}{\cos(1)} + x$$

> l_2[3]:=evalf(sqrt(int(F[3]^2, x=0..1)));

$$l_{_2_3} := 0.01103040018$$

>

Ü 7.2.8

Die Näherungsansätze sind gemäß

$$y(x) \approx \sum_{j=1}^n y_j N_j(x) \quad (4)$$

darstellbar. Darin sind n und $N_j(x)$ je nach Diskretisierung und Wahl des finiten Elementes entsprechend einzusetzen.

Im Sinne von GALERKIN sind in den Integralausdruck (7.111) die *Wichtungsfunktionen* $W_i(x) = N_i(x)$ einzusetzen:

$$\int_0^1 (y'' + y + x) N_i(x) dx \stackrel{!}{=} 0 \quad (5)$$

Um die „*Stetigkeitsanforderungen*“ an die Näherungsfunktionen zu reduzieren, kann in (5) zweckmäßigerweise das erste Integral partiell integriert werden:

$$\int_0^1 y'' N_i dx = y' N_i \Big|_0^1 - \int_0^1 y' N_i' dx \quad (6)$$

Außerdem kann darin die Randbedingung (2b) direkt berücksichtigt werden, so dass der integralfreie Term wegen $N_i(0) \equiv N_1 = 1$ durch

$$y' N_i \Big|_0^1 = -y'(0) \quad (7)$$

zu ersetzen ist. In Diesem Zusammenhang beachte man auch die Bemerkung in Ü 7.3.6 zum *RITZ-Verfahren*.

Mit dem Ansatz (4) erhält man aus (5) unter Berücksichtigung von (6) und (7) die Matrixgleichung

$$\boxed{[K]\{y\} = \{F\}} \quad (8)$$

Darin kann die *Steifigkeitsmatrix* $[K]$ folgendermaßen ermittelt werden:

$$[K] = [K_{ij}] \quad \text{mit} \quad K_{ij} := \int_0^1 (N_i' N_j' - N_i N_j) dx, \quad (9)$$

während der „Lastvektor“ $\{F\}$ gemäß

$$\{F\} = \{F_i\} \quad \text{mit} \quad F_i := \int_0^1 x N_i dx \quad (10)$$

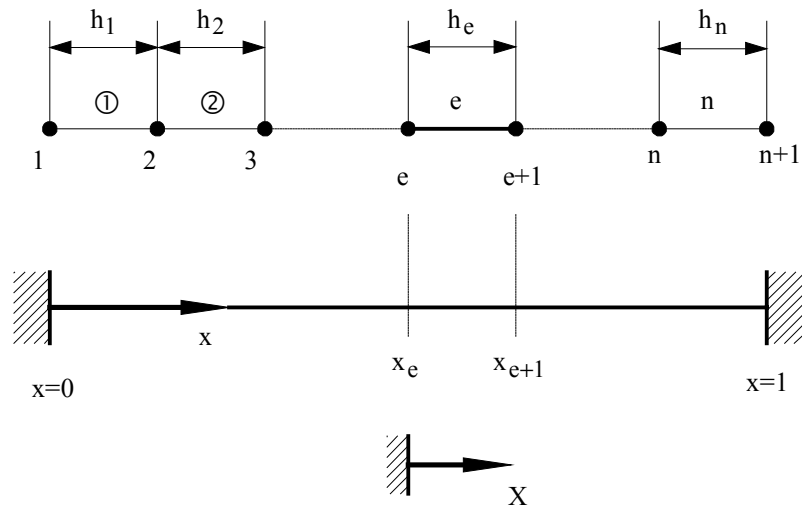
bestimmt wird. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die unbekannte Neigung (7) in F_1 eingeht,

$$F_1 = \int_0^1 x N_1 dx - y'(0), \quad (11)$$

und ähnlich wie eine Reaktionskraft aus dem Gleichungssystem (8) bestimmt werden kann, wie in den nachfolgenden Beispielen erläutert wird.

Zweckmäßigerweise geht man elementweise vor und baut die Randbedingungen (2a,b) und (11) zum Schluss in (8) ein.

In der nachstehenden Skizze ist der gesamte Bereich $0 \leq x \leq 1$ in n *finite Elemente* unterteilt, so dass $n+1$ *Knotenpunkte* zu betrachten sind.



In der Skizze sind die *globalen Koordinaten* durch x und die *lokalen Koordinaten* durch X gekennzeichnet. Der Zusammenhang $x = x(X)$ ist durch die *lineare Transformation*

$$\boxed{x = x_e + X} \quad (12)$$

gegeben. Für das *finite Element* „e“ gilt die Matrixgleichung

$$\boxed{\left[\mathbf{K}^{(e)} \right] \left\{ \mathbf{y}^{(e)} \right\} = \left\{ \mathbf{F}^{(e)} \right\}} \quad (13)$$

mit der „*Element-Steifigkeitsmatrix*“

$$\boxed{\mathbf{K}_{ij}^{(e)} := \int_{x_e}^{x_{e+1}} (N_i' N_j' - N_i N_j) dx} \quad \text{in globalen Koordinaten} \quad (14a)$$

$$\boxed{\mathbf{K}_{ij}^{(e)} := \int_0^{h_e} (N_i' N_j' - N_i N_j) dX} \quad \text{in lokalen Koordinaten} \quad (14b)$$

und dem „*Element-Lastvektor*“

$$\boxed{\mathbf{F}_i := \int_{x_e}^{x_{e+1}} x N_i(x) dx} \quad \text{in globalen Koordinaten} \quad (15a)$$

$$\boxed{\mathbf{F}_i := \int_0^{h_e} (x_e + X) N_i(X) dX} \quad \text{in lokalen Koordinaten} \quad (15b)$$

Die FEM-Beziehungen (14a,b) und (15a,b) gelten für die Differentialgleichung (1), wobei *lineare*, *quadratische* oder auch *kubische* (etc.) finite Elemente mit entsprechenden *Formfunktionen* N_i gewählt werden können.

a) Lineare finite Elemente

Die *linearen shape functions* lauten in *globalen Koordinaten*:

$$N_1^{(e)} = (x_{e+1} - x)/h_e, \quad N_2^{(e)} = (x - x_e)/h_e \quad (16a)$$

und in *lokalen Koordinaten*:

$$N_1 = 1 - X/h_e, \quad N_2 = X/h_e. \quad (16b)$$

Sie sind über die *lineare Transformation* (12) miteinander verknüpft.

Setzt man beispielsweise (16b) in (14b) ein, so erhält man unmittelbar die „*Steifigkeitsmatrix*“ des finiten Elementes „e“ zu:

$$\boxed{\left[\mathbf{K}^e \right] = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}. \quad (17)$$

Darin erinnert die erste Matrix an die Steifigkeitsmatrix (3.8) eines *Federelementes* bzw. an die Steifigkeitsmatrix (3.34) eines *Stabelementes* der Länge $h_e \equiv \ell$, während die zweite Matrix in (17) der *Massenmatrix* eines Stabelementes ähnlich

ist (Ü3.1.22). Die zweite Matrix in (17) kann bei feiner Diskretisierung (kleine h_e -Werte) gegenüber der ersten vernachlässigt werden.

Zur besseren Übersicht beim späteren Einbau in die Gesamtsteifigkeitsmatrix kann (17) in der Form

$$\begin{bmatrix} K^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (17^*)$$

mit den Abkürzungen

$$a \equiv \frac{3 - h_e^2}{3h_e} \quad \text{und} \quad b \equiv -\frac{6 + h_e^2}{6h_e} \quad (18a,b)$$

geschrieben werden.

Setzt man (16b) in (15b) ein, so erhält man unmittelbar den „Lastvektor“ für das finite Element „e“ zu:

$$\left\{ F^{(e)} \right\} = \frac{h_e}{6} \begin{Bmatrix} h_e + 3x_e \\ 2h_e + 3x_e \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

Bemerkenswert ist, dass der Lastvektor (19) von der Lage x_e eines finiten Elementes abhängt und somit für jedes finite Element unterschiedlich ist.

Bei einer Aufteilung in **zwei lineare** finite Elemente mit $h_e = 1/2$ lautet die Gesamtgleichung (8) mit (17*), (2) und (7):

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & 2a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 = 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} - y'(0) \\ F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

Darin haben a und b nach (18a,b) mit $h_e = 1/2$ die Werte

$$a = 11/6 \quad \text{und} \quad b = -25/12. \quad (21a,b)$$

Die Indizierung 1 bzw. 2 an F kennzeichnet jeweils den Anfangs- bzw. den Endknotenpunkt eines finiten Elementes, dessen Markierung in einer hochgestellten runden Klammer ausgedrückt ist. Aus (19) ermittelt man die einzelnen „Lastvektoren“ für die beiden finiten Elemente mit $h_e = 1/2$ zu:

$$\left\{ F^{(1)} \right\} \equiv \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad (22a)$$

$$\left\{ F^{(2)} \right\} \equiv \begin{Bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{Bmatrix} 1/2 + 3/2 \\ 1 + 3/2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix}. \quad (22b)$$

Diese „Lastvektoren“ sind an der Nahtstelle der beiden finiten Elemente gemäß $F_2^{(1)} + F_1^{(2)}$ zu überlappen, wie in (20) angedeutet. Somit geht (20) mit den Zahlenwerten (21a,b) und (22a,b) über in die Matrizengleichung

$$\begin{bmatrix} 44 & -50 & 0 \\ -50 & 88 & -50 \\ 0 & -50 & 44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 24y'(0) \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

aus der man die *reduzierte* Form

$$\begin{bmatrix} 88 & -50 \\ -50 & 44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (24)$$

abliest mit den Lösungen

$$\boxed{y_2 = 0,3746} \quad \text{und} \quad \boxed{y_3 = 0,5394} \quad (25a,b)$$

für die *Knotenwerte* $y_2 \equiv y(1/2)$ und $y_3 \equiv y(1)$. Die *exakten Werte* ermittelt man aus (3) zu:

$$\boxed{y_{\text{ex}}(1/2) = 0,3873} \quad \text{und} \quad \boxed{y_{\text{ex}}(1) = 0,5574}. \quad (26a,b)$$

Den genäherten *Knotenwert* (25a) setzt man in (23) ein zur Ermittlung der noch unbekannten *Anfangstangente*:

$$-50y_2 = 1 - 24y'(0) \Rightarrow \boxed{y'(0) = 0,822 \hat{=} 47,11^\circ} \quad (27)$$

$$\text{Der exakte Wert ist:} \quad \boxed{y'_{\text{ex}}(0) = 0,851 \hat{=} 48,75^\circ} \quad (28)$$

Aus (4) mit den Werten (25a,b) und mit (2a), d. h. $y_1 \equiv y(0) = 0$, und (16a) erhält man *elementweise* die *Näherungskurve* $y = y(x)$ in *globalen Koordinaten* zu:

$$\boxed{y(x) = N_2^{(1)}(x)y_2 = 0,7492x} \quad \text{in} \quad 0 \leq x \leq 1/2, \quad (29a)$$

$$\boxed{y(x) = N_1^{(2)}(x)y_2 + N_2^{(2)}(x)y_3 = 0,2098 + 0,3296x} \quad \text{in} \quad 1/2 \leq x \leq 1. \quad (29b)$$

Vergleicht man die *Knotenwerte* (25a,b) mit den exakten Werten (26a,b), so stellt man fest, dass sich trotz der *linearen Elemente* und der *großen Diskretisierung* geringe Fehler von **3,3%** bzw. **3,2%** ergeben. Ebenso weist der Vergleich von (27) und (28) nur einen Fehler von **3,4%** für die aus dem Gleichungssystem (23) ermittelte *Anfangstangente* auf. Im Gegensatz zu (27) liest man aus der *Näherungskurve* (29a) eine *Anfangstangente* von **0,7482 $\hat{=}$ 42,93°** ab, die vom exakten Wert (28) um **12%** abweicht. Diese starke Abweichung ist verständlich aufgrund der Annäherung der *Sinusform* (3) durch eine Sehne (29a).

Vergleicht man die beiden Näherungswerte für die Anfangstangente von **0,822** aus dem Gleichungssystem (23) und von **0,7492** aus der Geradengleichung (29a) untereinander, so stellt man eine Abweichung des schlechteren vom besseren Wert um **8,9%** fest. Diese Diskrepanz kann auch als Kriterium zur Beurteilung der Güte der Näherung und der Konvergenz herangezogen werden. Darüber hinaus ist zu bemerken, dass die Randbedingung (2b) durch eine lineare Näherungsfunktion wie (29b) nie erfüllt werden kann.

Um die „Diskrepanz“ von **8,9%** weiter abzubauen, ist eine feinere Diskretisierung vorzunehmen. Zur Erfüllung der Randbedingung (2b) für die Endtangente sind darüber hinaus *finite Elemente höherer Ordnung*, z. B. *quadratische Elemente*, zu verwenden, wie im Folgenden gezeigt wird.

Zunächst soll obiger Rechengang auf vier *lineare finite Elemente* ausgedehnt werden. Dann ist $h_e = 1/4$ in obigen Gleichungen einzusetzen. Die „*Steifigkeitsmatrix*“ in (20) vergrößert sich dann auf eine 5×5 Matrix mit den Zahlenwerten (18a,b) von

$$a = 47/12 \quad \text{und} \quad b = -97/24 \quad (30a,b)$$

gegenüber (21a,b). Dabei bleibt die Bandbreite $B = 3$ erhalten! Aus (19) ermittelt man mit $h_e = 1/4$ analog (22a,b) folgende „*Lastvektoren*“ für die vier einzelnen finiten Elemente:

$$\left\{ F^{(1)} \right\} \equiv \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{96} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad (31a)$$

$$\left\{ F^{(2)} \right\} \equiv \begin{Bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{Bmatrix} 1/4 + 3/4 \\ 1/2 + 3/4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{96} \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix}, \quad (31b)$$

$$\left\{ F^{(3)} \right\} \equiv \begin{Bmatrix} F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{Bmatrix} 1/4 + 6/4 \\ 1/2 + 6/4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{96} \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \end{Bmatrix}, \quad (31c)$$

$$\left\{ F^{(4)} \right\} \equiv \begin{Bmatrix} F_1^{(4)} \\ F_2^{(4)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{Bmatrix} 1/4 + 9/4 \\ 1/2 + 9/4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{96} \begin{Bmatrix} 10 \\ 11 \end{Bmatrix}. \quad (31d)$$

Diese „*Lastvektoren*“ sind an den Nahtstellen der einzelnen finiten Elemente zu überlappen. Somit erhält man mit (30a,b) und (31a,b,c,d) und unter Berücksichtigung von (7) in Erweiterung von (23) schließlich die Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} 376 & -388 & 0 & 0 & 0 \\ -388 & 752 & -388 & 0 & 0 \\ 0 & -388 & 752 & -388 & 0 \\ 0 & 0 & -388 & 752 & -388 \\ 0 & 0 & 0 & -388 & 376 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 = 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 96y'(0) \\ 6 \\ 12 \\ 18 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

aus der man die *reduzierte* Form

$$\begin{bmatrix} 752 & -388 & 0 & 0 \\ -388 & 752 & -388 & 0 \\ 0 & -388 & 752 & -388 \\ 0 & 0 & -388 & 376 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \\ 11 \end{bmatrix} \quad (33)$$

abliest mit den Lösungen

$$\boxed{y_2 = 0,2061} \quad \boxed{y_3 = 0,384} \quad \boxed{y_4 = 0,5072} \quad \boxed{y_5 = 0,5526}, \quad (34a,b,c,d)$$

die mit dem nachstehenden MAPLE-Programm ermittelt worden sind.

>with(linalg):

>A:=matrix(4,4,[[752, -388, 0, 0], [-388, 752, -388, 0], [0, -388, 752, -388],

> [0, 0, -388, 376]]);

$$A := \begin{bmatrix} 752 & -388 & 0 & 0 \\ -388 & 752 & -388 & 0 \\ 0 & -388 & 752 & -388 \\ 0 & 0 & -388 & 376 \end{bmatrix}$$

>a:=vector([6,12,18,11]);

$$a := [6 \quad 12 \quad 18 \quad 11]$$

>Y:=linsolve(A,a);

$$Y := \begin{bmatrix} \frac{39591551}{192100228} & \frac{36881759}{96050114} & \frac{97431549}{192100228} & \frac{26540255}{48025057} \end{bmatrix}$$

>y[2]:=evalf(Y[1]); y[3]:=evalf(Y[2]); y[4]:=evalf(Y[3]); y[5]:=evalf(Y[4]);

$$y_2 := .2060984071$$

$$y_3 := .3839845417$$

$$y_4 := .5071912200$$

$$y_5 := .5526334930$$

Im Vergleich zu (34a ÷ d) erhält man die exakten Werte aus (3) zu:

$$\boxed{y(1/4) = 0,2079} \quad \boxed{y(1/2) = 0,3873} \quad \boxed{y(3/4) = 0,5116} \quad \boxed{y(1) = 0,5574} \quad (35a,b,c,d)$$

Gegenüber den ersten Ergebnissen (25a,b), die mit Fehlern von **3,3%** und **3,2%** behaftet sind, weisen die verbesserten Werte (34b,d) nur noch Fehler von **0,85%** und **0,86%** auf.

Den genäherten *Knotenwert* (34a) setzt man in (32) ein zur Ermittlung der noch unbekannten *Anfangstangente*:

$$-388y_2 = 1 - 96y'(0) \Rightarrow \boxed{y'(0) = 0,8434 \hat{=} 48,32^\circ} . \quad (36)$$

Dieser Wert ist im Vergleich mit der exakten Lösung (28) mit einem Fehler von **0,89%** behaftet. Im Gegensatz dazu besitzt der zuerst ermittelte Wert (27) einen Fehler von **3,4%**.

Aus (4) mit den Werten (34a ÷ d) und (2a), d. h. $y_1 \equiv y(0) = 0$, und (16a) erhält man *elementweise* die Näherungskurve $y = y(x)$ in *globalen Koordinaten* zu:

$$\boxed{y(x) = N_2^{(1)}(x)y_2 = 0,8244x} \quad \text{in } 0 \leq x \leq 1/4 , \quad (37a)$$

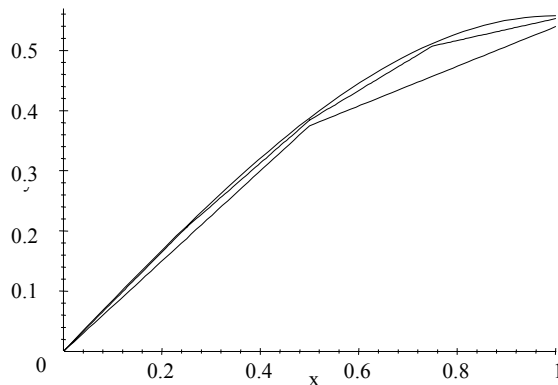
$$\boxed{y(x) = N_1^{(2)}(x)y_2 + N_2^{(2)}(x)y_3 = 0,028 + 0,7116x} \quad \text{in } 1/4 \leq x \leq 1/2 , \quad (37b)$$

$$\boxed{y(x) = N_1^{(3)}(x)y_3 + N_2^{(3)}(x)y_4 = 0,1376 + 0,4928x} \quad \text{in } 1/2 \leq x \leq 3/4 , \quad (37c)$$

$$\boxed{y(x) = N_1^{(4)}(x)y_4 + N_2^{(4)}(x)y_5 = 0,371 + 0,1816x} \quad \text{in } 3/4 \leq x \leq 1 . \quad (37d)$$

Vergleicht man die Näherungswerte für die Anfangstangenten von **0,8434** aus dem Gleichungssystem (32) und von **0,8244** aus der Geradengleichung (37a) miteinander, so stellt man eine Abweichung des zweiten Wertes vom ersten von **2,25%** fest, also immer noch eine „*Diskrepanz*“, jedoch schon eine deutliche Verbesserung im Vergleich zum entsprechenden Wert von **8,9%**, der aus einer Diskretisierung durch zwei lineare finite Elemente resultiert.

Die Näherungen (29a,b), (37a ÷ d) und die exakte Lösung (3) sind mit Hilfe der MAPLE-Grafik im nachstehenden Bild dargestellt.



b) Quadratische finite Elemente

Die *quadratischen shape functions* in lokalen Koordinaten können Ü3.1.23 entnommen werden:

$$N_1(X) = 1 - 3\frac{X}{h_e} + 2\left(\frac{X}{h_e}\right)^2, \quad N_2(X) = 4\frac{X}{h_e}\left(1 - \frac{X}{h_e}\right), \quad (38a,b)$$

$$N_3(X) = \frac{X}{h_e}\left(-1 + 2\frac{X}{h_e}\right). \quad (38c)$$

Durch Einsetzen der *linearen Transformation* (12) erhält man ihre Darstellung in *globalen Koordinaten*.

Die zwei Integrale in (14b) kann man unmittelbar den Übungen 3.2.12 und 3.1.22 entnehmen. So ist der erste Integralausdruck der in Ü3.2.12 ermittelten *Steifigkeitsmatrix* proportional:

$$\int_0^{h_e} N_i'(X) N_j'(X) dX = \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

während das zweite Integral in (14b) mit der in Ü3.1.23 gewonnenen *äquivalenten Massenmatrix* bis auf den Faktor ρA übereinstimmt:

$$\int_0^{h_e} N_i(X) N_j(X) dX = \frac{h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Analog (17*) erhält man mit (39) und (40) die „*Element-Steifigkeitsmatrix*“ (14b) zu:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{bmatrix} \quad (41)$$

mit den Abkürzungen

$$a \equiv \frac{35 - 2h_e^2}{15h_e}, \quad b \equiv \frac{40 + h_e^2}{15h_e}, \quad c \equiv \frac{10 + h_e^2}{30h_e}, \quad d \equiv \frac{8(10 - h_e^2)}{15h_e}. \quad (42a \div d)$$

Setzt man die *shape functions* (38a,b,c) in (15b) ein, so erhält man analog (19) den „*Lastvektor*“ für das *quadratische finite Element* „e“ zu:

$$\boxed{\{F^{(e)}\} = \frac{h_e}{6} \begin{bmatrix} x_e \\ 2h_e + 4x_e \\ h_e + x_e \end{bmatrix}}. \quad (43)$$

Zu beachten ist, dass der „Lastvektor“ (43) von der Lage x_e eines finiten Elementes abhängt und somit für jedes finite Element unterschiedlich ist.

Der Lastvektor (43) kann mit Hilfe der MAPLE-Software ermittelt werden, wie folgender Computerausdruck zeigt.

> with (linalg):

> Matrix_N:=matrix(1,3,[N[1],N[2],N[3]]);
 $Matrix_N := \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix}$

> J:=(x[e]+X)*(transpose(Matrix_N));

> F:=Int(evalm(J),X=0..h[e]);

$$F := \int_0^{h_e} \begin{bmatrix} (x_e + X) N_1 \\ (x_e + X) N_2 \\ (x_e + X) N_3 \end{bmatrix} dX$$

> N[1](X):= 1-3*X/h[e]+2*(X/h[e])^2;

$$N_1(X) := 1 - \frac{3X}{h_e} + \frac{2X^2}{h_e^2}$$

> N[2](X):=4*(X/h[e])*(1-X/h[e]);

$$N_2(X) := \frac{4X \left(1 - \frac{X}{h_e}\right)}{h_e}$$

> N[3](X):=(X/h[e])*(-1+2*X/h[e]);

$$N_3(X) := \frac{X \left(-1 + \frac{2X}{h_e}\right)}{h_e}$$

> J:=evalm((x[e]+X)*(transpose(Matrix_N(X))));

> F:=simplify(map(int, J,X=0..h[e]));

$$F := \begin{bmatrix} \frac{1}{6} x_e h_e \\ \frac{1}{3} h_e (h_e + 2 x_e) \\ \frac{1}{6} h_e (h_e + x_e) \end{bmatrix}$$

Falls der Gesamtbereich $0 \leq x \leq 1$ als Einzelement betrachtet wird, sind in (42a ÷ d) und (43) die Elementlänge $h_e = 1$ und die Lage $x_e = 0$ einzusetzen. Damit erhält man unter Berücksichtigung von (7) schließlich die Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} 66 & -82 & 11 \\ -82 & 144 & -82 \\ 11 & -82 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 = 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30y'(0) \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

aus der man die *reduzierte* Form

$$\begin{bmatrix} 144 & -82 \\ -82 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (45)$$

abliest mit den Lösungen

$$\boxed{y_2 = 0,3849} \quad \text{und} \quad \boxed{y_3 = 0,55396} \quad (46a,b)$$

für die *Knotenwerte* $y_2 \equiv y(1/2)$ und $y_3 \equiv y(1)$, die von den exakten Werten (26a,b) nur um jeweils **0,62%** abweichen und somit bedeutend günstiger sind als die Näherungen (25a,b).

Um die *Anfangstangente* $y'(0)$ zu bekommen, setzt man (46a,b) in (44) ein:

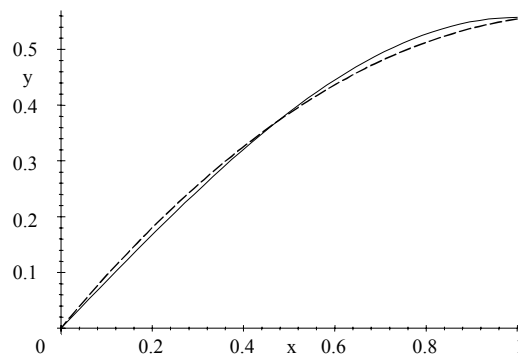
$$-82y_2 + 11y_3 = -30y'(0) \Rightarrow \boxed{y'(0) = 0,849 \hat{=} 48,64^\circ}. \quad (47)$$

Dieser Wert weicht von der exakten Anfangstangente (28) nur um **0,24%** ab und ist wesentlich besser als der Wert (27). Man vergleiche die Werte (46a,b) und (47) mit den entsprechenden Werten (35b,d) und (36). Man stellt fest, dass man mit *quadratischen shape functions* ohne Aufteilung des Gesamtbereichs $0 \leq x \leq 1$ in finite Elemente bessere Ergebnisse erzielt als mit *linearen shape functions* und einer Diskretisierung in vier finite Elemente.

Aus (4) mit den Werten (46a,b) und mit (2a), d. h. $y_1 \equiv y(0) = 0$, und den *shape functions* (38a,b,c) mit (12) erhält man die *Näherungskurve* $y = y(x)$ in globalen Koordinaten zu

$$\boxed{y = 0,9856x - 0,4317x^2}, \quad (48)$$

die im Vergleich mit der exakten Lösung (3) im folgenden Bild mit der MAPLE-Grafik dargestellt ist.



Das Bild zeigt, dass die Näherungskurve (gestrichelt gezeichnet) nicht zu stark von der exakten Lösung abweicht. Die *Knotenwerte* (46a,b) und auch die *Anfangstangente* (47) sind sehr zufriedenstellend, so dass sich eine Diskretisierung in zwei finite Elemente erübrigen könnte. Betrachtet man jedoch die *Endtangente* $y'(1)$, die sich aus der Näherung (48) zu $y'(1) = 0,12 \hat{=} 6,9^\circ$ ergibt und die vorgegebene Randbedingung (2b), d. h. $y'(1) = 0$, noch stark verletzt, so ist aufgrund dieser Abweichung eine feinere Diskretisierung vorzunehmen.

Wählt man **zwei** quadratische finite Elemente, so liegen **5** Knotenpunkte vor, so dass die „*Steifigkeitsmatrix*“ eine 5×5 Matrix wird. Die Abkürzungen (42a ÷ d) nehmen wegen $h_e = 1/2$ die Werte

$$a = 69/15, \quad b = -161/30, \quad c = 41/60, \quad d = 156/15 \quad (49a \div d)$$

an. Die einzelnen „*Lastvektoren*“ ergeben sich aus (43) zu:

$$\{F^{(1)}\} = \frac{1}{24} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \{F^{(2)}\} = \frac{1}{24} \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{Bmatrix}. \quad (50a,b)$$

Diese sind an der Nahtstelle der beiden finiten Elemente zu überlappen. Entsprechendes gilt für die Elementsteifigkeitsmatrix (41), mit der man durch Überlappung die *Gesamtsteifigkeitsmatrix* erzeugt:

$$[K] = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ b & d & b & 0 & 0 \\ c & b & 2a & b & c \\ 0 & 0 & b & d & b \\ 0 & 0 & c & b & a \end{bmatrix}. \quad (51)$$

In gleicher Weise baut man aus (50a,b) den „*Lastvektor*“ für die Gesamtstruktur zusammen:

$$\{F\} = \frac{1}{12} \{0 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 1\}^t. \quad (52)$$

Setzt man die Zahlenwerte (49a ÷ d) in (51) ein, so erhält man mit (52) unter Berücksichtigung von (7) schließlich die Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} 276 & -322 & 41 & 0 & 0 \\ -322 & 624 & -322 & 0 & 0 \\ 41 & -322 & 552 & -322 & 41 \\ 0 & 0 & -322 & 624 & -322 \\ 0 & 0 & 41 & -322 & 276 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 = 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -60y'(0) \\ 5 \\ 5 \\ 15 \\ 5 \end{Bmatrix}, \quad (53)$$

aus der man die reduzierte Gleichung

$$\begin{bmatrix} 624 & -322 & 0 & 0 \\ -322 & 552 & -322 & 41 \\ 0 & -322 & 624 & -322 \\ 0 & 41 & -322 & 276 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (54)$$

abliest mit den Lösungen

$$\boxed{y_2 = 0,2078 \mid y_3 = 0,3872 \mid y_4 = 0,5114 \mid y_5 = 0,5572} \quad (55a+d)$$

die mit dem nachstehenden MAPLE-Programm ermittelt worden sind.

>with(linalg):

>A:=matrix(4,4,[[624,-322, 0, 0], [-322, 552, -322, 41], [0, -322, 624, -322],

> [0, 41, -322, 276]]);

$$A := \begin{bmatrix} 624 & -322 & 0 & 0 \\ -322 & 552 & -322 & 41 \\ 0 & -322 & 624 & -322 \\ 0 & 41 & -322 & 276 \end{bmatrix}$$

>a:=vector([5,5,15,5]);

$$a := [5 \quad 5 \quad 15 \quad 5]$$

>Y:=linsolve(A,a);

$$Y := \begin{bmatrix} \frac{6849287}{32958532} & \frac{6380687}{16479266} & \frac{16853877}{32958532} & \frac{4591055}{8239633} \end{bmatrix}$$

>y[2]:=evalf(Y[1]); y[3]:=evalf(Y[2]); y[4]:=evalf(Y[3]); y[5]:=evalf(Y[4]);

$$y_2 := .2078152935$$

$$y_3 := .3871948544$$

$$y_4 := .5113661312$$

$$y_5 := .5571916856$$

Die *Knotenwerte* (55a + d) weichen nur geringfügig von den *exakten Werten* ab und sind wesentlich besser als die Werte (34a + d).

Um die Anfangstangente $y'(0)$ zu ermitteln, setzt man die Werte (55a,b) in (53) ein:

$$-322 y_2 + 41 y_3 = -60 y'(0) \Rightarrow \boxed{y'(0) = 0,8506 \hat{=} 48,74^\circ} \quad (56)$$

Dieser Wert stimmt mit dem exakten Wert (28) nahezu überein!

Aus (4) mit den Werten (55a ÷ d) und mit (2a), d. h. $y_1 \equiv y(0) = 0$, und den shape functions (38a,b,c) mit $X = x - x_e$ gemäß (12) erhält man *elementweise* die Näherungskurve $y = y(x)$ in *globalen Koordinaten* zu:

$$\boxed{y(x) = N_2^{(1)}(x)y_2 + N_3^{(1)}(x)y_3} \quad \text{in } 0 \leq x \leq 1/2, \quad (57a)$$

$$\boxed{y(x) = N_1^{(2)}(x)y_3 + N_2^{(2)}(x)y_4 + N_3^{(2)}(x)y_5} \quad \text{in } 1/2 \leq x \leq 1. \quad (57b)$$

Darin ermittelt man die $N_k^{(e)}$ für die beiden Elemente aus (38a) mit $X = x - x_e$ wegen $h_e = 1/2$ zu:

$$\left. \begin{aligned} N_1^{(1)}(x) &= 1 - 6x + 8x^2 \\ N_2^{(1)}(x) &= 8x(1 - 2x) \\ N_3^{(1)}(x) &= 2x(-1 + 4x) \end{aligned} \right\} \quad \text{in } 0 \leq x \leq 1/2, \quad (58a)$$

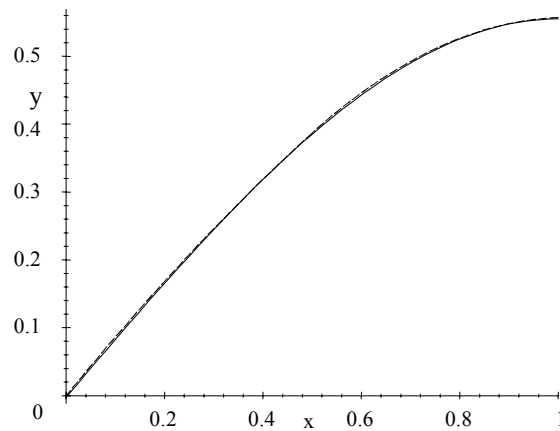
$$\left. \begin{aligned} N_1^{(2)}(x) &= 1 - 6\left(x - \frac{1}{2}\right) + 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ N_2^{(2)}(x) &= 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left[1 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] \\ N_3^{(2)}(x) &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left[-1 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] \end{aligned} \right\} \quad \text{in } 1/2 \leq x \leq 1. \quad (58b)$$

Mit diesen Funktionen und den Knotenwerten (55a ÷ d) erhält man schließlich die *Näherungskurven* (57a,b) zu:

$$\boxed{y = 0,8881x - 0,2275x^2} \quad \text{in } 0 \leq x \leq 1/2, \quad (59a)$$

$$\boxed{y = -0,0962 + 1,28x - 0,6268x^2} \quad \text{in } 1/2 \leq x \leq 1. \quad (59b)$$

In der folgenden MAPLE-Grafik erkennt man, dass die Näherungen (59a,b) nahezu mit der *exakten Lösung* (3) zusammenfallen. Die Unterschiede liegen im Rahmen der Strichstärke!



Aus (59a) liest man unmittelbar eine Anfangstangente von $y'(0) = 0,8881 \hat{=} 50,48^\circ$ ab, die sich von (56) um **3,6%** unterscheidet und vom exakten Wert (28) um **3,53%** abweicht. Die Tangente in $x = 1$ ermittelt man aus (59b) zu $y'(1) = 0,0266 \hat{=} 1,53^\circ$, d. h., die Randbedingung (2b) ist nur geringfügig verletzt!

Ü 7.2.9

Die gegebene Differentialgleichung ist vom EULERSchen Typ. Vermöge der *Substitution*

$$x = e^t, \quad y(e^t) = u(t), \quad y(x) = u(\ln x) \quad (3)$$

kann sie auf eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für $u(t)$ gebracht werden, die man geschlossen lösen kann. Dazu bilde man zunächst unter Beachtung von (3) folgende Ableitungen:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = y' e^t = x y', \quad (4a)$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d(xy')}{dx} \frac{dx}{dt} = (y' + x y'') e^t = x^2 y'' + x y'. \quad (4b)$$

Setzt man die Summe von (4a) und (4b) in (1) ein, so folgt unmittelbar die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für $u(t)$:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = 6e^t. \quad (5)$$

Die *homogene Lösung* erhält man mit dem Ansatz

$$u_h = Ae^{at} + B \quad (6a)$$

zu

$$u_h = ae^{-t} + B. \quad (6b)$$

Eine *partikuläre Lösung* erhält man mit Hilfe eines Ansatzes in Form der Störfunktion

$$u_p = Ce^t \Rightarrow C = 3 \Rightarrow u_p = 3e^t. \quad (7)$$

Mithin lautet die Lösung für $u(t)$:

$$u(t) = Ae^{-t} + B + 3e^t. \quad (8)$$

Darin wird die Substitution (3) wieder „rückgängig“ gemacht, so dass man schließlich die *exakte Lösung* gewinnt:

$$y_{\text{ex}}(x) = \frac{A}{x} + B + 3x. \quad (9a)$$

Mit den Randbedingungen (2) ergeben sich die Ansatzfreiwerte zu $A=6$ und $B=-9$, so dass (9a) in

$$\boxed{y_{\text{ex}} = -9 + 3x + 6/x} \quad (9b)$$

übergeht.

Alternativ kann die *exakte Lösung* (9b) auch folgendermaßen gefunden werden. Dazu bringt man die in der Aufgabenstellung gegebene Differentialgleichung

(1) auf die *selbstadjungierte Form* $(x^2 y')' = 6x$, aus der durch Integration $y' = 3 + A^*/x^2$ folgt. Eine weitere Integration führt unmittelbar auf $y = 3x - A^*/x + B^*$. Mit den Randbedingungen (2) ergeben sich die Ansatzfreiwerte zu $A^* = -6$ und $B^* = -9$, so dass damit die *exakte Lösung* (9b) folgt.

a) Näherungen nach der RITZ-Methode

Die gegebene Differentialgleichung (1) ist vom Typ (7.178) mit $a_1 = a_2'$, so dass ein *Variationsfunktional* (hinreichend) existiert, wie im Zusammenhang mit (7.184) näher erläutert wird.

Betrachtet man in Erweiterung von Ü5.1.4 das *Funktional*

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} [p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y] dx, \quad (10)$$

so ermittelt man die zugehörige *EULERSche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (11)$$

wegen

$$F := p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y \quad (12)$$

zu

$$\boxed{p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = f(x)} \quad (13)$$

Wählt man darin $p(x) = x^2$, $q(x) = 0$ und $f(x) = 6x$, so erhält man die gegebene Differentialgleichung (1). Mithin kann das Funktional (10) speziell gemäß

$$\boxed{J[y] = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12xy) dx} \quad (14)$$

angesetzt werden.

Darin setzt man den eingliedrigen Ansatz

$$y_1 = C_1(x-1)(x-2) = C_1(2-3x+x^2) \quad (15)$$

ein, der die homogenen Randbedingungen (2) erfüllt, so dass man $J(C_1)$ erhält:

$$J(C_1) = \int_1^2 \left[C_1^2 x^2 (2x-3)^2 + 12C_1(2x-3x^2+x^3) \right] dx. \quad (16)$$

Dieser Ausdruck ist bezüglich C_1 zu minimieren, d.h., es ist $\partial J / \partial C_1 = 0$ gemäß (7.21) zu fordern:

$$\frac{\partial J}{\partial C_1} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \int_1^2 \left[C_1(4x^4 - 12x^3 + 9x^2) + 6(x^3 - 3x^2 + 2x) \right] dx \stackrel{!}{=} 0 \quad (17)$$

Nach Integration findet man schließlich den „optimalen“ Ansatzfreiwert und die entsprechende *erste Näherung*:

$$C_1 = 15/8 \Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{15}{8}(x-1)(x-2)}. \quad (18)$$

Ein *zweigliedriger Ansatz* (7.22b) ist unter Berücksichtigung der *homogenen Randbedingungen* (2) durch

$$y_2 = (x-1)(x-2)(C_1 + C_2 x) \quad (19)$$

gegeben. Damit geht das *Funktional* (14) in eine *Funktion* (7.20) über, aus der man aufgrund der Forderungen (7.21) zwei Gleichungen zur Bestimmung der Ansatzfreiwerte C_1 und C_2 erhält:

$$\frac{\partial J(C_1, C_2)}{\partial C_1} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 \left(x^2 y_2' \frac{\partial y_2'}{\partial C_1} + 6x \frac{\partial y_2}{\partial C_1} \right) dx \stackrel{!}{=} 0, \quad (20a)$$

$$\frac{\partial J(C_1, C_2)}{\partial C_2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 \left(x^2 y_2' \frac{\partial y_2'}{\partial C_2} + 6x \frac{\partial y_2}{\partial C_2} \right) dx \stackrel{!}{=} 0. \quad (20b)$$

Darin sind aufgrund von (19) folgende Ausdrücke einzusetzen:

$$y_2' = C_1(2x - 3) + C_2(3x^2 - 6x + 2), \quad (21)$$

$$\partial y_2 / \partial C_1 = x^2 - 3x + 2, \quad \partial y_2 / \partial C_2 = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad (22a,b)$$

$$\partial y_2' / \partial C_1 = 2x - 3, \quad \partial y_2' / \partial C_2 = 3x^2 - 6x + 2 \quad (23a,b)$$

einsetzen:

$$C_1 \int_1^2 x^2 (2x - 3)^2 dx + C_2 \int_1^2 x^2 (2x - 3)(3x^2 - 6x + 2) dx = -6 \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx,$$

$$\begin{aligned} C_1 \int_1^2 x^2 (3x^2 - 6x + 2)(2x - 3) dx + C_2 \int_1^2 x^2 (3x^2 - 6x + 2)^2 dx = \\ = 6 \int_1^2 (x^4 - 3x^3 + 2x^2) dx. \end{aligned}$$

Nach Integration erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 4/5 & 13/10 \\ 13/10 & 233/105 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3/2 \\ 23/10 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

mit der Lösung

$$C_1 = 711/179 = 3,9721, \quad C_2 = -231/179 = -1,291. \quad (25a,b)$$

Damit lautet der zweigliedrige Näherungsansatz:

$$\boxed{y_2 = (x - 1)(x - 2) \left(\frac{711}{179} - \frac{231}{179} x \right)}. \quad (26)$$

Die Auswertung der obigen Integrale und die Lösung des Gleichungssystems (24) kann bequem mit Hilfe der MAPLE-Software erfolgen, wie nachstehender Computerausdruck zeigt.

Darüber hinaus sind die Näherungen (18), (26) und die exakte Lösung (9b) mit Hilfe der MAPLE-Grafik dargestellt.

```
>Int(x^2*(2*x-3)^2, x=1..2)=int(x^2*(2*x-3)^2,x=1..2);
```

$$\int_1^2 x^2 (2x - 3)^2 dx = \frac{4}{5}$$

```
>Int(x^2*(2*x-3)*(3*x^2-6*x+2),x=1..2)=int(x^2*(2*x-3)*(3*x^2-6*x+2),
> x=1..2);
```

$$\int_1^2 x^2 (2x - 3) (3x^2 - 6x + 2) dx = \frac{13}{10}$$

```
>Int(x^2*(3*x^2-6*x+2)^2,x=1..2)=int(x^2*(3*x^2-6*x+2)^2,x=1..2);
```

$$\int_1^2 x^2 (3x^2 - 6x + 2)^2 dx = \frac{233}{105}$$

```
>-6*Int(x^3-3*x^2+2*x,x=1..2)=-6*int(x^3-3*x^2+2*x,x=1..2);
```

$$-6 \int_1^2 x^3 - 3x^2 + 2x dx = \frac{3}{2}$$

```
>-6*Int(x^4-3*x^3+2*x^2,x=1..2)=-6*int(x^4-3*x^3+2*x^2,x=1..2);
```

$$-6 \int_1^2 x^4 - 3x^3 + 2x^2 dx = \frac{23}{10}$$

```
>with(linalg):
```

```
>A:=matrix(2,2,[[4/5,13/10],[13/10,233/105]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{13}{10} \\ \frac{13}{10} & \frac{233}{105} \end{bmatrix}$$

```
>a:=vector([3/2,23/10]);
```

$$a := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{23}{10} \end{bmatrix}$$

```
>C:=linsolve(A,a);
```

$$C := \begin{bmatrix} \frac{711}{179} & \frac{-231}{179} \end{bmatrix}$$

```
>C[1]:=711/179=evalf(711/179); C[2]:=-231/179=evalf(-231/179);
```

$$C_1 := \frac{711}{179} = 3.972067039$$

$$C_2 := \frac{-231}{179} = -1.290502793$$

$$>y[2]:=(x-1)*(x-2)*(C[1]+C[2]*x);$$

$$y_2 := (x-1)(x-2)\left(\frac{711}{179} - \frac{231}{179}x\right) = (x-1)(x-2)(3.972067039 - 1.290502793x)$$

$$>y[1]:=15*(x-1)*(x-2)/8;$$

$$y_1 := \frac{15}{8}(x-1)(x-2)$$

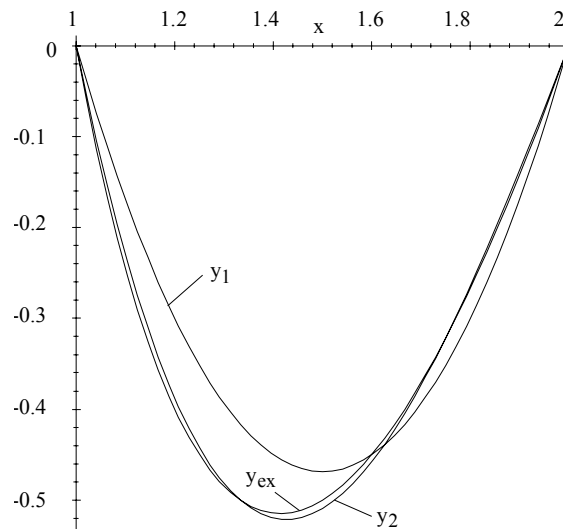
$$>y[2]:=(x-1)*(x-2)*(711/179-231*x/179);$$

$$y_2 := (x-1)(x-2)\left(\frac{711}{179} - \frac{231}{179}x\right)$$

$$>y[ex]:=-9+3*x+6/x;$$

$$y_{ex} := -9 + 3x + 6\frac{1}{x}$$

$$>\text{plot}(\{y[1],y[2],y[ex]\},x=1..2);$$



Die Ermittlung der Ansatzfreiwerte C_1 und C_2 kann direkter erfolgen, indem die Integrale (20a,b) mit der Näherung (19) im Computerprogramm eingebaut werden, wie der folgende MAPLE-Output zeigt

```
>y[2]:=x->(x-1)*(x-2)*(C[1]+C[2]*x);
```

$$y_2 := x \rightarrow (x-1)(x-2)(C_1 + C_2 x)$$

```
>solve({int(x^2*diff(y[2](x),x)*diff(diff(y[2](x),x),C[1])+6*x*diff(y[2](x),C[1]),
```

```
> x=1..2)=0,int(x^2*diff(y[2](x),x)*diff(diff(y[2](x),x),C[2])+6*x*diff(y[2](x),
```

```
> C[2]),x=1..2)=0},{C[1],C[2]});
```

$$\left\{ C_2 = -\frac{231}{179}, C_1 = \frac{711}{179} \right\}$$

b) Näherungen nach dem GALERKIN-Verfahren

Setzt man den *eingliedrigen Näherungsansatz* (15) in die gegebene Differentialgleichung (1) ein, so erhält man das *Residuum*

$$R(x) = 6C_1x(x-1) - 6x. \quad (27)$$

Die Verfahren der *gewichteten Residuen* fordern, dass der Integralausdruck (7.111), bzw. im vorliegenden Fall das Integral

$$\int_1^2 W_1(x) R(x) dx \stackrel{!}{=} 0 \quad (28)$$

verschwindet. Darin kann die *Wichtungsfunktion* W_1 beim *GALERKIN-Verfahren* unmittelbar dem Ansatz (15) entnommen werden:

$$W_1(x) := (x-1)(x-2). \quad (29)$$

Setzt man (27) und (29) in (28) ein, so erhält man unmittelbar den Ansatzfreiwert $C_1 = 15/8$, der mit dem Wert in (18) übereinstimmt.

Setzt man den *zweigliedrigen Ansatz* (19) in die gegebene Differentialgleichung (1) ein, so ergibt sich das *Residuum* zu:

$$R(x) = 6C_1(x^2 - x) + 2C_2(6x^3 - 9x^2 + 2x) - 6x. \quad (30)$$

Zur Bestimmung der beiden Ansatzfreiwerte C_1 und C_2 werden in (7.111) zwei *Wichtungsfunktionen* benötigt, die man unmittelbar dem zweigliedrigen Ansatz (19) entnimmt:

$$W_1 := (x-1)(x-2) \quad \text{und} \quad W_2 := (x-1)(x-2)x. \quad (31a,b)$$

Damit sind folgende Integrale auszuwerten:

$$\int_1^2 W_1(x) R(x) dx \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad \int_1^2 W_2(x) R(x) dx \stackrel{!}{=} 0. \quad (32a,b)$$

Man erhält daraus die Ansatzfreiwerte C_1 und C_2 , die mit den nach dem *RITZ-Verfahren* ermittelten Werten (25a,b) übereinstimmen, wie das nachfolgende MAPLE-Programm zeigt.

```
>R:=x->6*C[1]*(x^2-x)+2*C[2]*(6*x^3-9*x^2+2*x)-6*x;
```

$$R := x \rightarrow 6 C_1 (x^2 - x) + 2 C_2 (6 x^3 - 9 x^2 + 2 x) - 6 x$$

```
>w[1]:=x->(x-1)*(x-2); w[2]:=x->(x-1)*(x-2)*x;
```

$$w_1 := x \rightarrow (x - 1) (x - 2)$$

$$w_2 := x \rightarrow (x - 1) (x - 2) x$$

```
>solve({int(w[1](x)*R(x),x=1..2)=0, int(w[2](x)*R(x),x=1..2)=0}, {C[1],C[2]});
```

$$\left\{ C_2 = \frac{-231}{179}, C_1 = \frac{711}{179} \right\}$$

Allgemein gilt, dass für *selbstadjungierte* gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung beide Verfahren (RITZ und GALERKIN) identische Näherungen liefern.

Ergänzung: Das *GALERKIN-Verfahren* hat den Vorteil, dass man auf ein *Funktional* nicht angewiesen ist. Falls ein Funktional existiert (Ziffer 7.3), kann man durch Erraten und Probieren fündig werden, wie die Gleichungen (10) bis (14) zeigen.

Bisweilen führt auch folgender Weg zum Ziel. Es sei

$$L(y) - f(x) = 0 \quad (33)$$

eine Differentialgleichung mit L als *Differentialoperator* (Ziffer 7.2 / 7.3). Man multipliziere (33) mit der ersten Variation δy und fordere:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta y [L(y) - f(x)] dx \stackrel{!}{=} 0. \quad (34)$$

Anschließend schreibe man das Variationszeichen außerhalb des Integralzeichens:

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} [L^*(y) - f(x)] dx \stackrel{!}{=} 0. \quad (35)$$

Darin ist L^* ein neuer Operator. Von (35) würde man auf das gesuchte Funktional

$$J[x] = \int_{x_1}^{x_2} [L^*(y) - f(x)y] dx \quad (36)$$

schließen mit $\delta J[y] = 0$.

Die gegebene Differentialgleichung (1) kann auf die Form

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = 6x \quad (37)$$

gebracht werden mit einem Operator

$$L = \left(\frac{d}{dx} x^2 \frac{d}{dx} \right), \quad (38)$$

der *selbstadjungiert* ist (Ziffer 7.2 und Ü7.2.10).

Nach obigen Überlegungen [(33) bis (36)] fordere man

$$\int_1^2 \left[\delta y \left(\frac{d}{dx} x^2 \frac{dy}{dx} \right) - 6x \delta y \right] dx \stackrel{!}{=} 0. \quad (39)$$

Darin wird der erste Term *partiell integriert*:

$$\left(\delta y \right) x^2 \frac{dy}{dx} \Big|_1^2 - \int_1^2 \left[\left(\delta \frac{dy}{dx} \right) x^2 \frac{dy}{dx} + 6x \delta y \right] dx \stackrel{!}{=} 0. \quad (40)$$

Bei diesem Übergang wurden *Differentiation* und *Variation* vertauscht, $\frac{d}{dx}(\delta y) = \delta \frac{dy}{dx}$, gemäß (5.15a). An den Randpunkten gilt (5.14) bzw. $\delta y = 0$, so dass der integralfreie Term in (40) verschwindet. Benutzt man darüber hinaus noch die Umformung

$$\delta \left(\frac{dy}{dx} x^2 \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{dx} x^2 \delta \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} x^2 \delta \frac{dy}{dx} = 2 \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) x^2 \frac{dy}{dx}, \quad (41)$$

wobei gemäß Bild 5.2 die *Variation* nur auf y und dy/dx wirkt, nicht jedoch auf x^2 , so geht (40) über in:

$$\int_1^2 \left[\frac{1}{2} \delta \left(\frac{dy}{dx} x^2 \frac{dy}{dx} \right) + 6x \delta y \right] dx \stackrel{!}{=} 0 \quad (42a)$$

bzw. in:

$$\boxed{\int_1^2 \left[x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 12xy \right] dx \stackrel{!}{=} 0} . \quad (42b)$$

Wegen $\delta J[y] \stackrel{!}{=} 0$ gemäß (5.19) entnimmt man (42b) unmittelbar das gesuchte *Funktional* (14).

Alternativ zu (14) kann auch das *Funktional*

$$\boxed{J[y] = \int_1^2 \left[(x^2 y'' + 2xy')y - 12xy \right] dx} \quad (43)$$

zugrunde gelegt werden. Zur Kontrolle wende man auf (43) die *EULERSche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0 \quad (5.27)$$

an, die wegen

$$F = (x^2 y'' + 2xy')y - 12xy \quad (44)$$

unmittelbar auf die gegebene Differentialgleichung (1) führt!

Setzt man beispielsweise den *eingliedrigen Ansatz* (15) mit (29), d.h. $y_1 = C_1 W_1$, in (43) ein und fordert $\partial J / \partial C_1 = 0$, so erhält man den Integralausdruck

$$\boxed{\int_1^2 (x^2 C_1 W_2'' + 2x C_1 W_1' - 6x) W_1 dx \stackrel{!}{=} 0} \quad (45a)$$

bzw.

$$\boxed{\int_1^2 (x^2 y_1'' + 2xy_1' - 6x) W_1 dx \stackrel{!}{=} 0.} \quad (45b)$$

Man erkennt, dass (45b) mit $\int_1^2 W_1 R dx \stackrel{!}{=} 0$ übereinstimmt, d.h., das *RITZ-Verfahren*

(45b) liefert dieselben Ergebnisse wie das *GALERKIN-Verfahren*. Wertet man (45a) aus, so erhält man in Übereinstimmung mit (18) den Wert $C_1 = 15/8$.

Abschließend sei noch erwähnt, dass man nach dem *Kollokationsverfahren* (Ziffer 7.2) dieselben Ergebnisse erzielen kann wie nach der *Variationsmethode* und dem *GALERKIN-Verfahren*, wenn man nur die „optimalen“ *Kollokationspunkte* wählt. Diese findet man einfach dadurch, dass man die *GALERKINSchen* Parameter

$C_1 = 711/179$ und $C_2 = -231/179$ in das Residuum (30) einsetzt und $R = 0$ fordert. Das führt auf eine kubische Gleichung mit drei reellen Lösungen. Zwei dieser Lösungen liegen im betrachteten Bereich $1 \leq x \leq 2$, wie das nachstehende MAPLE-Programm zeigt.

```
>R:=x->6*(711/179)*(x^2-x)+2*(-231/179)*(6*x^3-9*x^2+2*x)-6*x;
```

$$R := x \rightarrow \frac{8424}{179}x^2 - \frac{6264}{179}x - \frac{2772}{179}x^3$$

```
>solve(R(x)=0,x);
```

$$0, \frac{117}{77} - \frac{1}{13783} \sqrt{9323931}, \frac{117}{77} + \frac{1}{13783} \sqrt{9323931}$$

```
>X[1]:=evalf(117/77-sqrt(9323931)/13783);
```

$$X_1 := 1.297938673$$

```
>X[2]:=evalf(117/77+sqrt(9323931)/13783);
```

$$X_2 := 1.741022365$$

>

Ü 7.2.10

Der Operator L heißt *selbstadjungiert* oder *symmetrisch*, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

$$(v, Lu) = (u, Lv) \quad (7.145a)$$

bzw.

$$\int_0^1 v Lu \, dx = \int_0^1 u Lv \, dx \quad (7.145b)$$

a) Für den Operator $L = \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} \right)$ gilt:

$$(v, Lu) = \int_0^1 v \left[\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{du}{dx} \right) \right] dx \quad (1)$$

Die *partielle Integration* führt auf:

$$(v, Lu) = \left. vx^2 \frac{du}{dx} \right|_0^1 - \int_0^1 x^2 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad (2)$$

Durch Vertauschen von u und v geht (2) über in :

$$(u, Lv) = \left. ux^2 \frac{dv}{dx} \right|_0^1 - \int_0^1 x^2 \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx \quad (3)$$

Da die Integrale in (2) und (3) übereinstimmen, folgt:

$$(v, Lu) = (u, Lv) + \left[vx^2 \frac{du}{dx} - ux^2 \frac{dv}{dx} \right]_0^1. \quad (4)$$

Darin verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite, da die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ dieselben Randbedingungen erfüllen. Somit ist die Eigenschaft (7.145a) nachgewiesen.

b) Für den Operator $L = \frac{d^2}{dx^2} \left[g(x) \frac{d^2}{dx^2} \right]$ gilt:

$$(v, Lu) = \int_0^1 v \left[\frac{d^2}{dx^2} g(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right] dx. \quad (5)$$

Durch *partielle Integration* folgt:

$$(v, Lu) = \left\{ v \frac{d}{dx} \left[g(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right] \right\}_0^1 - \int_0^1 \frac{dv}{dx} \frac{d}{dx} \left[g(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right] dx. \quad (6)$$

Eine weitere *partielle Integration* führt auf:

$$(v, Lu) = \left\{ v \frac{d}{dx} \left[g(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right] - g(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{dv}{dx} \right\}_0^1 + \int_0^1 g(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx. \quad (7)$$

Durch Vertauschen von u und v in (7) erhält man analog:

$$(u, Lv) = \left\{ u \frac{d}{dx} \left[g(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right] - g(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{du}{dx} \right\}_0^1 + \int_0^1 g(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 u}{dx^2} dx. \quad (8)$$

Da die Integrale (7) und (8) übereinstimmen, ist die Eigenschaft (7.145a) der *Selbstadjungiertheit* nachgewiesen, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\left\{ v(gu'')' - u(gv'')' + g(v''u' - u''v') \right\}_0^1 = 0. \quad (9)$$

Aufgrund gleicher Randbedingungen für die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ ist (9) erfüllt, so dass die Eigenschaft (7.145a) nachgewiesen ist.

Ü 7.2.11

a) Variationsmethode

Gemäß Ziffer 5.4 und Ü 5.4.3 minimiert die Temperaturverteilung, die (1a,b) und (3a,b) erfüllt, das Funktional

$$J[T] = \iint_G \left[\frac{\lambda_x}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda_y}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - \dot{q}_E T \right] dx dy + \int_{S_2} \left[qT + \frac{h}{2} T(T - 2T_\infty) \right] ds . \quad (4)$$

Die Temperaturverteilung innerhalb eines finiten Elementes wird üblicherweise gemäß

$$T^e(x, y) = \sum_{i=1}^k N_i(x, y) T_i \equiv [N] \{T^e\} \quad (5)$$

angesetzt. Darin sind N_i die *shape functions* und T_i , $i=1,2,\dots,k$ die Temperaturen in den k Knotenpunkten. Setzt man (5) in (4) ein, so erhält man das “diskretisierte” Funktional $J[T^e]$ als Funktion von den diskreten *Knotentemperaturen*, die sich so einpendeln werden, dass $J[T^e]$ minimal wird:

$$\partial J[T^e] / \partial T_i \stackrel{!}{=} 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (6)$$

Für einen *Knotenpunkt* i folgt aus (4) und (6):

$$\begin{aligned} & \iint_{G^e} \left[\lambda_x \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T^e}{\partial x} \right) + \lambda_y \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T^e}{\partial y} \right) - \dot{q}_E \frac{T^e}{T_i} \right] dx dy + \\ & + \int_{S_2^e} \left(q \frac{\partial T^e}{\partial T_i} + h T^e \frac{\partial T^e}{\partial T_i} - h T_\infty \frac{\partial T^e}{\partial T_i} \right) dS^e = 0 . \end{aligned} \quad (7)$$

Darin hat das Oberflächenintegral nur für die finite Elemente von null verschiedene Werte, die am Rand S_2 des Gebietes G liegen. Mit dem Ansatz (5) geht (7) über in:

$$\begin{aligned} & \iint_{G^e} \left[\lambda_x \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{T^e\} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \lambda_y \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \{T^e\} \frac{\partial N_i}{\partial y} - \dot{q}_E N_i \right] dx dy + \\ & + \int_{S_2^e} \left(q N_i + h [N] \{T^e\} N_i - h T_\infty N_i \right) dS^e = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (8)$$

In Matrizenform erhält man aus (8) schließlich für ein finites Element mit k Knotenpunkten:

$$\boxed{\boxed{[K^e] + [H^e] \{T^e\} = \{Q^e\} - \{q^e\} + \{h^e\}}}, \quad (9)$$

wobei folgende Matrizen eingeführt werden:

$$\left[K^e \right] = \left[K_{ij}^e \right] \quad \text{mit} \quad K_{ij}^e := \iint_{G^e} \left(\lambda_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy, \quad (10)$$

$$\left[Q^e \right] = \left[Q_i^e \right] \quad \text{mit} \quad Q_i^e := \iint_{G^e} \dot{q}_e N_i dx dy, \quad (11)$$

$$\left[q^e \right] = \left[q_i^e \right] \quad \text{mit} \quad q_i^e := \int_{S_2^e} q N_i dS^e, \quad (12)$$

$$\left[H^e \right] = \left[H_{ij}^e \right] \quad \text{mit} \quad H_{ij}^e := \int_{S_2^e} h N_i N_j dS^e, \quad (13)$$

$$\left[h^e \right] = \left[h_i^e \right] \quad \text{mit} \quad h_i^e := \int_{S_2^e} h T_\infty N_i dS^e. \quad (14)$$

Der Übergang von (8) nach (9) ist möglich, da die Spaltenmatrix $\{T^e\}$ der *Knotentemperaturen* T_i außerhalb der Integrale geschrieben werden kann. In der Matrixgleichung (9) sind die rechte Seite und die “*Steifigkeitsmatrix*“ $[K^e]$ nach der Wahl der *shape functions* N_i bekannt, so dass die Auflösung der *linearen algebraischen Gleichungen* nach den unbekannten *Knotentemperaturen* $\{T^e\} = \{T_i^e\}$ eines finiten Elementes erfolgen kann.

b) GALERKIN-Verfahren

Beim *GALERKIN-Verfahren* werden als *Wichtungsfunktionen* W_i in (7.111) die *shape functions* N_i gewählt. Somit wird wegen (1a) mit (5) gefordert:

$$\iint_{G^e} N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T^e}{\partial y} \right) + \dot{q}_E \right] dx dy \stackrel{!}{=} 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (15)$$

Durch diesen Integralausdruck wird gefordert, dass das *Residuum* im *gewichteten Mittel* verschwindet. Es wird jedoch nicht der Einfluss der Randbedingungen ausgedrückt. Um diesen zu erfassen, sind die ersten zwei Integrale in (15) “*partiell zu integrieren*“, d.h., man wende auf (15) die *GREENsche Formel* (5.61a,b) an und beachte $dx = -n_y ds$, $dy = n_x ds$ gemäß Bild 5.3, so dass aus (15) folgt:

$$\int_{S_2^e} \left(\lambda_x \frac{\partial T^e}{\partial x} n_x + \lambda_y \frac{\partial T^e}{\partial y} n_y \right) N_i dS^e - \iint_{G^e} \left(\lambda_x \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{G^e} \dot{q}_E N_i dx dy = 0 \quad (16)$$

Das Oberflächenintegral in (16) kann aufgrund der Randbedingung (3b) durch

$$\int_{S_2^e} \left(\lambda_x \frac{\partial T^e}{\partial x} n_x + \lambda_y \frac{\partial T^e}{\partial y} n_y \right) N_i dS^e = - \int_{S_2^e} [q + h(T^e - T_\infty)] N_i dS^e \quad (17)$$

ausgedrückt werden, so dass mit (5) aus (16) unmittelbar (8) folgt.

Resümee: Das Beispiel hat gezeigt, dass beide Methoden dieselben *Finite-Elemente-Gleichungen* liefern. Das beruht darauf, dass die *Differentialoperatoren* in (1a) *linear* und *selbstadjungiert* sind, wie in Ü 7.2.10a bereits nachgewiesen wurde.

Ü 7.2.12

Die *elliptische Differentialgleichung* (1a,b) aus Ü7.2.11 geht im *instationären* Fall in die gegebene Gleichung (1) über, die vom *parabolischen Typ* ist. Da für (1) kein klassisches Extremalprinzip existiert, ist das *GALERKIN-Verfahren* anzuwenden.

Die gesuchte Temperaturverteilung ist eine Funktion des Ortes und der Zeit. Innerhalb eines finiten Elementes hat sie die Form

$$T^e(x,y;t) = \sum_{i=1}^k N_i(x,y) T_i(t) \quad (3)$$

d.h., die *Knotentemperaturen* $T_i = T_i(t)$ sind *zeitabhängig*.

Aufgrund des instationären Terms $c\rho \partial T / \partial t$ in (1) ist der Integralsausdruck (15) in Ü 7.2.11b um den Term

$$- \iint_{G^e} N_i c\rho \frac{\partial T^e}{\partial t} dx dy$$

zu erweitern. Verfolgt man damit den weiteren Rechengang in Ü7.2.11b, so erhält man schließlich in Erweiterung der Matrixgleichung (9) aus Ü7.2.11 die lineare Differentialgleichung

$$\boxed{[C] \{dT^e/dt\} + \left([K^e] + [H^e] \right) \{T^e\} = \{Q^e\} - \{q^e\} + \{h^e\}} \quad (4)$$

zur Bestimmung der zeitabhängigen Knotentemperaturen. Die Matrix $[C]$ ist durch

$$C_{ij} := \iint_{G^e} c p N_i N_j \, dx \, dy \quad (5)$$

gegeben. Die anderen Matrizen in (4) stimmen mit den in Ü 7.2.11 definierten Matrizen (10) bis (14) überein.

Ü 7.3.1

Geht man von einem *Funktional*

$$J = \int_0^1 [p(x)y'^2 - q(x)y^2] \, dx \quad (2)$$

aus, so ergibt sich die zugeordnete *EULERSche Differentialgleichung der Variationsrechnung*⁺⁾

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (5.21a)$$

wegen

$$F(x, y, y') = p(x)y'^2 - q(x)y^2 \quad (3)$$

zu

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = 0, \quad (4a)$$

die in der *selbstadjungierten Form*

$$\boxed{(py')' + qy = 0} \quad (4b)$$

geschrieben werden kann.

a) Mit $p = x^2$ folgt aus (4b) die Differentialgleichung

$$x^2 y'' + 2xy' + qy = 0, \quad (5)$$

die für $a = 2$ mit (1) übereinstimmt, so dass aus (2) das *Funktional* für (5) abgelesen werden kann :

$$\boxed{J = \int_0^1 [x^2 y'^2 - q(x)y^2] \, dx}. \quad (6)$$

In (5) stimmt die Funktion vor y' mit p' überein, was der Bedingung $a_1 = a_2'$ in (7.184) entspricht!

⁺⁾ Bisweilen auch *EULER-LAGRANGESche Differentialgleichung* genannt.

b) Um (1) für $a \neq 2$ auf eine *selbstadjungierte Form* bringen zu können, wähle man die Substitution

$$y(x) = Q(x) z(x). \quad (7)$$

Darin muss $Q(x)$ so bestimmt werden, dass die neue Differentialgleichung in $z(x)$ keinen Term mit der ersten Ableitung $z'(x)$ enthält, da der Operator $L = d/dx$ **nicht** selbstadjungiert ist, wie in Ziffer 7.2 nachgewiesen.

Setzt man die Substitution (7) in (1) ein, so findet man die Differentialgleichung

$$x^2 Q z'' + x(2xQ' + aQ)z' + (x^2 Q + axQ' + qQ)z = 0. \quad (8)$$

Darin muss der zweite Term verschwinden, wie oben erläutert :

$$2xQ' + aQ \stackrel{!}{=} 0. \quad (9)$$

Diese Differentialgleichung ist vom separablen Typ mit einer Lösung

$$Q = x^{-a/2}. \quad (10)$$

Mithin lautet die Substitution (7) :

$$\boxed{y(x) = x^{-a/2} z(x)}, \quad (11)$$

mit der die Ausgangsgleichung (1) in eine *selbstadjungierte Differentialgleichung* in $z(x)$ übergeht, die man einfacher erhält, indem man Q gemäß (10) in (8) einsetzt :

$$\boxed{z'' + \left[x^2 - \frac{a^2}{2} + q(x) \right] x^{-2} z = 0}. \quad (12)$$

Für diese Differentialgleichung existiert analog (4a) ein *Funktional*, das man leicht finden kann, indem man in (2) die Funktion $p = 1$ wählt, weiterhin y durch z und

$q(x)$ durch $\left[x^2 - \frac{a^2}{2} + q(x) \right] x^{-2}$ ersetzt :

$$\boxed{J = \int_0^1 \left\{ z'^2 - \left[x^2 - \frac{a^2}{2} + q(x) \right] x^{-2} z^2 \right\} dx}. \quad (13)$$

Zur Kontrolle setze man

$$F(x, z, z') = z'^2 - \left[x^2 - \frac{a^2}{2} + q(x) \right] x^{-2} z^2 \quad (14)$$

in die *EULERSche Differentialgleichung der Variationsrechnung*,

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0, \quad (15)$$

ein. Man erhält die Differentialgleichung (12).

Der oben beschriebene Weg ist umständlich. Eine einfachere Vorgehensweise wird in Ü 7.3.2 beschrieben.

Ü 7.3.2

Aus (5) folgt für $x \neq 0$:

$$y'' + \frac{a}{x} y' + \frac{q(x)}{x^2} y = 0, \quad (6)$$

so dass man aus (2)

$$p(x) := \exp \left(a \int \frac{dx}{x} \right) = x^a \quad (7)$$

erhält. Mit $a_0 = q(x)/x$ aus (1), (6) und (7) lautet das *Funktional* (4) :

$$J = \int_0^1 \left[x^a y'^2 - x^{a-2} q(x) y^2 \right] dx \quad (8)$$

mit

$$F(x, y, y') = x^a y'^2 - x^{a-2} q(x) y^2. \quad (9)$$

Zur Kontrolle setze man (9) in (5.21a) ein. Man erhält unmittelbar die Differentialgleichung (5).

Der Sonderfall $a = 2$ entspricht der Bedingung $a_1 = a'_2$ in (7.184).

Ü 7.3.3

a) Die *BESSELSche Differentialgleichung* wird auf die Form

$$y'' + y' / x + \left[1 - (a/x)^2 \right] y = 0 \quad (5)$$

gebracht, die gemäß Ü 7.3.2 mit

$$p(x) := \exp \left(\int a_1(x) dx \right) \Bigg|_{a_1(x) \equiv 1/x} \Rightarrow \boxed{p(x) = x} \quad (6)$$

multipliziert wird, so dass die *selbstadjungierte Form*

$$(xy')' + x \left[1 - (a/x)^2 \right] y = 0 \quad (7)$$

entsteht. Das zugehörige *Funktional* ergibt sich zu :

$$J = \int_{\ell} F(x, y, y') dx = \int_{\ell} \left\{ xy'^2 - x \left[1 - (a/x)^2 \right] y^2 \right\} dx. \quad (8)$$

Zur Kontrolle wende man $F(x, y, y')$ aus (8) auf (5.21a) an : Man erhält die *BESSELSche Differentialgleichung* (1).

b) Die *LEGENDRESche Differentialgleichung* (2) kann unmittelbar auf die *selbstadjungierte Form*

$$[(x^2 - 1)y']' - a(1 + a)y = 0 \quad (9)$$

gebracht werden, da in (2) die Funktion vor y' mit der Ableitung des Faktors vor y'' übereinstimmt. Zu (9) gehört das *Funktional*

$$J = \int_{\ell} F(x, y, y') dx = \int_{\ell} [(x^2 - 1)y'^2 + a(1 + a)y^2] dx. \quad (10)$$

Zur Kontrolle wende man $F(x, y, y')$ aus (10) auf (5.21a) an : Man erhält die *LEGENDRESche Differentialgleichung* (2).

c) Die *TSCHEBYSCHEFFSche Differentialgleichung* (3) wird auf die Form

$$y'' + \frac{x}{x^2 - 1} y' - \frac{a^2}{x^2 - 1} y = 0 \quad (11)$$

gebracht, die gemäß Ü 7.3.2 mit

$$\left. \begin{aligned} p(x) &:= \exp \left(\int a_1(x) dx \right) \\ a_1(x) &\equiv x/(x^2 - 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{p(x) = \sqrt{x^2 - 1}} \quad (12)$$

multipliziert wird, so dass die *selbstadjungierte Form*

$$\left(\sqrt{x^2 - 1} y' \right)' - \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - 1}} y = 0 \quad (13)$$

entsteht. Das zugehörige *Funktional* ergibt sich analog Ü 7.3.2 zu :

$$J = \int_{\ell} F(x, y, y') dx = \int_{\ell} \left(\sqrt{x^2 - 1} y'^2 + \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - 1}} y^2 \right) dx. \quad (14)$$

Zur Kontrolle wende man $F(x, y, y')$ aus (14) auf (5.21a) an : Man erhält die *TSCHEBYSCHEFFSche Differentialgleichung* (3).

d) Die *LAGUERRESche Differentialgleichung* (4) wird durch

$$y'' + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y' + \frac{a}{x}y = 0 \quad (15)$$

ausgedrückt. Man erhält :

$$p(x) := \exp\left(\int \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx\right) = xe^{-x} \quad (16)$$

und

$$(xe^{-x}y')' + ae^{-x}y = 0,$$

so dass sich das zugehörige *Funktional* zu

$$J = \int_{\ell} F(x, y, y') dx = \int_{\ell} (xy'^2 - ay^2)e^{-x} dx \quad (17)$$

ergibt. Zur Kontrolle überprüfe man (5.21a).

Anmerkung : Die behandelten Differentialgleichungen spielen eine wichtige Rolle in der mathematischen Physik und Mechanik.

Ü 7.3.4

Mit dem *Operator* (7.179) kann die Differentialgleichung (1) durch $L(y) = f(x)$ angegeben werden. Man kann sie folgendermaßen auf ihre *selbstadjungierte Form* bringen. Man dividiert (1) durch $a_2(x)$,

$$y'' + \frac{a_1}{a_2}y' + \frac{a_0}{a_2}y = \frac{f(x)}{a_2(x)}, \quad (1*)$$

und multipliziert diese Differentialgleichung mit

$$p(x) := \exp\left(\int \frac{a_1}{a_2} dx\right), \quad (2)$$

so dass die *selbstadjungierte Form*

$$(py')' + p \frac{a_0}{a_2}y = \frac{p(x)}{a_2(x)}f(x) \quad (3)$$

entsteht. Diese kann in Erweiterung von Ü 7.3.2 als *EULER-LAGRANGESche Differentialgleichung des Funktional*s

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[py'^2 - p \frac{a_0}{a_2} y^2 + 2 \frac{p}{a_2} f(x)y \right] dx \quad (4)$$

gedeutet werden; denn aus (5.21a) folgt unmittelbar (3) bzw. (1*).

Alternativ kann man die Differentialgleichung (1) mit

$$g(x) = \exp\left(\int \frac{a_1 - a_2'}{a_2} dx\right) \quad (7.185)$$

multiplizieren, wodurch die *selbstadjungierte Form*

$$(ga_2 y')' + ga_0 y = g(x)f(x) \quad (5)$$

entsteht. Diese kann als *EULER-LAGRANGEsche Differentialgleichung des Funktionals*

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = \int_{x_1}^{x_2} [a_2(x)y'^2 - a_0(x)y^2 + 2f(x)y] g(x) dx \quad (6)$$

gedeutet werden; denn aus (5.21a) folgt unmittelbar (5) bzw. (1).

Anmerkung : Jede lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) kann als *EULER-LAGRANGEsche Differentialgleichung* eines *Funktional*s (4) mit $p(x)$ gemäß (2) bzw. eines *Funktional*s (6) mit $g(x)$ gemäß (7.185) aufgefasst werden.

Die *Funktionale* (4) und (6) nehmen für jede mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion $y = y(x)$, die für $x_1 \leq x \leq x_2$ vorgegeben ist, einen bestimmten Wert an. Gesucht ist die Funktion, die durch die vorgegebenen Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) hindurchgeht und das *Funktional* (4) oder (6) zu einem *relativen Minimum* macht, d.h., es wird gefordert, dass das Funktional für $y(x)$ einen kleineren Wert hat als für benachbarte Funktionen, aber nicht notwendig für alle denkbaren Funktionen.

Ü 7.3.5

Die *selbstadjungierte Form* der gegebenen Differentialgleichung lautet :

$$(x^2 y')' = 6x. \quad (2)$$

Dazu existiert nach Ü 7.3.4 das *Funktional*

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (x^2 y'^2 + 12xy) dx. \quad (3)$$

Die Grenzen x_1 und x_2 beziehen sich auf ein finites Element. Beim *RITZ-Verfahren* begrenzen sie den Gesamtbereich.

Die Näherung nach der FEM wird durch

$$y(\xi) = \sum_{k=1}^n y_k N_k(\xi) \quad (4)$$

innerhalb eines finiten Elements dargestellt. Darin sind y_k die gesuchten *Knotenwerte* und $N_k(\xi)$ die *Formfunktionen*, die aus früheren Übungen als Funktionen der *natürlichen (lokalen) Koordinate* ξ bekannt sind.

Das Funktional (3) ist **bezüglich der Knotenwerte** zu minimieren. Analog (7.27) bis (7.31) erhält man nach Substitution $x = 1 + \xi$ das lineare Gleichungssystem

$$[K^e]\{y\} = \{F^e\} \quad (5)$$

mit

$$[K^e] \equiv [k_{ij}] := \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} (1+\xi)^2 N_i' N_j' d\xi \right] \quad (6)$$

und

$$\{F^e\} \equiv \{f_i\} := -6 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \{(1+\xi)N_i\}^t d\xi. \quad (7)$$

Zur Ermittlung der *exakten Lösung* geht man am bequemsten von der *selbstadjungierten Form* (2) aus (Ü 7.2.9) :

$$(x^2 y')' = 6x \Rightarrow x^2 y' = 3x^2 + A \quad \text{bzw.} \quad y' = 3 + A/x^2.$$

Eine weitere Integration führt unmittelbar auf die Lösung

$$y = 3x - A/x + B,$$

in der die Integrationskonstanten aufgrund der Randbedingungen $y(1) = y(2) = 0$ durch $A = -6$ und $B = -9$ bestimmt sind :

$$y_{\text{ex}} = 6/x + 3x - 9. \quad (8)$$

Nach diesen Vorbereitungen können die einzelnen Punkte **a)** bis **c)** behandelt werden.

a) Einzelement mit drei Knoten

Da die Knotenwerte y_1 und y_3 aufgrund der Randbedingungen NULL sind, muss nur der Wert y_2 bestimmt werden, der sich aus dem Gleichungssystem (5) mit (6) und (7) zu

$$y_2 = -6 \int_0^1 (1+\xi) N_2(\xi) d\xi \bigg/ \int_0^1 (1+\xi)^2 N_2'^2(\xi) d\xi \quad (9a)$$

ergibt. Das Einzelement besitzt drei Knoten, so dass in (9a) die *quadratische Formfunktion* $N_2(\xi) = 4\xi(1-\xi)$ aus Ü 3.1.23 einzusetzen ist :

$$y_2 = -15/32 = -0,46875. \quad (9b)$$

Mit diesem Wert und $N_2(\xi) = 4\xi(1 - \xi)$ liefert (4) schließlich die *erste Näherung* :

$$\boxed{y_I = -\frac{15}{8} \xi(1 - \xi) = \frac{15}{8} (x - 1)(x - 2)} \quad (10)$$

Nach dem *RITZ-Verfahren* wählt man in *erster Näherung* einen eingliedrigen Ansatz

$$Y_I = C(x - 1)(x - 2), \quad (11)$$

der a priori die homogenen Randbedingungen $y(1) = y(2) = 0$ erfüllt. Mit diesem Ansatz wird das *Funktional* (3) **bezüglich des Ansatzfreiwertes** C minimiert (Ü 7.2.9) :

$$\partial J / \partial C \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{C = 15/8} \quad (12)$$

Wie zu erwarten, stimmt dieses Ergebnis mit der Näherung (10) nach der FEM überein!

b) Einzelelement mit vier Knoten

Von den vier Knotenwerten sind nur y_2 und y_3 von NULL verschieden, so dass aus (5) mit (6) und (7) das reduzierte Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

folgt. Zu seiner Auflösung müssen die *kubischen Formfunktionen*

$$N_2(\xi) = 9\xi - \frac{45}{2}\xi^2 + \frac{27}{2}\xi^3, \quad (14a)$$

$$N_3(\xi) = -\frac{9}{2}\xi + 18\xi^2 - \frac{27}{2}\xi^3 \quad (14b)$$

aus Ü 3.1.24 in (6) und (7) eingesetzt werden. Da der gesamte Bereich $1 \leq x \leq 2$ als Einzelelement betrachtet wird, liegen die Integrationsgrenzen in (6) und (7) durch $\xi_1 = 0$ und $\xi_2 = 1$ fest.

Setzt man (14a,b) in (6) und (7) ein, so erhält man das Gleichungssystem (13) zu :

$$\begin{bmatrix} 1377/70 & -4941/280 \\ -4941/280 & 891/28 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -27/10 \\ -81/20 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

mit der Lösung

$y(x = 4/3) \equiv y_2 = -806/1611 \approx -0,50031$	(16a)
$y(x = 5/3) \equiv y_3 = -652/1611 \approx -0,40472$	(16b)

Diese Werte stimmen mit den Ergebnissen überein, die man auf der Basis eines *zweigliedrigen RITZ-Ansatzes* erhält.

Die *zweite Näherung* erhält man mit (14a,b) und (16a,b) zu :

$$y_{II} = y_2 N_2(\xi) + y_3 N_3(\xi) = -\frac{3}{179} (160\xi - 237\xi^2 + 77\xi^3) \quad (17a)$$

bzw. mit der Substitution $x = 1 + \xi$ zu :

$$y_{II} = -\frac{3}{179} (-474 + 865x - 468x^2 + 77x^3) \quad (17b)$$

Der *zweigliedrige RITZ-Ansatz*, der die Randbedingungen erfüllt, lautet :

$$Y_{II} = (x-1)(x-2)(C_1 + C_2x). \quad (18)$$

Mit diesem Ansatz wird das *Funktional* (3) **bezüglich der Ansatzfreiwerte** C_1 und C_2 minimiert : $\partial J / \partial C_1 = 0$ und $\partial J / \partial C_2 = 0$. Diese Forderungen führen auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (19a)$$

mit den Abkürzungen

$$K_{11} := \int_1^2 x^2 (2x-3)^2 dx, \quad K_{12} := \int_1^2 (3x^2 - 6x + 2)(2x-3)x^2 dx,$$

$$K_{21} = K_{12}, \quad K_{22} := \int_1^2 x^2 (3x^2 - 6x + 2)^2 dx,$$

$$F_1 := -6 \int_1^2 (x-1)(x-2)x dx, \quad F_2 := -6 \int_1^2 (x-1)(x-2)x^2 dx.$$

Damit geht (19) über in das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 4/5 & 13/10 \\ 13/10 & 233/15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3/2 \\ 23/10 \end{Bmatrix} \quad (19b)$$

mit der Lösung (Ü 7.2.9) :

$C_1 = 711/179 \approx 3,9721$	$C_2 = -231/179 \approx -1,291$
--------------------------------	---------------------------------

(20)

so dass die *zweite Näherung* durch

$$Y_{II} = (x-1)(x-2) \left(\frac{711}{179} - \frac{231}{179} x \right)$$

(21)

gegeben ist, die sich mit (17b) deckt!

Die Ergebnisse (15) und (16a,b) sind mit Hilfe der MAPLE-Software überprüft worden, wie nachstehender Computerausdruck zeigt.

>with(linalg):

>n:=matrix(1,2,[A,B]);

$$n := \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

>J:=multiply(transpose(n),n): K:=Int(evalm(J),xi);

$$K := \int \begin{bmatrix} A^2 & A B \\ A B & B^2 \end{bmatrix} d\xi$$

Darin sind A und B die mit $(1+\xi)$ multiplizierten Ableitungen der kubischen Formfunktionen N2 und N3:

>A:=xi->(1+xi)*(9-45*xi+(81/2)*xi^2);

$$A := \xi \rightarrow (1 + \xi) \left(9 - 45 \xi + \frac{81}{2} \xi^2 \right)$$

>B:=xi->(1+xi)*(-9/2+36*xi-(81/2)*xi^2);

$$B := \xi \rightarrow (1 + \xi) \left(-\frac{9}{2} + 36 \xi - \frac{81}{2} \xi^2 \right)$$

>K:=map(int,J(xi),xi=0..1);

$$K := \begin{bmatrix} \frac{1377}{70} & \frac{-4941}{280} \\ \frac{-4941}{280} & \frac{891}{28} \end{bmatrix}$$

>f:=vector([a,b]); F:=Int(evalm(f),xi);

$$f := \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$

$$F := \int \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} d\xi$$

Darin sind a und b die mit $-6(1+\xi)$ multiplizierten Formfunktionen N₂ und N₃:

>a:=xi->-6*(1+xi)*(9*xi-(45/2)*xi^2+(27/2)*xi^3);

$$a := \xi \rightarrow -6 (1 + \xi) \left(9 \xi - \frac{45}{2} \xi^2 + \frac{27}{2} \xi^3 \right)$$

>b:=xi->-6*(1+xi)*(-9*xi/2+18*xi^2-(27/2)*xi^3);

$$b := \xi \rightarrow -6(1 + \xi) \left(-\frac{9}{2}\xi + 18\xi^2 - \frac{27}{2}\xi^3 \right)$$

>F:=map(int,f(xi),xi=0..1);

$$F := \begin{bmatrix} -\frac{27}{10} & -\frac{81}{20} \end{bmatrix}$$

Der Lösungsvektor für die Knotenwerte ergibt sich zu:

> y:=vector([y[2],y[3]])=linsolve(K,F);

$$y := \begin{bmatrix} y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{806}{1611} & -\frac{652}{1611} \end{bmatrix}$$

> y[2]:=-806/1611=evalf(-806/1611); y[3]:=-652/1611=evalf(-652/1611);

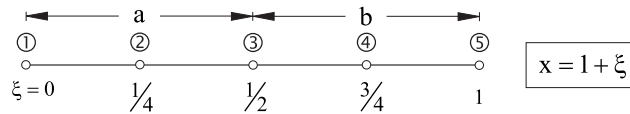
$$y_2 := \frac{-806}{1611} = -.5003103662$$

$$y_3 := \frac{-652}{1611} = -.4047175667$$

Diese Werte stimmen überein mit den Ergebnissen, die man auf der Basis eines zweigliedrigen RITZ-Ansatzes erhält. Die exakten Werte sind -0.5 und -0.4.

c) Zwei quadratische Elemente

Aufgrund der Randbedingungen $y_1 = y_5 = 0$ sind nur die Knotenwerte y_2, y_3 und y_4 von null verschieden (Skizze).



Die unbekannten *Knotenwerte* y_2, y_3 und y_4 erhält man aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ & K_{33} & K_{34} \\ \text{symm.} & & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

Zur Ermittlung der Größen K_{ij} und F_i werden die *quadratischen Formfunktionen* für die *finiten Elemente a* und *b* benötigt :

Element a :	$N_2 = 8\xi(1-2\xi)$	$N_3^a = 2\xi(4\xi-1)$	(23a)
--------------------	----------------------	------------------------	-------

Element b :	$N_3^b = 2(1-\xi)(3-4\xi)$	$N_4 = 8(1-\xi)(2\xi-1)$	(23b)
--------------------	----------------------------	--------------------------	-------

Damit ermittelt man aus (6) und (7) im Einzelnen :

$$K_{22} = \int_0^{1/2} (1+\xi)^2 \left(\frac{\partial N_2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi = +\frac{256}{15},$$

$$K_{23} = \int_0^{1/2} (1+\xi)^2 \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \frac{\partial N_3^a}{\partial \xi} d\xi = -\frac{51}{5},$$

$$K_{33} = K_{33}^a + K_{33}^b = \int_0^{1/2} (1+\xi)^2 \left(\frac{\partial N_3^a}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \int_{1/2}^1 (1+\xi)^2 \left(\frac{\partial N_3^b}{\partial \xi} \right)^2 d\xi = \frac{106}{5},$$

$$K_{24} = 0, \quad K_{34} = \int_{1/2}^1 (1+\xi)^2 \frac{\partial N_3^b}{\partial \xi} \frac{\partial N_4}{\partial \xi} d\xi = -\frac{71}{5},$$

$$K_{44} = \int_{1/2}^1 (1+\xi)^2 \left(\frac{\partial N_4}{\partial \xi} \right)^2 d\xi = \frac{496}{15},$$

$$F_2 = -6 \int_0^{1/2} (1+\xi) N_2 d\xi = -\frac{5}{2},$$

$$F_3 = F_3^a + F_3^b = -6 \int_0^{1/2} (1+\xi) N_3^a d\xi - 6 \int_{1/2}^1 (1+\xi) N_3^b d\xi = -\frac{3}{2},$$

$$F_4 = -6 \int_{1/2}^1 (1+\xi) N_4 d\xi = -\frac{7}{2}.$$

Mit diesen Zahlenwerten geht (22) in das Gleichungssystem

$$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 256 & -153 & 0 \\ & 318 & -213 \\ \text{symm.} & & 496 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

über, das den Lösungsvektor

$y_2 = -\frac{508791}{1143536} = -0,44493$	$y_3 = -\frac{713791}{142942} = -0,4994$	$y_4 = -\frac{366261}{1143536} = -0,3203$	(25)
--	--	---	------

besitzt. Im Vergleich dazu sind die *exakten Knotenwerte* durch

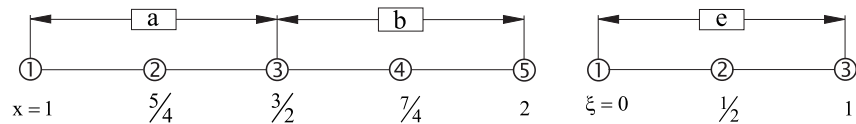
$y_2 = -9/20 = -0,45$	$y_3 = -1/2$	$y_4 = -9/28 = -0,3214$
-----------------------	--------------	-------------------------

(26)

gegeben. Die Abweichungen der Näherungslösung (25) von den exakten Werten (26) sind vernachlässigbar.

Alternativ zu der oben beschriebenen Aufstellung des Gleichungssystems (22) / (24) kann man auch folgendermaßen vorgehen.

In der nachstehenden Skizze sind die *finiten Elemente* **a** und **b** im globalen Koordinatensystem (*Lageplan*) und ein *Einheitselement* **e** in natürlichen Koordinaten (*Referenzplan*) dargestellt.



Die Abbildungen der finiten Elemente **a** und **b** auf das Einheitselement **e** werden durch die linearen Transformationen

$$\boxed{x = (2 + \xi) / 2} \quad \text{und} \quad \boxed{x = (3 + \xi) / 2} \quad (27a,b)$$

vermittelt. Für beide gilt: $dx = d\xi / 2$, was im Funktional (3) zu beachten ist.

Das Einheitselement **e** besitzt **drei** Knoten, da *quadratische Formfunktionen* verwendet werden sollen:

$N_1 = (1 - \xi)(1 - 2\xi)$	$N_2 = 4\xi(1 - \xi)$	$N_3 = -\xi(1 - 2\xi)$
-----------------------------	-----------------------	------------------------

(28)

Diese können für beide finiten Elemente verwendet werden im Gegensatz zu (23a,b), da beide Elemente auf das *Einheitselement* als *Referenzelement* vermöge der Transformationen (27a,b) abgebildet werden.

Allerdings können die Integrale in (6) und (7) zur Ermittlung der *Steifigkeitsmatrix* und des *Lastvektors* **nicht** übernommen werden. Es sind folgende Modifikationen erforderlich:

– Aufgrund der Transformationen (27a,b) ist im Funktional $dx = d\xi / 2$ zu berücksichtigen.

– Zu beachten ist:

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = 2 \sum_{k=1}^n y_k N'_k(\xi) . \quad (29)$$

Führt man diese Modifikationen und die Transformationen (27a,b) in (3) bzw. (6) und (7) ein, so erhält man unter Beachtung der Formfunktionen (28) im Einzelnen folgende Ergebnisse:

$$K_{22} = 2 \int_0^1 \frac{1}{4} (2 + \xi)^2 N_2'^2 d\xi = + \frac{256}{15},$$

$$K_{23} = 2 \int_0^1 \frac{1}{4} (2 + \xi)^2 N_2' N_3' d\xi = - \frac{51}{5},$$

$$K_{33} = 2 \int_0^1 \frac{1}{4} (2 + \xi)^2 N_3'^2 d\xi + 2 \int_0^1 \frac{1}{4} (3 + \xi)^2 N_1'^2 d\xi = \frac{91}{10} + \frac{121}{10} = \frac{106}{5},$$

$$K_{24} = 0, \quad K_{34} = 2 \int_0^1 \frac{1}{4} (3 + \xi)^2 N_1' N_2' d\xi = - \frac{71}{5},$$

$$K_{44} = 2 \int_0^1 \frac{1}{4} (3 + \xi)^2 N_2'^2 d\xi = \frac{496}{15},$$

$$F_2 = -3 \int_0^1 \frac{1}{2} (2 + \xi) N_2 d\xi = - \frac{5}{2},$$

$$F_3 = -3 \int_0^1 \frac{1}{2} (2 + \xi) N_3 d\xi - 3 \int_0^1 \frac{1}{2} (3 + \xi) N_1 d\xi = - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = - \frac{3}{2},$$

$$F_4 = -3 \int_0^1 \frac{1}{2} (3 + \xi) N_2 d\xi = - \frac{7}{2}.$$

Diese Ergebnisse stimmen mit den Werten in (24) überein. Mithin ist die Kontrolle nach einem alternativen Rechengang erfolgt.

Mit dem Lösungsvektor (25), den Formfunktionen (23a,b) und $\xi = x-1$ oder alternativ mit (25), (28) und (27a,b) erhält man aus (4) die Lösungskurven innerhalb der Elemente \boxed{a} und \boxed{b} zu :

$$y_a = - \frac{508791}{142942} (x-1)(3-2x) - \frac{71379}{71471} (x-1)(4x-5) \quad (30a)$$

$$y_b = - \frac{71379}{71471} (2-x)(7-4x) - \frac{366261}{142942} (2-x)(2x-3) \quad (30b)$$

Der Übergang an der Nahtstelle $x = 3/2$ ist zwar *stetig*, $y_a(3/2) = y_b(3/2) \equiv y_2$, aber **nicht** *stetig differenzierbar* : $y_a'(3/2) = 0,563$ und $y_b'(3/2) = 0,434$. Für die exakte Lösung gilt : $y_{\text{ex}}'(3/2) = 1/3$.

Die Näherungen (10), (17b), (30a,b) und die exakte Lösung (8) sind in der nachstehenden MAPLE-Grafik dargestellt.

```
>y[ex]:=x->6/x+3*x-9;
```

$$y_{ex} := x \rightarrow 6 \frac{1}{x} + 3x - 9$$

```
>y[I]:=x->15*(x-1)*(x-2)/8;
```

$$y_I := x \rightarrow \frac{15}{8} (x-1)(x-2)$$

```
>y[II]:=x->(1422-2595*x+1404*x^2-231*x^3)/179;
```

$$y_{II} := x \rightarrow \frac{1422}{179} - \frac{2595}{179}x + \frac{1404}{179}x^2 - \frac{231}{179}x^3$$

```
>y[a]:=x->-508791*(x-1)*(3-2*x)/142942-71379*(x-1)*(4*x-5)/71471;
```

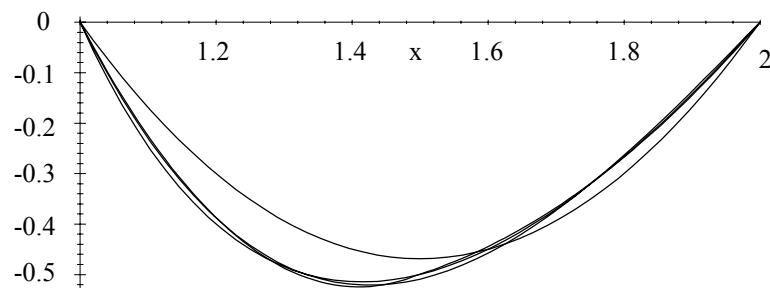
$$y_a := x \rightarrow -\frac{508791}{142942}(x-1)(3-2x) - \frac{71379}{71471}(x-1)(4x-5)$$

```
>y[b]:=x->-71379*(2-x)*(7-4*x)/71471-366261*(2-x)*(2*x-3)/142942;
```

$$y_b := x \rightarrow -\frac{71379}{71471}(2-x)(7-4x) - \frac{366261}{142942}(2-x)(2x-3)$$

```
>plot1:=plot({y[ex](x),y[I](x),y[II](x)},x=1..2): plot2:=plot(y[a](x),x=1..3/2):
```

```
>plot3:=plot(y[b](x),x=3/2..2): plots[display]({plot1,plot2,plot3});
```



Man erkennt, dass die *zweite Näherung* (17b) und die *Näherung* (30a,b) nur geringfügig von der *exakten Lösung* (8) abweichen.

Ü 7.3.6

Nach Ü 7.3.4 kann (1) zunächst als *EULER-LAGRANGEsche Differentialgleichung* des Funktionals

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx = \int_a^b (y'^2 - y^2 - 2xy) dx \quad (3)$$

gedeutet werden, wobei die gesuchte Funktion $y = y(x)$ durch die Punkte $[a, y(a)]$ und $[b, y(b)]$ hindurchgeht und das *Funktional* (3) zu einem *relativen Minimum* macht. In der vorliegenden Aufgabe liegt nur ein Punktepaar fest $[a = 0, y(0) = 0]$ gemäß (2a), während am Ende des betrachteten Bereichs der Funktionswert $y(b=1)$ **frei** ist. In diesem freien Endpunkt muss jedoch auch eine Randbedingung erfüllt sein [im vorliegenden Fall (2b)], damit das *Funktional* (3) *extremal* wird; denn minimiert eine Funktion das Funktional (3) im Vergleich zu allen Nachbarkurven mit freien Endpunkten, so minimiert sie erst recht das Funktional, wenn die Endpunkte der Kurve durch $[a, y(a)]$ und $[b, y(b)]$ festliegen.

Bei freien Rändern sind die *homogenen Randbedingungen* (5.14) oder eine von diesen nicht erfüllt. Dann ist die *erste Variation*

$$\delta J[y] = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.20c)$$

zum Verschwinden zu bringen. Da δy unterm Integral beliebig ist, folgt nach wie vor die EULERSche Differentialgleichung (5.21a). Der *integralfreie Term* in (5.20c) kann aufgrund der freien Ränder und $[\delta y(a) \neq 0 \text{ und } \delta y(b) \neq 0]$ nur verschwinden, wenn

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_a = \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_b = 0 \quad (4)$$

als *natürliche Randbedingungen* gefordert werden. Mithin muss das Funktional (3) entsprechend modifiziert werden. Wegen $\partial F / \partial y' = 2y'$ aus (3) folgt mit (2b) und $a = 0, b = 1$ das *modifizierte Funktional* der Randwertaufgabe (1) / (2a,b) zu :

$$J = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy) dx - 2y'(0) \quad (5)$$

Die Näherungsansätze sind gemäß

$$y \approx \sum_{k=1}^n y_k N_k(x) \quad (6)$$

darstellbar. Darin sind n und $N_k(x)$ bzw. $N_k(\xi)$ je nach Diskretisierung einzusetzen. Das Funktional (5) ist bezüglich der Knotenvariablen y_k zu minimieren :

$$\left. \frac{\partial J}{\partial y_k} = 0 \right\}_{k=1,2,\dots,n} \Rightarrow \boxed{\boxed{[K]\{y\} = \{F\}}} \quad (7)$$

Darin kann die *Steifigkeitsmatrix* $[K]$ folgendermaßen ermittelt werden :

$$[K] = [K_{ij}] \text{ mit } K_{ij} := \int_0^1 (N_i' N_j' - N_i N_j) dx, \quad (8)$$

während der "Lastvektor" $\{F\}$ gemäß

$$\{F\} = \{F_i\} \text{ mit } F_i := \int_0^1 x N_i dx \quad (9)$$

bestimmt wird. Dabei ist jedoch zu beachten, dass aufgrund des *modifizierten Funktionals* (5) die unbekannte Neigung $y'(0)$ im ersten Knotenpunkt in F_1 eingeht,

$$F_1 := \int_0^1 x N_1 dx - y'(0), \quad (10)$$

und ähnlich wie eine Reaktionskraft aus dem Gleichungssystem (7) bestimmt werden kann. Die Ergebnisse (7) bis (10) stimmen mit den entsprechenden Beziehungen in Ü 7.2.8 überein, so dass die in Ü 7.2.8 behandelten Beispiele nicht wiederholt werden müssen. Im Folgenden soll lediglich ein *eingliedriger RITZ-Ansatz* als Näherung gewählt werden.

Da zwei Randbedingungen (2a,b) zu erfüllen sind, muss man von einem Polynom zweiten Grades ausgehen,

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad (11)$$

damit für den *eingliedrigen RITZ-Ansatz* noch ein Ansatzfreiwert "übrigbleibt". Setzt man die Randbedingungen (2a,b) in (11) ein, so erhält man den *eingliedrigen RITZ-Ansatz*

$$\boxed{y = a_1 x(1 - x/2)}. \quad (12)$$

Darin wird der Ansatzfreiwert a_1 aus dem *Funktional* (5) bestimmt :

$$\partial J / \partial a_1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \int_0^1 \left(2y' \frac{\partial y'}{\partial a_1} - 2y \frac{\partial y}{\partial a_1} - 2x \frac{\partial y}{\partial a_1} \right) dx \stackrel{!}{=} 0. \quad (13)$$

Daraus ergibt sich : $\boxed{a_1 = 25/24}$ in Übereinstimmung mit dem GALERKINSchen Wert in Ü 7.2.7.

Wie in Ziffer 7.2 im Zusammenhang mit der "eindimensionalen" *POISSONSchen Differentialgleichung* (7.13) bereits erwähnt, kann allgemein gezeigt werden, dass bei *selbstadjungierten Operatoren* die *Variationsmethode* und das *GALERKIN-Verfahren* übereinstimmende Ergebnisse liefern.

Der Ansatz (12) mit $a_1 = 25/24$ weicht im Mittel nicht allzu stark von der *exakten Lösung* ab, wie in Ü 7.2.7 grafisch gezeigt. Wohl aber unterscheidet sich die Anfangstangente $y'(0) = a_1 = 25/24$ vom exakten Wert $y'_{\text{ex}}(0) = 0,851$ enorm. Die Anfangstangenten in Ü 7.2.8 und bei einem *zweigliedrigen RITZ-* oder *GALERKIN-Ansatz* (Ü 7.2.7) sind wesentlich besser.

Ü 7.3.7

Zweckmäßigerweise führt man im Hinblick auf einen *RITZ-Ansatz* die Substitution

$$\boxed{y = z + x} \quad (3)$$

ein, die sich wegen (2a,b) aus (7.18) mit $\psi_0(x) = x$ ergibt, so dass (1) in die Differentialgleichung

$$x^2 z'' + xz' + (x^2 - n^2)z = (n^2 - 1)x - x^3 \quad (4a)$$

mit den *homogenen Randbedingungen*

$$z(1) = z(2) = 0 \quad (5)$$

übergeht. Dividiert man (4a) durch x , so erhält man die *selbstadjungierte Form*

$$(xz')' + x\left[1 - (n/x)^2\right]z = n^2 - 1 - x^2 \quad (4b)$$

mit dem zugehörigen *Funktional*

$$\boxed{J = \int_1^2 F(x, z, z') dx = \int_1^2 \left\{ xz'^2 - x\left[1 - (n/x)^2\right]z^2 + 2(n^2 - 1 - x^2)z \right\} dx}, \quad (6)$$

das gegenüber dem Funktional in Ü 7.3.3 um einen Term erweitert ist aufgrund der von NULL verschiedenen rechten Seite in (4b). Zur Kontrolle setze man $F(x, z, z')$ in die *EULER-LAGRANGESche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0 \quad (5.21a)$$

ein : Man erhält die Differentialgleichung (4b).

Laut Aufgabenstellung soll der gesamte Bereich $[1, 2]$ als *Einzelement* (Skizze)

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & & \textcircled{2} & & \textcircled{3} \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ x=1 & & x=3/2 & & x=2 \end{array}$$

mit *quadratischen Formfunktionen*

$$\boxed{N_1 = (2-x)(3-2x) \quad N_2 = 4(2-x)(x-1) \quad N_3 = (1-x)(3-2x)} \quad (7a,b,c)$$

betrachtet werden. Die Näherung erfolgt gemäß

$$z(x) = \sum_{k=1}^3 z_k N_k(x). \quad (8)$$

Damit folgt man aus dem Funktional (6) :

$$\partial J / \partial z_k = 0 \Rightarrow \boxed{[K]\{z\} = \{F\}} \quad (9)$$

mit den Abkürzungen :

$$[K] = [K_{ij}] \quad \text{mit} \quad K_{ij} := \int_1^2 x \left(N_i' N_j' - \left[1 - (n/x)^2 \right] N_i N_j \right) dx, \quad (10)$$

$$\{F\} = \{F_i\} \quad \text{mit} \quad F_i := \int_1^2 (1 - n^2 + x^2) N_i dx. \quad (11)$$

Aufgrund der *homogenen Randbedingungen* (5) in z lautet (9) wegen $z(1) \equiv z_1$ und $z(2) \equiv z_3$ gemäß obiger Skizze :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ & K_{22} & K_{23} \\ \text{symm.} & & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 = 0 \\ z_2 = ? \\ z_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

woraus man unmittelbar den unbekannten Knotenwert z_2 ablesen kann :

$$z_2 = F_2 / K_{22} = \int_1^2 (1 - n^2 + x^2) N_2 dx \Big/ \int_1^2 x \left(N_2'^2 - \left[1 - (n/x)^2 \right] N_2^2 \right) dx. \quad (13)$$

Die Integrationen in (13) lassen sich bequem mit Hilfe der MAPLE-Software ausführen, wie aus nachstehendem Computerausdruck hervorgeht.

```
>N[2]:=x->4*(2-x)*(x-1);      A[2]:=Diff(N[2](x),x)=diff(N[2](x),x);
```

```
      N2:=x -> 4 (2 - x) (x - 1)
```

$$A_2 := \frac{\partial}{\partial x} (4 (2 - x) (x - 1)) = -8 x + 12$$

```
>A[2]:=x->12-8*x;
```

```
      A2:=x -> 12 - 8 x
```

```
>F[2]:=Int((1-n^2+x^2)*N[2],x=1..2)=int((1-n^2+x^2)*N[2](x),x=1..2);
```

$$F_2 := \int_1^2 (1 - n^2 + x^2) N_2 dx = -\frac{2}{3} n^2 + \frac{11}{5}$$

```
>K[22]:=Int(x*(A[2]^2-(1-(n/x)^2)*N[2]^2),x=1..2)=int(x*(A[2](x)^2-
> (1-(n/x)^2)*N[2](x)^2),x=1..2);
```

$$K_{22} := \int_1^2 x \left(A_2^2 - \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) N_2^2 \right) dx = -44 n^2 + \frac{36}{5} + 64 n^2 \ln(2)$$

```
>z[2]:=simplify((11/5-2*n^2/3)/(36/5-44*n^2+64*n^2*ln(2)));
```

$$z_2 := -\frac{1}{12} \frac{10 n^2 - 33}{-55 n^2 + 9 + 80 n^2 \ln(2)}$$

```
>z[2]:=evalf(subs(n=1,"));
```

$$z_2 := .2027837922$$

```
>y:=z+x=z[2]*N[2](x)+x;
```

$$y := z + x = .8111351688 (2 - x) (x - 1) + x$$

```
>
```

Mit dem Knotenwert (13) und den *homogenen Randbedingungen* (5) in z erhält man schließlich aus (3) mit (8) und (7b) die Näherung :

$$y(x) = x + \frac{33 - 10n^2}{27 + 15(16 \ln 2 - 11)n^2} (2 - x)(x - 1). \quad (14)$$

Aufgrund der homogenen Randbedingungen (5) in z ist ein eingliedriger *RITZ-Ansatz* analog (7.19) durch

$$z(x) = C_1(2-x)(x-1) \quad (15)$$

gegeben. Darin bestimmt man den Ansatzfreiwert C_1 in Verbindung mit dem Funktional (6) folgendermaßen :

$$\partial J / \partial C_1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C_1 = \frac{33 - 10n^2}{27 + 15(16 \ln 2 - 11)n^2}. \quad (16)$$

Dieser Wert ist mit Hilfe der MAPLE-Software ermittelt worden, wie aus nachstehendem Computerausdruck hervorgeht.

```
>C[1]:=A/B;
```

$$C_1 := \frac{A}{B}$$

```
>A:=Int((1-n^2+x^2)*(2-x)*(x-1),x=1..2)=int((1-n^2+x^2)*(2-x)*(x-1),x=1..2);
```

$$A := \int_1^2 (1 - n^2 + x^2) (2 - x) (x - 1) dx = -\frac{1}{6} n^2 + \frac{11}{20}$$

```
>B:=Int(x*((3-2*x)^2-(1-(n/x)^2)*(2-x)^2*(x-1)^2),x=1..2)=int(x*((3-2*x)^2-(1-(n/x)^2)*(2-x)^2*(x-1)^2),x=1..2);
```

$$B := \int_1^2 x \left((3-2x)^2 - \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) (2-x)^2 (x-1)^2 \right) dx = -\frac{11}{4} n^2 + 4 n^2 \ln(2) + \frac{9}{20}$$

```
>C[1]:=simplify((-n^2/6+11/20)/(9/20-11*n^2/4+4*n^2*ln(2)));
```

$$C_1 := -\frac{1}{3} \frac{10 n^2 - 33}{-55 n^2 + 80 n^2 \ln(2) + 9}$$

Damit ergibt sich die Näherung nach RITZ zu:

```
>y:=z+x=C[1]*(2-x)*(x-1)+x;
```

$$y := z + x = -\frac{1}{3} \frac{(10 n^2 - 33)(2-x)(x-1)}{-55 n^2 + 80 n^2 \ln(2) + 9} + x$$

in Übereinstimmung mit der FEM-Lösung. Für $n=1$ erhält man:

```
>y:=evalf(subs(n=1,"));
```

$$y := z + x = .8111351688 (2. - 1. x) (x - 1.) + x$$

Mit dem Ansatzfreiwert (16) erhält man aus der Substitution (3) mit (15) die erste Näherung nach RITZ, die mit der FEM-Lösung übereinstimmt!

Die *exakte Lösung* der *BESSELschen Differentialgleichung* (1) ergibt sich als Linearkombination

$$\boxed{y = A J_n(x) + B Y_n(x)} . \quad (17)$$

Darin ist $J_n(x)$ die *BESSEL-Funktion erster Art der Ordnung n* , während $Y_n(x)$ als *BESSEL-Funktion* (auch *WEBERSche Funktion*) *zweiter Art der Ordnung n* bezeichnet wird.

Die Ansatzfreiwerte A und B in (17) werden aus den Randbedingungen (2a,b) bestimmt. Die *BESSEL-Funktionen* sind in der MAPLE-Software implementiert. Der folgenden Output zeigt eine Auswertung der exakten Lösung (17) für den Parameter $n = 1$ und die entsprechende Grafik dazu.

```
>solve({A*evalf(BesselJ(1,1))+B*evalf(BesselY(1,1))=1,
```

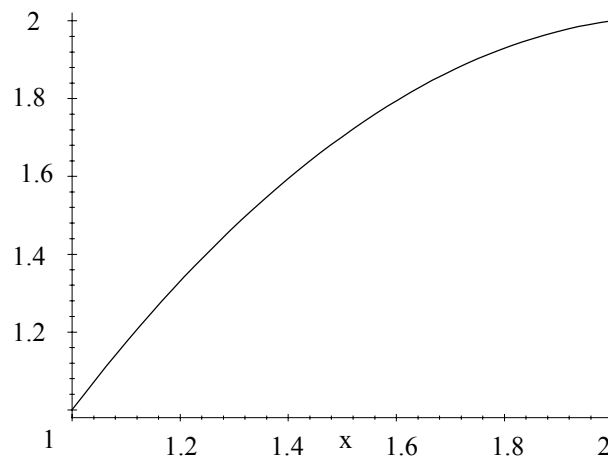
```
A*evalf(BesselJ(1,2))+B*evalf(BesselY(1,2))=2}, {A,B});
```

```
{A = 3.607413011, B = .751964371 }
```

```
>y:=x->3.607413011*BesselJ(1,x)+0.7519643720*BesselY(1,x);
```

```
y := x -> 3.607413011 BesselJ(1, x) + .7519643720 BesselY(1, x)
```

```
>plot(y(x),x=1..2);
```

In der Grafik kann kein Unterschied zwischen der *Näherung* (14) und der *exakten Lösung* (17) festgestellt werden. Daher sind in nachstehender Tabelle einige Funktionswerte gegenübergestellt.

x	1	5/4	3/2	7/4	2
exakte Lösung	1	1,4026	1,7027	1,9019	2
Näherung FEM/RITZ	1	1,4021	1,7028	1,9021	2

Unterschiede ergeben sich erst auf der dritten bzw. vierten Stelle nach dem Komma!