

Reiner M. Dreizler, Cora S. Lüdde

Mathematische Ergänzungen II

12. Januar 2005

Springer

Berlin Heidelberg New York
Barcelona Hong Kong
London Milan Paris
Singapore Tokyo

Vorwort

In den *Mathematischen Ergänzungen* zu dem zweiten Band werden vor allem die in der Theoretischen Physik benötigten speziellen Funktionen (z.B. Legendre- und Besselfunktionen) aufbereitet. Als Rahmen dient ein kurzer Exkurs über gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ein weiteres Thema, das einen breiten Raum einnimmt (und die kurze Darstellung der *Mathematischen Ergänzung I* erweitert) ist die Theorie komplexer Funktionen. Neben einer vollständigen Liste der elementaren Funktionen sind es vor allem die Reihenentwicklungen und die Integration im Komplexen, die aufzuarbeiten sind. Ein Thema, das in der Elektrodynamik (und der Quantenmechanik) eine große Rolle spielt, ist die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Ein mehr pragmatischer Zugang sowie eine ausführliche Darstellung der Technik der Greenschen Funktionen (für Rand- und Anfangswertprobleme) macht den Anfang der Beschäftigung mit diesem Themenbereich. Ein zusätzlicher Abschnitt gibt eine Einführung in die Theorie der Distributionen (einer Erweiterung des Konzeptes einer Funktion), wobei jedoch die Ausführungen im Wesentlichen auf Bemerkungen zu der ‘ δ -Funktion’ beschränkt bleiben. Das Thema Lineare Räume wird ebenfalls weiter ausgebaut. Die Diskussion der Euklidischen Räume in *Mathematische Ergänzungen I* wird durch eine erste Betrachtung von unitären und nichteuklidischen Räumen ergänzt.

Inhaltsverzeichnis

1	Distributionen	1
1.1	Heuristischer Zugang	2
1.2	Eigenschaften der Deltafunktion	4
1.3	Verallgemeinerte Funktionen	8
1.4	Rechenregeln für die Deltafunktion	10
2	Funktionentheorie	13
2.1	Analytische Funktionen I	14
2.2	Elementare Funktionen	16
2.2.1	Potenzen und Wurzeln	16
2.2.2	Die Exponentialfunktion	17
2.2.3	Die trigonometrischen Funktionen	18
2.2.4	Die hyperbolischen Funktionen	21
2.2.5	Der Logarithmus	22
2.2.6	Die zyklometrischen Funktionen	24
2.3	Analytische Funktionen II	25
2.3.1	Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen	25
2.3.2	Kurvenintegrale in der komplexen Ebene	27
2.3.3	Der Cauchysche Integralsatz und die Integralformeln	29
2.3.4	Reihenentwicklungen analytischer Funktionen	33
2.3.5	Laurentreihen und singuläre Stellen	34
2.3.6	Der Residuensatz	37
2.3.7	Eine ganz kurze Klassifikation der komplexen Funktionen	41
3	Partielle Differentialgleichungen	43
3.1	Die Trennung der Variablen	44
3.1.1	Laplacegleichung, zwei kartesische Koordinaten	44
3.1.2	Helmholtz-/Laplacegleichung, kartesische Koordinaten	46
3.1.3	Laplacegleichung, Kugelkoordinaten	47
3.1.4	Laplacegleichung, Zylinderkoordinaten	49
3.2	Randwertaufgaben	49
3.3	Die Greensche Funktion für Randwertaufgaben	53
3.3.1	Definition der Greenschen Funktion	53
3.3.2	Die Greenschen Integralsätze	54

3.3.3	Die allgemeine Lösungsformel des Randwertproblems .	55
3.3.4	Die Symmetrie der Greenschen Funktion	58
3.4	Die retardierte Greensche Funktion für Anfangswertprobleme	59
3.4.1	Definition der retardierten Greensfunktion durch Konturintegration	60
3.4.2	Auswertung des Konturintegrals	64
3.4.3	Variante	66
4	Spezielle Funktionen der mathematischen Physik	69
4.1	Die Gammafunktion	69
4.2	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	71
4.2.1	Beispiele für singuläre Punkte	72
4.2.2	Lösung durch Reihenentwicklung	73
4.3	Die Legendreschen Funktionen	79
4.3.1	Die Legendreschen Polynome	80
4.3.2	Die Eigenschaften der Legendrepolynome	82
4.3.3	Die zugeordneten Legendreschen Funktionen	90
4.3.4	Die Kugelflächenfunktionen	94
4.4	Die Besselfunktionen	98
4.4.1	Generelle Eigenschaften der Lösungen der Besselschen Differentialgleichung	99
4.4.2	Die Funktionen $J_n(x)$	102
4.4.3	Die sphärischen Besselfunktionen	105
4.5	Die hypergeometrische Funktion	108
4.6	Die konfluente hypergeometrische Funktion	109
5	Lineare Räume und Koordinaten	113
5.1	Euklidische und unitäre Vektorräume endlicher Dimension ...	113
5.2	Vektoranalysis in orthogonalen krummlinigen Koordinaten .	117
5.2.1	Zylinderkoordinaten	124
5.2.2	Kugelkoordinaten	125
5.3	Euklidische und unitäre Räume mit der Dimension unendlich	125
5.3.1	Der Hilbertraum	126
5.4	Lineare Räume mit nichteuklidischer Metrik	129
5.4.1	Der Minkowskiraum	131
5.4.2	Zusammenfassung der relativistischen Mechanik und Elektrodynamik in ko-/kontravarianter Schreibweise ..	138
	Literaturverzeichnis	143

1 Distributionen

Mit dem Konzept der Distributionen wird der übliche Funktionsbegriff der Mathematik erweitert. Die Motivation, dieses Thema im Rahmen der Elektrodynamik anzusprechen, ist der Wunsch, eine Punktladung durch eine Ladungsverteilung darzustellen, unabhängig von der Frage, ob eine solche Ladung in der Natur realisiert ist. Betrachtet man z.B. eine Punktladung q an der Stelle $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, so ergibt sich mit dem Gaußtheorem für jede geschlossene Fläche F um die Punktladung die Aussage

$$\oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi k_e q .$$

Das Divergenztheorem und eine Darstellung der Punktladung durch eine Ladungsdichte führt dann auf die Form

$$\iiint_{V(F)} (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = 4\pi k_e q \int_{V(F)} \rho_p(\mathbf{r}) dV ,$$

die für ein jeder Fläche F zugeordnetes Volumen gelten sollte. Um eine Punktladung darzustellen, muss die Ladungsverteilung $\rho_p(\mathbf{r})$ die Bedingung erfüllen

$$\rho_p(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{0} .$$

Andererseits muss die Aussage

$$\iiint_{\text{Raum}} \rho_p(\mathbf{r}) dV = 1$$

gelten, damit die zwei Varianten des Gaußtheorems übereinstimmen. Offensichtlich überfordern diese Bedingungen den Funktionsbegriff. Das mathematische Objekt, das hier angesprochen wird, ist eine spezielle Distribution, die δ -Distribution in drei Raumdimensionen, die in vielen Bereichen der theoretischen Physik gefragt ist. Diese Distribution, die durchweg als δ -Funktion bezeichnet wird, wurde um 1930 von P.A.M. Dirac in der Frühphase der Quantenmechanik eingeführt, die streng mathematische Fundierung der Theorie der Distributionen durch L. Schwartz folgte erst in den Jahren 1950/51.

Man kann versuchen, die δ -Funktion auf eine anschaulich pragmatisch Weise, z.B. durch eine Grenzbetrachtung mit gewöhnlichen Funktionen zu

fassen (Math.Kap. 1.1). Es zeigt sich jedoch, dass dieser pragmatische Zugang mit Vorsicht zu genießen ist: Man gerät schnell in dubioses mathematisches Fahrwasser, obschon einige der Eigenschaften der δ -Funktion gewonnen werden können (Math.Kap. 1.2). Aus diesem Grund ist es notwendig, das Programm von Schwartz, in dem Distributionen als eine Verallgemeinerung des üblichen Funktionsbegriffes definiert werden, zumindest in den Grundzügen, zu betrachten (Math.Kap. 1.3). Das Kapitel wird durch eine Zusammenstellung der Eigenschaften der δ -Funktion abgerundet (Math.Kap. 1.4).

1.1 Heuristischer Zugang

Da sich die δ -Funktion in drei Raumdimensionen als eine einfache Erweiterung des Falles von einer Raumdimension herausstellt, ist es ausreichend, die δ -Funktion in einer Variablen zu betrachten. Übertragen auf diesen Fall lauten die zwei Forderungen (für eine Punktladung an der Stelle $x = 0$)

$$\rho_p(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_p(x) dx = 1$$

bzw. etwas allgemeiner (für eine Punktladung an der Stelle x_0)

$$\rho_p(x - x_0) = 0 \quad \text{für} \quad x \neq x_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_p(x - x_0) dx = 1.$$

Es ist möglich, zu zeigen, dass die Grenzwertfunktion

$$\rho_p(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)}$$

die geforderten Eigenschaften besitzt. Dies ist nur eine von mehreren Möglichkeiten. Andere Grenzwertfunktionen, die die Forderung ebenfalls erfüllen, sind z.B.

$$\rho_p(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} \right]$$

$$\rho_p(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin kx}{x} \right].$$

Der Beweis der obigen Behauptung sieht folgendermaßen aus. Für die Funktion von zwei Variablen

$$f(\varepsilon, x) = \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

gilt für alle Werte von $x \neq 0$ der Grenzwert

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(\varepsilon, x) = 0.$$

Auf der anderen Seite notiert man jedoch

$$f(\varepsilon, 0) = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{so dass} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon, 0) \longrightarrow \infty.$$

Zur Berechnung des uneigentlichen Integrals über die Funktion $\varepsilon/(x^2 + \varepsilon^2)$ benötigt man die Schritte

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \frac{1}{(1 + z^2)} dz \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} 2 \arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) = \pi. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon, x) dx = 1.$$

Es gilt auch

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_{-a}^a \frac{\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)} dx \right] = \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-a}^a \frac{\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)} dx \right],$$

vorausgesetzt man wertet das eigentliche Integral aus, bevor die Grenzprozesse durchgeführt werden. In diesem Sinn können die Grenzprozesse $\varepsilon \rightarrow 0$ und $a \rightarrow \infty$ vertauscht werden.

Man kann explizit verfolgen, wie sich die Funktion $f(\varepsilon, x)$ in dem Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ verhält. Die Funktion schrumpft für abnehmendes ε auf eine immer

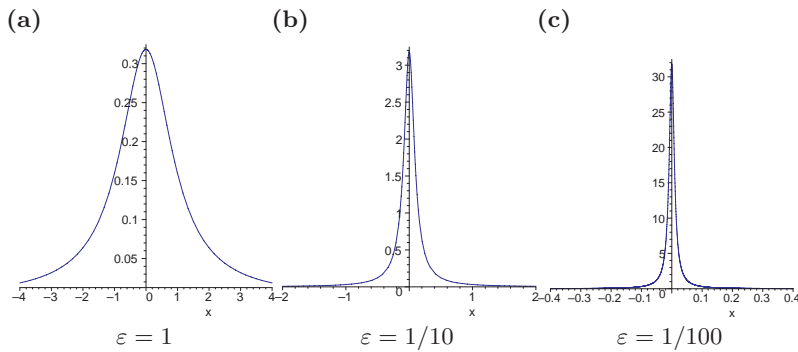


Abb. 1.1. Heuristische Definition der δ -Funktion

kleinere Umgebung des Punktes $x = 0$ zusammen. Auf der anderen Seite wächst der Wert der Funktion in einer Weise, dass die Fläche unter der Kurve konstant bleibt. Die Darstellung des Grenzfalles ist natürlich nicht möglich.

Anhand dieser Betrachtungen würde man die folgende Charakterisierung der δ -Funktion geben: Die ‘Funktion’ $\delta(x)$ kann als Grenzwertfunktion von $f(\varepsilon, x) = \varepsilon/(x^2 + \varepsilon^2)$ mit $\varepsilon \rightarrow 0$ dargestellt werden. Dabei existiert der Grenzwert in dem üblichen Sinn nicht. Der Grenzwert des uneigentlichen Integrals mit dieser Funktion ist jedoch definiert.

Sitzt die Punktladung ($q = 1$) in der eindimensionalen Welt nicht an der Stelle $x_0 = 0$, sondern an einer beliebigen Stelle x_0 , so lautet die entsprechende Definition

$$\rho_p \equiv \delta(x - x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left[\frac{\varepsilon}{(x - x_0)^2 + \varepsilon^2} \right].$$

Anhand dieser ‘Definition’ kann man nun versuchen, die Eigenschaften der δ -Funktion zu diskutieren.

1.2 Eigenschaften der Deltafunktion

Einige der Eigenschaften der δ -Funktion kann man mit Hilfe der pragmatischen Definition nachweisen. Beispiele sind:

(1) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - x) dx \quad (= 1)$$

oder in Kurzform

$$\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x) \quad \text{bzw.} \quad \delta(x) = \delta(-x).$$

Die δ -Funktion ist symmetrisch. Diese Eigenschaft ergibt sich aus der Tatsache, dass die Funktion $f(\varepsilon, x)$ symmetrisch in x ist und dass diese Eigenschaft bei dem Grenzprozess nicht verloren geht.

(2) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0),$$

vorausgesetzt die Funktion $f(x)$ kann an der Stelle x_0 in eine Potenzreihe entwickelt werden. Man kann diese Eigenschaft der δ -Funktion auch folgendermaßen ausdrücken: Die δ -Funktion ‘sieht’ nur den Wert der Funktion f an der Stelle x_0 . Man kann also $f(x)$ in dem Integral sozusagen durch $f(x_0)$ ersetzen und dann vor das Integral ziehen. Der Beweis dieser Eigenschaft ist etwas aufwendiger. Man betrachtet der Einfachheit wegen den Fall $x_0 = 0$ und schreibt

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \delta(x) f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} I(a),$$

mit der Definition

$$I(a) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^a \frac{\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)} f(x) dx .$$

Kann die Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe um die Stelle $x = 0$ entwickelt werden, so folgt

$$I(a) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \int_{-a}^a \frac{\varepsilon x^n}{(x^2 + \varepsilon^2)} dx .$$

Es sind dann die Integrale

$$I_n(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varepsilon x^n}{(x^2 + \varepsilon^2)} dx ,$$

bzw. mit der Substitution $x = \varepsilon t$

$$I_n(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^n}{\pi} \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \frac{t^n}{(1+t^2)} dt$$

zu berechnen. Da der Integrand für ungerades n eine ungerade Funktion ist, folgt

$$I_n(\varepsilon) = 0 \quad \text{für } n \text{ ungerade} .$$

Für n gerade schreibt man

$$\begin{aligned} I_n(\varepsilon) &= \frac{\varepsilon^n}{\pi} \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \frac{(t^{n-2}(1+t^2) - t^{n-2})}{(1+t^2)} dt \\ &= \frac{\varepsilon^n}{\pi} \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} t^{n-2} dt - \varepsilon^2 I_{n-2}(\varepsilon) . \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral ist trivial, so dass man die Rekursionsformel

$$I_n(\varepsilon) = \left(\frac{2a^{n-1}}{(n-1)\pi} \right) \varepsilon - \varepsilon^2 I_{n-2}(\varepsilon)$$

gewinnen kann. Zur Auswertung der Rekursion benötigt man (wie oben benutzt)

$$I_0(\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) .$$

Setzt man nun voraus, dass die Grenzprozesse

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty}$$

vertauscht werden können, so folgt

$$I_0(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$$

$$I_2(\varepsilon) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)\varepsilon - \frac{2}{\pi}\varepsilon^2 \arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\vdots$$

$$I_n(\varepsilon) = \left(\frac{2a^{n-1}}{(n-1)\pi}\right)\varepsilon - \varepsilon^2 I_{n-2}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Im Endeffekt lautet das Argument

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) I_n(\varepsilon) \\ &\stackrel{!}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_n(\varepsilon) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} f(0) = f(0). \end{aligned}$$

Der nichttriviale Nachweis, dass die angedeuteten Grenzprozesse vertauscht werden können, wird hier nicht ausgeführt.

(3) Es gilt ($a \neq 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) f(x) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx$$

oder in der üblichen Kurzform

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

Der Beweis ergibt sich durch einfache Substitution, z.B. für $a > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(ax) dx &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right) \delta(t) dt \\ &= \frac{1}{a} f(0) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx. \end{aligned}$$

Für $a < 0$ gilt wegen der Symmetrie der δ -Funktion

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(ax) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(-|a|x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(|a|x) dx. \end{aligned}$$

Eine alternative Definition der δ -Funktion kann man mit Hilfe der Ableitung der Stufenfunktion $\Theta(x)$ angeben. Diese Funktion wird durch die Angaben

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

definiert (Varianten in der Definition mit $x \geq 0$, $x < 0$ oder $x > 0$, $x \leq 0$ sind möglich). Das Integral

$$I = \int_{-a_1}^{a_2} \frac{d\Theta(x)}{dx} f(x) dx ,$$

wobei a_1 und a_2 positive Zahlen sind, kann man mittels partieller Integration auswerten und findet

$$I = \Theta(x)f(x) \Big|_{-a_1}^{a_2} - \int_{-a_1}^{a_2} \Theta(x)f'(x) dx = f(a_2) - \int_0^{a_2} f'(x) dx = f(0) .$$

Das Resultat entspricht der Aussage

$$\int_{-a_1}^{a_2} \frac{d\Theta(x)}{dx} f(x) dx = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx .$$

Die Ableitung der Stufenfunktion stellt eine alternative Definition der δ -Funktion dar.

Die Argumentation wird problematisch, wenn man die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x - x_0) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0)$$

für die Ableitungen der δ -Funktion beweisen möchte. Diese Formel kann man durch ein mathematisch nicht ganz sauberes Argument illustrieren, doch nicht streng beweisen. So findet man für die erste Ableitung durch partielle Integration (deren Anwendung stückweise stetige Funktionen voraussetzt)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) dx = \delta(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f'(x) dx$$

und argumentiert: Der erste Term verschwindet, da $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$ ist. Somit folgt wegen der Eigenschaft (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) dx = -f'(0) .$$

Wiederholt man das Argument für höhere Ableitungen, z.B. für

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta''(x) f(x) dx = \delta'(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f'(x) dx ,$$

so entsteht die Frage, welche Bemerkung man zu $\delta'(x)$ bzw. $\delta'(x)f(x)$ machen kann. Entsprechendes gilt für die höheren Ableitungen.

Versucht man den Nachweis der Relation mit den Ableitungen der δ -Funktion mittels der Grenzwertdefinition zu erbringen, so gerät man in

größere Schwierigkeiten. Der Grund ist: Nur Integrale mit Ableitungen der δ -Funktion sind wohldefiniert. Die Ableitungen selbst können nicht widerspruchsfrei definiert werden. Da für derartige Objekte der Differentialquotient nur in dieser eingeschränkten Form (unter einem Integralzeichen) definiert ist, können sie keine Grenzwertfunktionen sein. Diese Unstimmigkeiten im Umgang mit der Grenzwertdefinition lassen sich jedoch mit dem Programm von Schwartz zur Definition von verallgemeinerten Funktionen beheben.

1.3 Verallgemeinerte Funktionen

Ausgangspunkt der Überlegungen ist der Begriff des Funktional in der Form

$$T[\rho, f] = \int_a^b \rho(x) f(x) dx .$$

Jedem Paar von Funktionen wird durch diese Vorschrift eine Zahl zugeordnet

$$\{\rho(x), f(x)\} \longrightarrow T[\rho, f] .$$

Die Frage, die im Endeffekt zur Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes führt, lautet: Kann man diese Zuordnung umkehren? Kann man durch Vorgabe eines Satzes von Funktionen $f_n(x)$ und Zahlenwerten T_n mit z.B. $n = 1, 2, \dots$ eine Funktion $\rho(x)$ definieren?

Einen Hinweis auf die Beantwortung dieser Fragen ergibt sich aus der Theorie der Funktionsreihen, z.B. der Fourierreihen. Die übliche Aussage über Fourierreihen lautet: Die Fourierdarstellung einer Funktion $\rho(x)$ in dem Intervall $[0, 2\pi]$ hat die Form

$$\rho(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n e^{inx} ,$$

wobei die Koeffizienten T_n durch

$$T_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(x) e^{-inx} dx$$

zu berechnen sind. Die Reihe stellt die Funktion $\rho(x)$ eindeutig dar, wenn sie gleichmäßig konvergiert.

Man kann den gleichen Sachverhalt beschreiben, indem man die Akzente etwas verschiebt und dabei den Sprachgebrauch, der bei der Diskussion der verallgemeinerten Funktionen üblich ist, einführt. Durch den Satz von Testfunktionen

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-inx} \quad (0 \leq x \leq 2\pi, \quad n = 0, \pm 1, \dots)$$

und durch die Vorgabe des Satzes von Zahlenwerten

$$T_n = T_n[\rho, f_n] = \int_0^{2\pi} \rho(x) f_n(x) dx$$

ist die Funktion $\rho(x)$ in dem Intervall $[0, 2\pi]$ eindeutig definiert. Man könnte alle Eigenschaften von $\rho(x)$ auch anhand des Satzes von Größen $\{T_n\}$, bzw. der Reihe, in der diese Größen als Entwicklungskoeffizienten auftreten, diskutieren.

Diesen Sachverhalt hat L. Schwartz als Hintergrund für die Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes benutzt. Zur Durchführung des Programmes sind die folgenden Schritte notwendig:

- (1) Man definiert einen geeigneten Satz von Testfunktionen $\{f_n(x)\}$. Abzählbarkeit ist nicht unbedingt erforderlich, doch ist es einfacher mit einem derartigen Satz zu argumentieren anstatt mit einem allgemeinen Satz $\{f(x)\}$. Eine zulässige Testfunktion ist durch die folgenden Aussagen charakterisiert:

- (1a) Sämtliche Ableitungen von f_n existieren und sind stetig. Diese Aussage wird für die Definition der verallgemeinerten Funktion eigentlich nicht benötigt. Man braucht sie, um die Ableitungen der verallgemeinerten Funktion zu diskutieren.

- (1b) Es gibt ein $a > 0$, so dass alle $f_n(x) = 0$ für $x^2 \geq a$ ist. Diese Forderung garantiert, dass das Integral (sprich Funktional)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) f_n(x) dx$$

für jede stetige Funktion ρ existiert.

- (1b') Alternativ kann man verlangen, dass jede Testfunktion f_n , zusammen mit ihren Ableitungen, für $|x| \rightarrow \infty$ schneller gegen Null strebt als eine beliebige Potenz von $1/|x|$. Die Testfunktionen müssen im asymptotischen Bereich schnell genug abfallen.

- (1b'') Andere Varianten von Testräumen sind möglich.

Man beweist dann,

- (2) dass für jeden Satz von Forderungen (1) hinreichend viele Testfunktionen existieren und dass die Zuordnung

$$\{\rho, f_n\} \longrightarrow T_n = T[\rho, f_n]$$

immer eindeutig umkehrbar ist

$$\{T_n, f_n\} \longrightarrow \rho(x) .$$

Man bezeichnet einen Satz von Funktionalen $\{T_n\}$ über einem wohldefinierten Raum von Testfunktionen als eine verallgemeinerte Funktion.

Anstatt eine Funktion in der üblichen Weise durch eine Zuordnung der Form $x \longrightarrow f(x)$ zu definieren, charakterisiert man sie durch die Vorgabe eines Satzes von Funktionalen. Die zweite Charakterisierung ist im Fall von Funktionen völlig äquivalent zu der ersten. Sie hat jedoch den Vorteil, dass sie wesentlich umfassender ist. Zwei Beispiele sollen diese Aussage andeutungsweise belegen.

In dem ersten Beispiel werden als Testfunktionen

$$f_n(x) = e^{-n^2 x^2} \quad n = 1, 2, \dots$$

gewählt. Diese Funktionen erfüllen die Forderungen (1a) und (1b'). Betrachtet man zusätzlich den Satz von Funktionalen

$$T_n = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{n^3} \implies \int_0^\infty \rho(x) f_n(x) dx ,$$

so ist durch diese Vorgaben eine (verallgemeinerte) Funktion definiert. In diesem Beispiel könnte man nachrechnen, dass gilt

$$T_n = \int_0^\infty x^2 f_n(x) dx .$$

Die Vorgaben definieren (zugegebenermaßen auf ungewöhnliche Weise) die stetige Funktion $\rho(x) = x^2$. Ist $\rho(x)$ stetig, so spricht man von einer regulären verallgemeinerten (also einer normalen) Funktion.

In dem zweiten Beispiel fordert man

$$T[\rho, f] = f(0)$$

für jede zulässige Testfunktion $f(x)$. Jeder Testfunktion wird ihr Wert an der Stelle $x = 0$ zugeordnet. In dem vorangehenden Abschnitt wurde gezeigt, dass diese Forderung nicht durch eine normale Funktion erfüllt sein kann. Diese Forderung definiert die δ -Funktion und zwar vollständig und eindeutig.

Man ist also mit diesem Programm in der Lage, normale Funktionen als auch Distributionen oder notfalls noch allgemeinere Konstrukte auf ein und derselben Ebene zu diskutieren. Anstatt mit den Standardzuordnungen $x \longrightarrow \rho(x)$ zu operieren, verlegt man sich auf die Betrachtung von Sätzen von Funktionalen. Alle weiteren Eigenschaften der verallgemeinerten Funktion kann man aus dem Satz von Funktionalen gewinnen, so z.B.

$$T[\rho', f] = -f'(0)$$

für die δ -Funktion, oder allgemeinere Rechenregeln. Für weitere Ausführungen zu dem Thema 'verallgemeinerte Funktionen' wird jedoch auf die Literaturliste verwiesen.

1.4 Rechenregeln für die Deltafunktion

Zum Abschluss dieses Kapitels sollen noch einmal die Regeln für den praktischen Umgang mit der δ -Funktion zusammengestellt werden. Diese Regeln kann man zum Teil über die heuristische Definition nachempfinden. Ein strenger Nachweis lässt sich nur mittels der Benutzung von geeigneten Folgen von Testfunktionen führen.

1. Für jedes Intervall I um die Stelle x_0 und für jede in diesem Intervall differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt

$$\int_I f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) ,$$

insbesondere ist

$$\int_I \delta(x - x_0) dx = 1 .$$

Zur Abkürzung schreibt man auch

$$f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \delta(x - x_0) .$$

Eine differenzierbare Funktion $f(x)$, die unter einem Integralzeichen als Faktor von $\delta(x - x_0)$ auftritt, kann durch den Wert der Funktion an der Stelle x_0 ersetzt werden.

2. Die δ -Funktion ist eine gerade Distribution

$$\int_I f(x) \delta(x - x_0) dx = \int_I f(x) \delta(x_0 - x) dx .$$

Diese Rechenregel wird oft in der Form

$$\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$$

zitiert. Die δ -Funktion ist eine gerade 'Funktion'.

3. Ist das Argument der δ -Funktion mit einem Faktor a skaliert, so gilt

$$\int_I f(x) \delta(ax) dx = \frac{1}{|a|} \int_I f(x) \delta(x) dx = \frac{1}{|a|} f(0) .$$

Setzt man $a = -1$, so entspricht dies der Regel 2: $\delta(x) = \delta(-x)$.

4. Hat die Funktion $g(x)$ einfache Nullstellen x_1, \dots, x_n , so gilt für ein Intervall I , das alle Nullstellen enthält,

$$\begin{aligned} \int_I f(x) \delta(g(x)) dx &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{|g'(x_i)|} \int_I f(x) \delta(x - x_i) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{|g'(x_i)|} f(x_i) . \end{aligned}$$

Die Größe $g'(x_i)$ stellt die Ableitung der Funktion $g(x)$ an der Stelle x_i dar. Insbesondere ist z.B.

$$\begin{aligned} \int_I f(x) \delta(x^2 - x_0^2) dx &= \frac{1}{2|x_0|} \int_I f(x) (\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)) dx \\ &= \frac{1}{2|x_0|} (f(x_0) + f(-x_0)) . \end{aligned}$$

5. Die δ -Funktion ist die Ableitung der Stufenfunktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases} .$$

Es gilt also

$$\frac{d\Theta(x)}{dx} = \delta(x) \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^x \delta(x') dx' = \Theta(x) .$$

6. Die Relation

$$\int_I f(x) \delta'(x - x_0) dx = -f'(x_0)$$

definiert die Ableitung $\delta'(x - x_0)$ der δ -Funktion. Die Verallgemeinerung für die n -te Ableitung lautet

$$\int_I f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0) .$$

7. Eine viel benutzte Darstellung der δ -Funktion ist das Integral

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} .$$

Der Grund ist, dass diese Darstellung infolge der Faktorisierung der Exponentialfunktion auf höhere Raumdimensionen erweitert werden kann, so z.B. für

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x(x-x')} \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_y(y-y')} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z(z-z')} \right] \\ &= \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint dk^3 e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \right] . \end{aligned}$$

Das Dreifachintegral erstreckt sich über den gesamten \mathbf{k} -Raum.

2 Funktionentheorie

Die Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen ist ein besonderes Hilfsmittel zur Fassung von Problemstellungen der theoretischen Physik. Es stellt sich heraus, dass die Übertragung von Begriffen wie Grenzwert einer Funktion, Stetigkeit und Differenzierbarkeit von der reellen Analysis ins Komplexe zunächst nur eine Formsache zu sein scheint. Nach der Einführung des Begriffes ‘Differenzierbarkeit’ zeigt sich jedoch, dass ein grundlegender Unterschied zwischen Funktionen einer reellen und einer komplexen Veränderlichen besteht: Bei Funktionen einer reellen Veränderlichen kann man aus der Existenz der ersten Ableitung nichts über die Eigenschaften von etwaigen höheren Ableitungen schließen. Für Funktionen von einer komplexen Veränderlichen folgt hingegen aus der Existenz einer ersten Ableitung automatisch die Existenz aller höheren Ableitungen. In einer etwas präziseren Formulierung lautet die Aussage:

Ist eine Funktion $w = f(z)$ in einem offenen und zusammenhängenden Gebiet \mathcal{G} definiert und existiert in dem Gebiet die Ableitung $f'(z)$, so existieren dort auch alle höheren Ableitungen $f''(z), f'''(z), \dots$.

Solche Funktionen bezeichnet man als (in dem Gebiet) **reguläre analytische Funktionen**, bzw. in Abkürzung nur als reguläre oder nur als analytische Funktionen. Die Festlegung ‘offen’ besagt, dass Randpunkte dem Gebiet nicht zugerechnet werden, sonst wird es als abgeschlossen bezeichnet. Die Bezeichnung ‘zusammenhängend’ verlangt, dass zwei Punkte des Gebietes durch Kurven, die ganz in dem Gebiet verlaufen, verbunden werden können.

Das Kapitel beginnt mit der Übertragung der Grundbegriffe der reellen Analysis auf den Fall von Funktionen einer komplexen Variablen und einer ersten Charakterisierung der Klasse der analytischen Funktionen. Es folgt eine Zusammenstellung der Eigenschaften der elementaren Funktionen im Komplexen. In einem dritten Abschnitt werden die Eigenschaften analytischer Funktionen näher vorgestellt: die Charakterisierung durch Differentialgleichungen, Integrale mit komplexen Funktionen, die Integralformeln von Cauchy, Reihenentwicklungen und das Residuentheorem. Das Kapitel endet, als Ausblick, mit einer kurzen Klassifikation der komplexen Funktionen.

2.1 Analytische Funktionen I

Die Neufassung der Begriffe Grenzwert, Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion einer komplexen Veränderlichen

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad z = x + iy$$

beinhaltet die Aussagen:

- Man bezeichnet w_0 als den Grenzwert einer Funktion $f(z)$ an der Stelle z_0 , falls für *jede* Zahlenfolge $\{z_n\}$ aus dem Definitionsbereich von $f(z)$ mit dem Grenzwert z_0 die Folge der zugehörigen Funktionswerte $f(z_n)$ stets gegen w_0 streben.

Wie im Reellen bedeutet der Begriff des Grenzwertes nur, dass man diesem Wert beliebig nahe kommen kann, wobei der Unterschied zwischen zwei komplexen Zahlen durch den Betrag $|f(z_n) - w_0|$ charakterisiert wird. Der Grenzwert macht keine Aussage über den Funktionswert an der Stelle z_0 . Die Definition unterscheidet sich formal nicht von der entsprechenden Definition im Reellen, so dass im Komplexen die gleichen Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten gelten wie im Reellen.

- Der Begriff der Stetigkeit verbindet eine Grenzwertaussage mit dem Funktionswert: Die Funktion $f(z)$ ist an der Stelle z_0 stetig, falls

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

ist, Funktionswert und Grenzwert also übereinstimmen.

- Eine Funktion $f(z)$ ist an der Stelle z_0 ihres Definitionsbereiches differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z) \quad \left[= \frac{df(z)}{dz} = \frac{dw}{dz} = w' \right]$$

existiert.

Die Ableitung in dem Punkt z_0 ist nur definiert, falls man den gleichen Grenzwert in diesem Punkt erhält, unabhängig von der Richtung in der komplexen z -Ebene, mit der man sich dem Punkt annähert. So findet man z.B. für die Funktion $w = z^*$ unterschiedliche Grenzwerte für eine Annäherung an einen Punkt parallel zur reellen bzw. zur imaginären Achse. Diese Funktion ist nicht differenzierbar. In diesem Sinn ähnelt die Funktion $f(z)$ einer Funktion von zwei reellen Variablen $f(x, y)$, obschon anderweitig deutliche Unterschiede bestehen.

Wieder kann man infolge der formalen Ähnlichkeit der Definitionen alle Rechenregeln mit Ableitungen wie die Kettenregel, die Definition von höheren Ableitungen, etc. ins Komplexe übertragen.

Eine Standardmethode zur Definition von elementaren (und nicht so elementaren) Funktionen benutzt die Darstellung durch Potenzreihen

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n ,$$

wobei je nach Situation ein Konvergenzradius R zwischen Null und unendlich ($0 < R \leq \infty$) vorliegen kann. Für Funktionen, die auf diese Weise definiert werden, gelten die folgenden Aussagen:

- Die durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion $f(z)$ ist an jeder Stelle z_i innerhalb des Konvergenzkreises ($|z_i| < R$) stetig und differenzierbar. Die Ableitung kann durch gliedweise Differentiation gewonnen werden

$$f'(z_i) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z_i^n .$$

- Die Potenzreihe ist an jeder inneren Stelle beliebig oft differenzierbar. Für die k -te Ableitung an der Stelle z_i gilt

$$f^{(k)}(z_i) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \cdots (n+k) a_{n+k} z_i^n \quad k = 1, 2, \dots .$$

- Die Entwicklung um die Stelle $z = 0$ kann in der Umgebung eines inneren Punktes durch eine Potenzreihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_i)}{n!} (z - z_i)^n$$

dargestellt werden.

In Band 1 Math.Kap. 7.3 wurde gezeigt, dass eine komplexe Funktion $w = f(z)$ die Abbildung eines Bereiches \mathcal{G} der z -Ebene auf einen Bereich \mathcal{B} der w -Ebene vermittelt. Eine Abbildung durch eine analytische Funktion, also einer beliebig oft differenzierbaren Funktion, die durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann, hat unter der Voraussetzung, dass die Ableitung in einem Punkt z von Null verschieden ist, die Eigenschaften:

- Hat der Winkel zwischen zwei Kurven durch den Punkt z den Wert γ , so hat der Winkel zwischen den Bildkurven den gleichen Wert. Diese Eigenschaft der Winkeltreue folgt direkt aus der Definition der ersten Ableitung in dem Punkt z (Abb. 2.1).
- Ebenfalls aus der Definition der ersten Ableitung, dieses Mal aus der Betrachtung des Betrages anstelle des Arcus, folgt, dass alle von einem Punkt z ausgehenden ‘kleinen’ Vektoren in dem selben Verhältnis $1 : |f'(z)|$ gestreckt werden. Die Abbildung ist (im Kleinen) maßstabsgetreu.
- Eine Abbildung mit den genannten Eigenschaften bezeichnet man als **konform**.

Zusammenfassend kann man feststellen: Eine durch eine analytische Funktion vermittelte Abbildung ist in der Umgebung jeder Stelle, an der die Ableitung nicht verschwindet, konform.

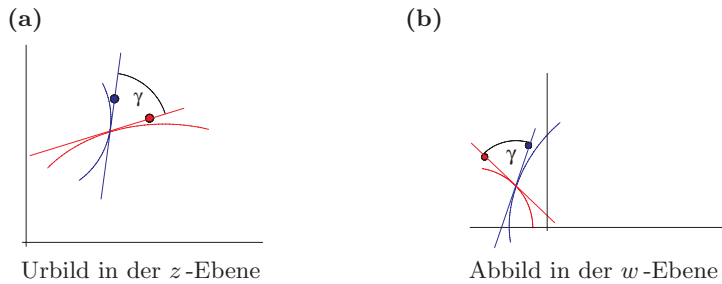


Abb. 2.1. Eigenschaften der konformen Abbildung

2.2 Elementare Funktionen

In dem Band 1 Math.Kap. 7.3 wurden nur die lineare Funktion $w = az + b$, die quadratische Funktion $w = z^2$ und die Exponentialfunktion $w = e^z$ angesprochen. Eine Ergänzung der ersten zwei Beispiele sind

2.2.1 Potenzen und Wurzeln

Die Funktion $w = z^n$, wobei n eine natürliche Zahl größer als 1 ist, ist in der ganzen z -Ebene analytisch. Die Ableitung $w' = nz^{n-1}$ ist, außer im Nullpunkt, von Null verschieden. Die Funktion vermittelt also in der ganzen Ebene, außer dem Nullpunkt, eine konforme Abbildung.

Durch die Funktion $w = z^2$ wird jeweils eine Halbebene auf die ganze w -Ebene abgebildet. Zur Darstellung der Abbildung benutzt man eine **Riemannsche Fläche**, in der zwei Blätter übereinander liegen und entlang der reellen Achse über Kreuz aneinandergefügt sind. Jeder von Null verschiedene Punkt ist somit zweimal (auf dem oberen und dem unteren Blatt) vorhanden. Der Nullpunkt, der nur einmal vorhanden ist, wird als **Verzweigungspunkt** oder **Windungspunkt** bezeichnet.

Die Abbildung durch die Funktion $w = z^n$ mit $n > 2$ kann man, wie den Fall $n = 2$, in der Darstellung durch Polarkoordinaten im Detail diskutieren. Es werden nun Winkelsegmente mit der Öffnung $2\pi/n$ und dem Scheitelpunkt $z = 0$ auf die ganze w -Ebene abgebildet. Zur Darstellung benutzt man in diesem Fall eine Riemannsche Fläche aus n Blättern, wobei aufeinander folgende Blätter und das letzte und das erste Blatt miteinander zu verbinden sind (siehe Abb. (2.2) für $n = 4$). Der Nullpunkt ist auch hier ein Verzweigungspunkt.

Da die Abbildung der einfachen z -Ebene auf die n -fach überdeckte w -Ebene bis auf den Nullpunkt umkehrbar eindeutig ist, kann man feststellen, dass es für die Funktion $z = w^{1/n}$ zu jedem $w \neq 0$ genau n verschiedene Werte z gibt, für die $z^n = w$ ist. Diese z -Werte, die auf einem Kreis um den Nullpunkt liegen, bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks (siehe Abb. (2.2) für $n = 4$). Man bezeichnet sie als die n -te Wurzel aus w

$$z = \sqrt[n]{w}.$$

Explizit kann man diese Aussage nachempfinden, wenn man die Darstellungen

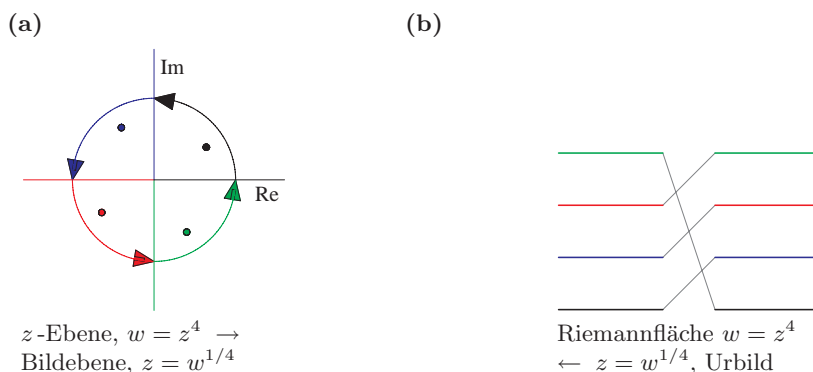


Abb. 2.2. Die Funktion $w = z^4$

$z = a e^{i\varphi}$ und $w = A e^{i\psi}$ benutzt. Es ist dann

$$A = a^n \quad \text{und} \quad \psi = n\varphi.$$

Da die Beträge der komplexen Zahlen positiv sind, lautet die Lösung der ersten Gleichung $a = \sqrt[n]{A}$. Die zweite Gleichung wird wegen der Kongruenz mod 2π durch die n Werte

$$\varphi = \frac{\psi}{n}, \frac{\psi + 2\pi}{n}, \frac{\psi + 4\pi}{n}, \dots, \frac{\psi + (n-1)\pi}{n}$$

erfüllt. Die verschiedenen Wurzeln von $\sqrt[n]{w}$ sind also

$$z_k = \sqrt[n]{A} \left(\cos \frac{\psi + k\pi}{n} + i \sin \frac{\psi + k\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

Zusätzlich ist (eindeutig)

$$\sqrt[n]{0} = 0.$$

Als **Hauptwert** der n -ten Wurzel aus w bezeichnet man den Wert mit $k = 0$.

2.2.2 Die Exponentialfunktion

Alle Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion lassen sich aus der Definition durch die absolut konvergente Potenzreihe

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

herleiten. Diese Funktion ist in der gesamten Ebene analytisch. Die Eigenschaften dieser Funktion, die in Band 1 Math.Kap 7.3 diskutiert wurden, sollen hier nur noch einmal ohne Kommentar zusammengestellt werden.

1. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)}$
2. $e^z = e^{(x+iy)} = e^x (\cos y + i \sin y)$
3. $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \quad \operatorname{arc}(e^z) = \operatorname{Im}(z)$
4. $e^{2\pi i} = 1 \quad e^{z+2n\pi i} = e^z$
5. $\frac{de^z}{dz} = e^z$
6. Infolge der Periodizität der Exponentialfunktion mit komplexen Argumenten existiert ein Fundamentalbereich. Dies ist ein Streifen parallel zur reellen Achse, der üblicherweise mit

$$-\pi < \operatorname{Im}(z) \leq +\pi$$

angegeben wird. Die Exponentialfunktion nimmt für z -Werte aus diesem Bereich jeden (von Null verschiedenen) Wert genau einmal an.

2.2.3 Die trigonometrischen Funktionen

Die Fortsetzung der Kosinus- und der Sinusfunktionen ins Komplexe wird durch die konvergenten Reihen

$$\begin{aligned}\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

vermittelt. Auch für diese analytischen Funktionen kann man alle Eigenschaften, wie die **Eulerschen Formeln**

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \sin z_2 + \sin z_1 \cos z_2\end{aligned}$$

und den daraus folgenden Formelapparat, sowie die Ableitungsformeln

$$\frac{d \cos z}{dz} = -\sin z \quad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z$$

etc., aus den Reihendarstellungen gewinnen. Die Periodizitätsbedingungen

$$\cos(z + 2n\pi) = \cos z \quad \text{und} \quad \sin(z + 2n\pi) = \sin z$$

führen wie im Reellen auf die Existenz eines Fundamentalbereiches parallel zur imaginären Achse. In dem Streifen, charakterisiert durch

$$-\pi < \operatorname{Re}(z) \leq +\pi ,$$

nehmen die komplexe Kosinus- und Sinusfunktion jeden von ± 1 verschiedenen Wert an genau zwei verschiedenen Stellen an. Die Werte ± 1 werden an genau einer Stelle des Streifen angenommen.

Da die Nullstellen der zwei Funktionen die gleichen sind wie im Reellen (n ganzzahlig)

$$\cos z = 0 \rightarrow z = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \sin z = 0 \rightarrow z = n\pi ,$$

sind die durch diese Funktionen vermittelten Abbildungen konform, außer an den Stellen $z = n\pi$ für den Kosinus und $z = (2n+1)\pi/2$ für den Sinus.

Die Tangens- und die Kotangensfunktion können im Komplexen wie im Reellen über die Kosinus- und die Sinusfunktion definiert werden

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} .$$

Die Eigenschaften dieser Funktionen mit komplexen Argumenten lassen sich somit aus den Eigenschaften von $\cos z$ und $\sin z$ ableiten. So ist

- die Tangensfunktion in der gesamten z -Ebene regulär, außer an den Stellen $z = (2n+1)\pi/2$, für die $\cos z = 0$ ist.
- Entsprechend ist die Kotangensfunktion in der gesamten Ebene regulär, außer für $z = n\pi$.

Infolge der Periodizität

$$\tan(z + \pi) = \tan z \quad \text{und} \quad \cot(z + \pi) = \cot z$$

wählt man als Fundamentalstreifen in diesem Fall

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) \leq +\frac{\pi}{2} .$$

In diesem Streifen nehmen $\tan z$ und $\cot z$ jeden von $\pm i$ verschiedenen Wert genau einmal an, die Werte $\pm i$ treten nicht auf.

Für die Ableitungen gilt wie im Reellen

$$\frac{d \tan z}{dz} = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \frac{d \cot z}{dz} = -\frac{1}{\sin^2 z} .$$

Diese Ableitungen verschwinden nicht, also ist die durch die Tangens- und die Kotangensfunktion vermittelte Abbildung an jeder Stelle, an der diese Funktionen definiert sind, konform.

Um die Reihenentwicklung dieser Funktionen zu gewinnen, kann man auf die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion zurückgreifen. Man schreibt z.B. für $z \cot z$ (Multiplikation mit z , um die Singularität bei $z = 0$ zu vermeiden)

$$z \cot z = iz \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = iz \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} ,$$

setzt die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion im Nenner ein und wertet den Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten

$$z \cot z = i z + \frac{2i z}{e^{2i z} - 1} = i z + 1 + B_1 (2i z) + \frac{B_2}{2!} (2i z)^2 + \dots$$

aus, indem man mit der (absolut konvergenten) Nennerreihe erweitert. Koeffizientenvergleich liefert ein System von linearen Gleichungen mit einem binomischen Muster

$$\begin{aligned} 2B_1 + 1 &= 0 \\ 3B_2 + 3B_1 + 1 &= 0 \\ 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + 1 &= 0 \\ 5B_4 + 10B_3 + 10B_2 + 5B_1 + 1 &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Durch konsekutive Auflösung erhält man dann die **Bernoullischen Zahlen**

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{2}, & B_2 &= \frac{1}{6}, & B_3 &= 0, \\ B_4 &= -\frac{1}{30}, & B_5 &= 0, & B_6 &= \frac{1}{42}, & \dots \end{aligned}$$

Da alle Koeffizienten mit ungeradem Index größer als 1 verschwinden, findet man für die gesuchte Reihe

$$\begin{aligned} z \cot z &= 1 - \frac{2^2 B_2}{2!} z^2 + \dots + (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} + \dots \\ &= 1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^4}{45} - \frac{2z^6}{945} - \dots \end{aligned}$$

Die Reihe für die Tangensfunktion kann in der gleichen Weise oder über Relationen wie

$$\tan z = \cot z - 2 \cot 2z$$

gewonnen werden. Das Resultat ist

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{4 \cdot 3 B_2}{2!} z + \dots + (-1)^{(n-1)} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{(2n-1)} + \dots \\ &= z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \frac{17z^7}{315} + \dots \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius dieser Reihen

$$R(z \cot z) = \pi \quad \text{und} \quad R(\tan z) = \frac{\pi}{2}$$

entspricht den Nullstellen der Nenner in der Definition dieser Funktionen.

2.2.4 Die hyperbolischen Funktionen

Die hyperbolischen Funktionen $\sinh z$ und $\cosh z$ sind eng mit den entsprechenden trigonometrischen Funktionen verwandt

$$\cosh z = \cos(iz) \quad \sinh z = -i \sin(iz) .$$

Daraus ergibt sich die Tatsache, dass alle Eigenschaften und der zugehörige Formelapparat direkt aus den Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen gewonnen werden können. So erhält man

- die absolut konvergenten Potenzreihen

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots ,$$

- die Verknüpfungen mit der Exponentialfunktion

$$\cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) \quad \sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) \quad e^z = \cosh z + \sinh z ,$$

- Additionstheoreme wie

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 ,$$

aus denen spezielle Formeln, z.B.

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad \cosh^2 z + \sinh^2 z = \cosh(2z) ,$$

folgen,

- und die Ableitungen

$$\frac{d \sinh z}{dz} = \cosh z \quad \text{und} \quad \frac{d \cosh z}{dz} = \sinh z .$$

Die Funktionen sind (wie die Exponentialfunktion) periodisch mit der Periode $2\pi i$. Der Fundamentalbereich ist also der Streifen

$$-\pi < \operatorname{Im}(z) \leq +\pi .$$

Zusätzlich zu $\cosh z$ und $\sinh z$ kann man die Funktionen

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = -i \tan(iz)$$

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = i \cot(iz)$$

betrachten, für die alle weiteren Eigenschaften ebenfalls aus den Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen gewonnen werden können.

2.2.5 Der Logarithmus

Da die komplexe Exponentialfunktion eine periodische Funktion ist, ist die Umkehrfunktion, der natürliche Logarithmus $w = \ln z$, eine (unendlich) vieldeutige Funktion. Betrachtet man einen bestimmten Wert von z , so bezeichnet man den Wert des Logarithmus, dessen Imaginärteil in dem Intervall

$$-\pi < \operatorname{Im}(z) \leq +\pi$$

liegt, als den **Hauptwert** des Logarithmus und schreibt Ln . Alle übrigen Werte von $\ln z$ für dieses z unterscheiden sich von dem Hauptwert nur um ein Vielfaches von $2\pi i$, der Periode der Exponentialfunktion. Es ist also

$$\ln z = \operatorname{Ln} z + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Schreibt man $z = Ae^{i\alpha}$ (A und α reell), wobei der Hauptwert von $\arcsin z = \alpha$ ist, so folgt

$$\operatorname{Ln} z = \ln A + i\alpha.$$

Spezielle Hauptwerte kann man anhand dieser Aussage leicht angeben. Es sind z.B.

$$\operatorname{Ln} 1 = 0 \quad \operatorname{Ln} i = \frac{\pi}{2} i \quad \operatorname{Ln}(-1) = \pi i \quad \operatorname{Ln}(-i) = -\frac{\pi}{2} i.$$

Die durch $\ln z$ vermittelte Abbildung der Hauptwertfläche auf den Streifen mit $-\pi < \operatorname{Im}(w) \leq \pi$ der w -Ebene ist in Abb. 2.3 illustriert. Strahlen der z -Ebene werden auf Geraden der w -Ebene parallel zur reellen Achse, Kreise der z -Ebene auf Geradenstücke parallel zur imaginären Achse abgebildet.

Allgemeiner gilt: Alle Werte von $\ln z$ haben den gleichen Realteil (den eindeutigen, reellen natürlichen Logarithmus), die Imaginärteile unterscheiden sich um ein Vielfaches von 2π . In Umkehrung der durch die Exponential-

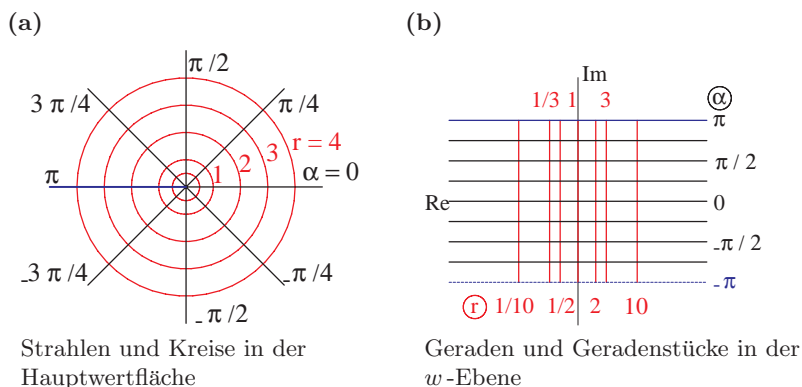


Abb. 2.3. Die Abbildung $w = \ln z$

funktion vermittelten Abbildung werden durch den Logarithmus $w = \ln z$

Riemannsche Flächen der z -Ebene, die entlang der negativen reellen Achse aufgeschnitten und zusammengeheftet sind, auf Streifen der w -Ebene abgebildet. Die Punkte der Fläche, die die Hauptwerte trägt, werden auf das Innere des Streifens

$$\pi < \operatorname{Im}(w) < \pi$$

der w -Ebene abgebildet. Diese Abbildung ist eindeutig und konform. Die Punkte der benachbarten Riemannschen Flächen, werden auf die benachbarten Streifen abgebildet. Die Situation ist in Abb. 2.4, die von links gelesen die Abbildung durch die Exponentialfunktion und von rechts gelesen die Abbildung durch den Logarithmus darstellt, illustriert.

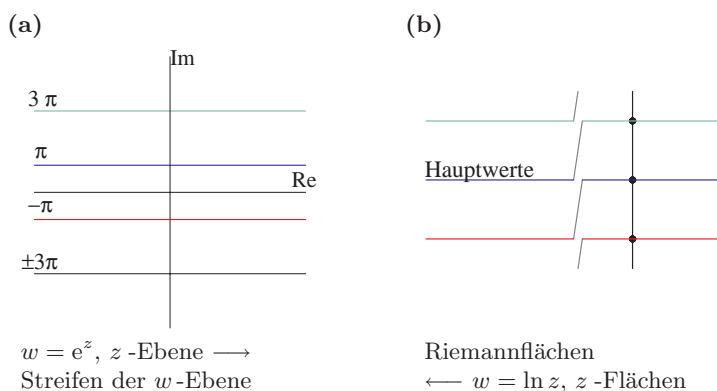


Abb. 2.4. Abbildungen durch die Exponentialfunktion und den Logarithmus

Die Umkehrung von $w = \ln z$ mit $z = e^w$ bedingt auch, dass man für den komplexen Logarithmus die bekannten Rechenregeln wiedergewinnen kann, so z.B. (alle $z \neq 0$)

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \quad \ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$$

$$\ln z^n = n \ln z$$

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z}.$$

Infolge der Vieldeutigkeit stellen die rechten und die linken Seiten dieser Gleichungen jeweils einen (unendlichen) Satz von Werten dar. Jeder Wert, der auf der linken Seite dieser Gleichungen auftritt, ist unter den Werten der rechten Seite zu finden.

Die im Reellen gewonnenen Reihen für den natürlichen Logarithmus können ins Komplexe fortgesetzt werden. Sie stellen dann die Hauptwerte dar. Die drei bekanntesten Reihen sind

$$\operatorname{Ln}(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots\right)$$

$$\operatorname{Ln}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

$$\operatorname{Ln} \frac{(1+z)}{(1-z)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{(2n-1)}}{(2n-1)} = 2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right).$$

Der Konvergenzradius der drei Reihen ist jeweils $R = 1$.

Mit Hilfe des Logarithmus kann man im Komplexen (wie im Reellen) beliebige Potenzen darstellen. Man schreibt für

$$w = z^a$$

mit beliebigem komplexen a auf der rechten Seite

$$w = e^{a \ln z}.$$

Den Hauptwert dieser vieldeutigen Funktion erhält man, wenn man für den Logarithmus den Hauptwert $\operatorname{Ln} z$ einsetzt. So ist z.B.

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i((i\pi/2)+2n\pi)} = e^{((- \pi/2)-2n\pi)}.$$

Der Hauptwert ist

$$HW(i^i) = e^{-\pi/2}.$$

2.2.6 Die zyklometrischen Funktionen

Die Umkehrung der trigonometrischen Funktionen führt auf die zyklometrischen Funktionen

$$w = \arcsin z, \quad w = \arccos z, \quad w = \arctan z, \quad w = \operatorname{arccot} z.$$

Auch die Abbildungen, die durch diese Funktionen vermittelt werden, sind vieldeutig. So liegt der Hauptwert der Arcussinusfunktion $w = \arcsin z$ in dem Intervall

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq \operatorname{Re}(w) \leq \frac{\pi}{2} & \text{falls } \operatorname{Im}(w) &\geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} &< \operatorname{Re}(w) < \frac{\pi}{2} & \text{falls } \operatorname{Im}(w) &< 0, \end{aligned}$$

da in diesem Intervall die Sinusfunktion alle möglichen Werte genau einmal annimmt. Da sich $\sin z$ durch die Exponentialfunktion darstellen lässt, ist es möglich, die Umkehrfunktion $\arcsin z$ durch den Logarithmus darzustellen. Aus

$$2i \sin w = e^{i w} - e^{-i w} = 2i z$$

folgt die quadratische Gleichung

$$e^{2i w} - 2i z e^{i w} = 1$$

mit der Lösung

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

Die positive Wurzel liefert

$$w = \arcsin z = \frac{1}{i} \ln \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right),$$

wobei auch hier die Bemerkung notwendig ist, dass jeder Wert auf der einen Seite der Gleichung unter den Werten auf der anderen Seite enthalten ist.

Die Reihenentwicklung der reellen Arcussinusfunktion kann ins Komplexe fortgesetzt werden. Der Hauptwert wird durch

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^7}{7} + \dots$$

dargestellt. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $R(\arcsin) = 1$. Die Reihe konvergiert jedoch noch für $z = \pm 1$ und ergibt eine Reihendarstellung für $\pm \pi/2$.

Auf eine entsprechende Andeutung der Eigenschaften der drei anderen zyklometrischen Funktionen ebenso wie auf die Diskussion der Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen soll verzichtet werden.

2.3 Analytische Funktionen II

Dieses Kapitel begann mit der Definition des Konzeptes einer analytischen Funktion:

Eine Funktion $w = f(z) = f(x + iy)$ heißt analytisch oder regulär in einem Gebiet \mathcal{G} der komplexen z -Ebene, falls sie in diesem Gebiet erklärt und differenzierbar ist.

Die Bedingung der Differenzierbarkeit führt auf die Aussage, dass analytische Funktionen konforme Abbildungen von Gebieten der z -Ebene auf Gebiete der w -Ebene vermitteln. In diesem Abschnitt werden weitere Konsequenzen dieser Bedingung vorgestellt. Dies sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, die Cauchyschen Integralsätze und weitere Überlegungen zu der Darstellung solcher (und anderer) Funktionen durch Potenzreihen.

2.3.1 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Die Forderung nach der Differenzierbarkeit führt auf eine spezifische Verknüpfung von Real- und Imaginärteil von analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Schreibt man

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y),$$

wobei u und v reelle Funktionen der reellen Variablen sind, so kann man den Differentialquotienten

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

in der Form

$$= \lim_{\varepsilon_x, \varepsilon_y \rightarrow 0} \frac{u(x + \varepsilon_x, y + \varepsilon_y) - u(x, y) + i(v(x + \varepsilon_x, y + \varepsilon_y) - v(x, y))}{\varepsilon_x + i\varepsilon_y}$$

schreiben. Differenzierbarkeit im Komplexen beinhaltet die Aussage (analog zu dem Fall einer Funktion von zwei Veränderlichen), dass der Wert der Ableitung unabhängig von der Richtung ist, in der man sich einer Stelle $z = x + iy$ annähert. Man kann sich einer Stelle somit z.B. zum einen parallel zu der reellen ($\varepsilon_y = 0$), zum anderen parallel zu der imaginären ($\varepsilon_x = 0$) Achse annähern und erhält

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) .$$

Trennung von Real- und Imaginärteil liefert die (reellen) Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} ,$$

die unter der Bezeichnung **Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen** bekannt sind.

Betrachtet man die zweiten Ableitungen der Funktionen u und v , so folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen z.B.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} .$$

Unter der Voraussetzung, dass die (gemischten) zweiten Ableitungen stetig sind, kann man die Reihenfolge der Differentiation vertauschen. Addition der beiden Gleichungen ergibt dann

$$\Delta u(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = 0 .$$

Die Funktion $u(x, y)$ erfüllt eine (zweidimensionale) Laplacegleichung. Entsprechend gewinnt man

$$\Delta v(x, y) = 0 .$$

Sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil einer analytischen Funktion erfüllen die Laplacegleichung. Die zwei Funktionen können jedoch nicht willkürlich gewählt werden, sie sind durch die Cauchy-Riemann Bedingungen verknüpft. Allgemeine Methoden zur Lösung der Laplacegleichung in zwei und drei Raumdimensionen findet man in Math.Kap. 3.1

Die Cauchy-Riemann Bedingungen erlauben die Begründung einer geometrischen Aussage über die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$:

Die Kurvenscharen $u(x, y) = \text{const.}$ und $v(x, y) = \text{const.}$ schneiden sich unter einem rechten Winkel.

Man betrachtet das Skalarprodukt der Gradienten von Real- und Imaginärteil

$$\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$$

und findet, dass dieses Produkt mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Bedingungen z.B. in der Form

$$= -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

geschrieben werden kann. Die Gradienten in einem Punkt der komplexen Ebene sind orthogonal. Da die Gradienten senkrecht auf den Kurven der zwei Scharen stehen, schneiden sich die Kurven $u(x, y) = \text{const.}$ in jedem Punkt des Bildbereiches der analytischen Funktion mit den Kurven $v(x, y) = \text{const.}$ unter einem rechten Winkel.

Die Konsequenzen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für Integrale mit komplexen Funktionen werden in den folgenden Abschnitten aufgegriffen.

2.3.2 Kurvenintegrale in der komplexen Ebene

Ist $w = f(z)$ eine in einem Gebiet \mathcal{G} definierte stetige (nicht notwendigerweise differenzierbare) Funktion, so kann man das folgende Integral definieren: Betrachte eine Kurve \mathcal{C} , die zwei Punkte z_i und z_f des Gebiets verbindet und die ganz in dem Gebiet verläuft. Zerlege die Kurve durch Teilpunkte $z_i = z_0, z_1, z_2, \dots, z_N = z_f$ in N Teilstücke und bilde die Summe

$$S_N = \sum_{n=1}^N (z_n - z_{n-1}) f(\bar{z}_n),$$

wobei \bar{z}_n ein beliebiger Zwischenpunkt in dem Intervall $[z_{n-1}, z_n]$ ist. Der Grenzwert dieser Summe für eine beliebig feine Unterteilung definiert dann das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{z_i}^{z_f} f(z) dz \equiv \int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (z_n - z_{n-1}) f(\bar{z}_n).$$

Die Voraussetzung der Stetigkeit von $f(z)$ ist hinreichend, doch nicht notwendig für die Existenz des Grenzwertes. Wählt man als Kurve \mathcal{C} ein Teilstück der reellen Achse und ist $f(z) = f(x)$, so erhält man als Spezialfall das reelle Integral.

Aufgrund der Analogie der Definition des Kurvenintegrals über der komplexen Ebene und über einer zweidimensionalen reellen Ebene lassen sich einfache Rechenregeln ohne Aufwand gewinnen. So gilt z.B. für zwei aufeinander folgende Wegstücke \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} f(z) dz$$

oder für einen Integranden, der als Summe von zwei Funktionen vorgegeben ist

$$\int_{\mathcal{C}} (f_1(z) + f_2(z)) dz = \int_{\mathcal{C}} f_1(z) dz + \int_{\mathcal{C}} f_2(z) dz .$$

Zur Auswertung der komplexen Kurvenintegrale benutzt man eine Parameterdarstellung der Wege in der Form

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (t_i \leq t \leq t_f) .$$

Besitzen die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ stetige Ableitungen, so beschreibt das totale Differential

$$dz = (\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) dt$$

die Unterteilung eines zusammenhängenden Wegstücks. Einige Beispiele, deren Ergebnisse immer wieder benutzt werden, sind

1. Für $f(z) = z^*$ ist das Integral von $z_i = 0$ bis zu dem Punkt $z_f = 1 + i$ zu berechnen, wobei der Weg einmal zuerst entlang der imaginären Achse und dann parallel zur reellen Achse, zum zweiten zuerst entlang der reellen und dann parallel zur imaginären Achse zu nehmen ist. Man findet

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} z^* dz &= -i \int_0^i y dy + \int_i^{1+i} x dx = \frac{1}{2} (1 + 3i) \\ \int_{\mathcal{C}_2} z^* dz &= \int_0^1 x dx - i \int_1^{1+i} y dy = \frac{1}{2} (3 + i) . \end{aligned}$$

Das Resultat hängt nicht nur von den Integrationsgrenzen sondern auch vom Weg ab.

2. Es ist $f(z) = 1/z$, der Weg \mathcal{C} ein Kreis mit Radius R um den Nullpunkt mit der Parameterdarstellung $z(t) = R(\cos t + i \sin t)$. Es folgt dann

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin t + i \cos t)}{(\cos t + i \sin t)} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i .$$

3. Für einen Kreisbogen (Radius R) von $t = 0$ bis $t = \alpha$ soll das Integral mit $f(z) = 1$ berechnet werden. Man findet

$$\int_{\mathcal{C}} dz = R \int_0^\alpha (-\sin t + i \cos t) dt = R(\cos \alpha + i \sin \alpha - 1) .$$

Geht der Kreisbogen in einen Kreis über, so ist mit $\alpha = 2\pi$

$$\oint_C dz = 0.$$

4. Wird in dem zweiten Beispiel der Kreis in dem Uhrzeigersinn durchlaufen, so benötigt man die Parameterdarstellung $z(t) = R(\cos t - i \sin t)$. Für das Integral findet man dann

$$\oint_{C-} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin t - i \cos t)}{(\cos t - i \sin t)} dt = -i \int_0^{2\pi} dt = -2\pi i.$$

Der Wert des Integrals hängt von dem Umlaufsinn ab.

Im Weiteren kennzeichnet \oint_C einen geschlossenen Weg um den Ursprung, der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Ein solcher Weg wird mit 'im mathematischen Sinn positiv' bezeichnet. Die Notation für einen entsprechenden Weg in dem Uhrzeigersinn ist \oint_{C-} .

5. Der Integrand ist $f(z) = (z - z_0)^m$ mit beliebigem ganzzahligen m . Der Weg ist ein Kreis mit Radius R im positiven Sinn um den Punkt z_0 . Mit der Parameterdarstellung $z(t) = z_0 + R(\cos t + i \sin t)$ findet man

$$\begin{aligned} I &= \oint_{C(z_0)} (z - z_0)^m dz \\ &= R^{m+1} \int_0^{2\pi} (\cos t + i \sin t)^m (-\sin t + i \cos t) dt. \end{aligned}$$

Mit der Moivreformel folgt

$$I = i R^{m+1} \int_0^{2\pi} \{\cos(m+1)t + i \sin(m+1)t\} dt.$$

Man findet jedoch

$$\int_0^{2\pi} \cos nt dt = \int_0^{2\pi} \sin nt dt = 0$$

für alle negativen und positiven ganzzahligen Werte mit $n \neq 0$. Ist $n = 0$, so verschwindet das Integral mit dem Sinus, das Integral mit dem Kosinus liefert 2π . Somit ist

$$\oint_{C(z_0)} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } m \neq -1 \\ 0 & \text{für } m = -1. \end{cases}$$

2.3.3 Der Cauchysche Integralsatz und die Integralformeln

Das erste Beispiel des letzten Abschnitts zeigt, dass Integrale mit komplexen Funktionen von dem Weg abhängen können, der die Integrationsgrenzen verbindet. Eine derartige Abhängigkeit besteht nicht, wenn man analytische Funktionen betrachtet. Dies ist die Grundaussage des **Integraltheorems von Cauchy**, das besagt

Ist die Funktion $f(z)$ *analytisch* in einem einfach zusammenhängenden Gebiet \mathcal{G} , so gilt für jede geschlossene, stückweise stetige, ganz in \mathcal{G} gelegene Kurve \mathcal{C}

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0 .$$

Eine Variante dieses Theorems ist die Aussage, dass ein Integral zwischen zwei Punkten z_i und z_f unter den genannten Voraussetzungen unabhängig von dem Integrationsweg ist, solange er nur in dem Gebiet \mathcal{G} verläuft

$$\int_{z_i}^{z_f} f(z) dz = \text{wegunabhängig} .$$

Der Beweis dieses Theorems kann in verschiedener Weise geführt werden. Für eine einfache Argumentation mit einer Anleihe an die Vektoranalysis im Reellen schreibt man

$$\begin{aligned} \int_{z_i}^{z_f} f(z) dz &= \int_{z_i}^{z_f} (u(x, y) + i v(x, y)) (dx + i dy) \\ &= \int_{(x_i, y_i)}^{(x_f, y_f)} (u dx - v dy) + i \int_{(x_i, y_i)}^{(x_f, y_f)} (v dx + u dy) \end{aligned}$$

und beruft sich für die zwei reellen Kurvenintegrale mit den Vektorfunktionen

$$\mathbf{F}_1 = (u(x, y), -v(x, y), 0) \quad \mathbf{F}_2 = (v(x, y), u(x, y), 0)$$

auf den Satz von Stokes. Dieser besagt, dass die Kurvenintegrale

$$\int_i^f \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{s}$$

wegunabhängig sind, wenn die Rotation der Vektorfunktionen verschwindet (Band 1 Math.Kap. 5.3). Nun ist

$$\nabla \times \mathbf{F}_1 = -\mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \nabla \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

und man erkennt, dass die Rotation der Vektorfunktionen infolge der Cauchy-Riemannschen Bedingungen verschwindet.

Von Interesse für die weitere Verwertung des Integralsatzes sind die folgenden Betrachtungen. Hat man zwei geschlossene, gleich orientierte Wege \mathcal{C}_0 und \mathcal{C}_1 , von denen der eine ganz im Innern des zweiten liegt (siehe Abb. 2.5a), so ist

$$\oint_{\mathcal{C}_0} f(z) dz = \oint_{\mathcal{C}_1} f(z) dz ,$$

falls $f(z)$ in dem durch die Wege bestimmten Ringgebiet regulär ist. Diese Aussage gilt unabhängig von der Frage, ob $f(z)$ in dem von dem Ringgebiet eingeschlossenen Gebiet regulär ist oder nicht. Zur Beweisführung benutzt man eine typische, in Abb. 2.5a angedeutete Argumentation. Man verbindet

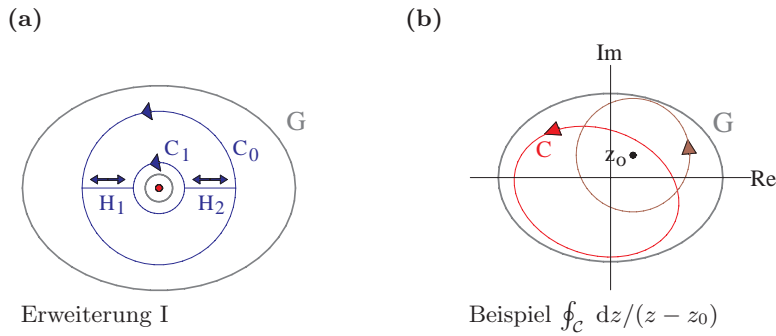


Abb. 2.5. Der Cauchysche Integralsatz

die zwei Wege durch zwei Hilfswege \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 , durch die das Ringgebiet in zwei einfach zusammenhängende Teile zerlegt wird. In den Teilgebieten und auf deren Ränder ist $f(z)$ regulär, die Kurvenintegrale über die Ränder verschwinden somit. Addition, unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Hilfswege zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, ergibt dann

$$\oint_{C_0} f(z) dz + \oint_{C_1-} f(z) dz = 0 ,$$

bzw. die Behauptung. In dem Beispiel

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)} = 2\pi i$$

kann somit der Kreis um die Stelle z_0 durch einen beliebigen, positiv orientierten Weg, in dessen Innengebiet z_0 liegt, ersetzt werden (Abb. 2.5b).

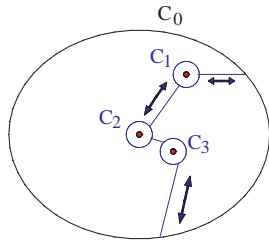
Eine entsprechende Beweisführung (siehe Abb. 2.6) zeigt, dass diese Aussage auf den Fall, dass mehrere gleichorientierte Wege innerhalb von \mathcal{C}_0 liegen, erweitert werden kann

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz .$$

Es muss nicht vorausgesetzt werden, dass $f(z)$ im Innern der Wege \mathcal{C}_k regulär ist.

Aus dem Integraltheorem lassen sich, unter den gleichen Voraussetzungen, die oft benutzten **Cauchyschen Integralformeln** herleiten. Die erste dieser Formeln lautet:

Eine positiv orientierte, geschlossene Kurve \mathcal{C} liegt in dem Regularitätsgebiet \mathcal{G} einer Funktion $f(z)$. Ist z_0 ein beliebiger Punkt im Innern des von \mathcal{C} umschlossenen Gebietes, so gilt für die analytische Funktion f an der Stelle z_0 die Formel

**Abb. 2.6.** Integralsatz: Erweiterung II

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz .$$

Der Beweis dieser Formel beruht auf der Zerlegung

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = \oint_C \frac{f(z_0)}{(z - z_0)} dz + \oint_C \frac{(f(z) - f(z_0))}{(z - z_0)} dz .$$

In dem ersten Integral kann $f(z_0)$ vor das Integral gezogen werden, so dass man für das Integral $f(z_0)/2\pi i$ erhält. In dem zweiten Integral kann man den Radius des Kreises um z_0 so klein wählen, dass der Betrag des Zählers kleiner als eine vorgegebene Größe ist

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon .$$

Es gilt dann die Abschätzung

$$\left| \oint_C \frac{(f(z) - f(z_0))}{(z - z_0)} dz \right| < \varepsilon \left| \oint_C \frac{1}{(z - z_0)} dz \right| = 2\pi\varepsilon \longrightarrow 0 .$$

Der Beitrag des zweiten Integrals kann beliebig klein gemacht werden.

Neben der Hauptformel gelten unter den gleichen Voraussetzungen für die Ableitungen einer analytischen Funktion

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, 3, \dots) .$$

Der Beweis dieser Formel ist etwas umständlicher. Man betrachtet explizit die Differentialkoeffizienten für gegebenes n , wobei jeweils die Formel für die $(n - 1)$ -te Ableitung einzusetzen ist, und schätzt die jeweiligen Integrale ab. Auf diese Weise kann man den Nachweis mittels vollständiger Induktion führen.

Die Definition von analytischen Funktionen basiert auf der Forderung der Differenzierbarkeit, d.h. der Existenz der ersten Ableitung. Die Cauchyformeln zeigen, dass für solche Funktionen aus der Existenz der ersten Ableitung die Existenz aller höheren Ableitungen folgt.

2.3.4 Reihenentwicklungen analytischer Funktionen

Anhand der Cauchy Integralformeln kann man zeigen, dass analytische Funktionen durch Potenzreihen in der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

dargestellt werden können. Diese Reihe konvergiert (gleichmäßig) innerhalb des größtmöglichen Kreises um z_0 , der noch in dem Regularitätsgebiet \mathcal{G} der Funktion $f(z)$ liegt.

Schreibt man

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{(z' - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(z' - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0}\right)},$$

so kann man bei geeigneter Wahl der Zwischenstelle z_0 , so dass

$$|z - z_0| < |z' - z_0|$$

ist, die Entwicklung für die geometrische Reihe einsetzen

$$\frac{1}{z' - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^{n+1}}.$$

Da diese Reihe (gleichmäßig) konvergiert, kann man sie, nach Multiplikation mit $f(z')$, gliedweise integrieren

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz',$$

wobei die Kontur \mathcal{C} die Stellen z und z' umschließt, und erhält die angegebene Taylorentwicklung. Die Reihe konvergiert innerhalb eines Kreises um z_0 , in dem $f(z)$ analytisch ist. Ist z_1 die z_0 am nächsten gelegene Stelle, für die das nicht zutrifft, dann ist der Konvergenzradius $R = |z_1 - z_0|$.

Einen breiten Raum könnte in der weiteren Diskussion das Prinzip der analytischen Fortsetzung einnehmen, das besagt: Ein Gebiet \mathcal{G}_1 hat mit einem Gebiet \mathcal{G}_2 ein Teilgebiet \mathcal{G}_{12} gemeinsam. In \mathcal{G}_1 ist eine Funktion $f_1(z)$ gegeben. Es kann dann in \mathcal{G}_2 nur eine einzige Funktion $f_2(z)$ geben, die in \mathcal{G}_{12} mit $f_1(z)$ übereinstimmt. Die beiden Funktionen bezeichnet man als **analytische Fortsetzungen** voneinander. In Bezugnahme auf die Diskussion der elementaren Funktionen in Math.Kap. 2.2 kann man in diesem Sinn sagen: Wenn eine reelle Funktion ins Komplexe analytisch fortsetzbar ist, so ist dies nur auf eine einzige Art möglich.

2.3.5 Laurentreihen und singuläre Stellen

Eine Funktion, die in einem Bereich regulär ist, kann durch eine Taylorreihe dargestellt werden. Falls in dem Bereich jedoch singuläre Stellen vorhanden sind, muss man die Betrachtungen erweitern. Die einfachste Situation liegt vor, wenn eine Funktion $f(z)$ in einem konzentrischen Kreisring um eine Stelle z_0 regulär ist, über das Verhalten um die Stelle z_0 jedoch nichts bekannt ist. Der Kreisring wird (Abb. 2.7) von zwei positiv orientierten Kurven C_1 und C_2 mit den Radien $R(C_2) < R(C_1)$ gebildet. In dem Ring gilt dann die **Laurententwicklung**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z')(z-z_0)^n}{(z'-z_0)^{n+1}} dz' + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z')(z'-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} dz'$$

bzw. in Abkürzung

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Verbindet man die zwei Kreise über ein Zwischenstück zu einer Kontur

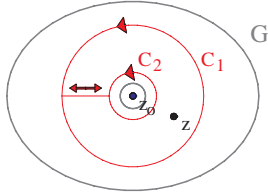


Abb. 2.7. Argumentation zur Aufstellung der Laurentreihe

$\mathcal{C} = C_1 - C_2$, so ist $f(z)$ im Innern der Kontur \mathcal{C} regulär. Man kann somit für eine Stelle z im Innern von \mathcal{C}

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z')}{z' - z} dz' - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

schreiben, da das Zwischenstück, das zweimal aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird, nicht beiträgt. In dem ersten Integral entwickelt man

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{(z' - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^{n+1}},$$

da $|z - z_0| < |z' - z_0|$ für Punkte z' auf dem Kreis \mathcal{C}_1 ist. In dem zweiten Integral, mit Punkten z' auf dem Kreis \mathcal{C}_2 , entwickelt man entsprechend

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{-1}{(z - z_0) \left(1 - \frac{z' - z_0}{z - z_0}\right)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z' - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Multiplikation mit $f(z')$ und Integration ergibt dann die Laurentreihe.

Das folgende Beispiel für die Funktion $f(z) = 1/(z^2(1-z))$ zeigt in einfacher Auswertung die Anwendungsmöglichkeiten. Ist man an einer Entwicklung in dem Kreisring um $z_0 = 0$ mit $0 < |z| < 1$ interessiert, so schreibt man mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \dots$$

Um eine Reihe zu gewinnen, die für $|z| > 1$ konvergiert, sortiert man

$$f(z) = -\frac{1}{z^3 \left(1 - \frac{1}{z}\right)}$$

und findet, ebenfalls mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$f(z) = -\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \dots$$

Man gewinnt zwei verschiedene Entwicklungen in Potenzen von z für dieselbe Funktion in verschiedenen Ringgebieten. Entwickelt man hingegen die Funktion $1/z^2$ nach Potenzen von $(z-1)$, so findet man die Laurentreihe

$$f(z) = -\frac{1}{(z-1)} + 2 - 3(z-1) + 4(z-1)^2 - 5(z-1)^3 + \dots,$$

die für $0 < |z-1| < 1$ konvergent ist.

Singuläre Stellen können anhand der Laurentreihe, die aus einer aufsteigenden und einer absteigenden Potenzreihe besteht, klassifiziert werden. Ist die Funktion an der Stelle z_0 singulär, in der Umgebung dieser Stelle jedoch regulär, so liegt eine **isolierte singuläre Stelle** vor. Man bezeichnet eine isolierte singuläre Stelle z_0 als einen **Pol k-ter Ordnung**, falls der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = g(z_0)$$

existiert und nicht gleich Null ist. Die Reihe beginnt dann mit dem Term $(z - z_0)^{-k}$

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{(z - z_0)^{(k-1)}} + \dots$$

Die Funktion $f(z) = 1/(z^2(1-z))$ besitzt an der Stelle $z = 0$ einen Pol zweiter Ordnung, an der Stelle $z = 1$ einen Pol erster Ordnung, der auch als einfacher

Pol bezeichnet wird. Die in Math.Kap. 2.2.3 gewonnene Entwicklung von $\cot z$ um die Stelle $z = 0$

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \dots$$

zeigt, dass diese Stelle ein Pol erster Ordnung ist. Läuft die Summe in der Laurentreihe von $-\infty$ bis ∞ , so liegt an der Stelle z_0 eine **wesentliche Singularität** vor. Ein Beispiel ist die Entwicklung von $e^{(1/z)}$ um die Stelle $z = 0$

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots$$

Ein anderer Typ von Singularität, der im Zusammenhang mit mehrdeutigen Funktionen auftritt, ist der **Verzweigungsschnitt**, der anhand von $f(z) = \ln z$ diskutiert werden soll. Man betrachtet die Stellen $z_1 = re^{i(\pi-\varepsilon)}$ und $z_2 = re^{-i(\pi-\varepsilon)}$, die (für $\varepsilon < 1$) kurz ober- und unterhalb (siehe Abb. 2.8) der negativen reellen Achse liegen. Im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ fallen die Punkte zusammen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z_1 = re^{i\pi} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z_2 = re^{-i\pi},$$

für die Funktionswerte gilt jedoch

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(z_1) = \operatorname{Ln} r + i\pi \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(z_2) = \operatorname{Ln} r - i\pi.$$

Wenn man sich der negativen reellen Achse von oben bzw. von unten nähert, erhält man verschiedene Funktionswerte. Es sieht so aus, als ob die Funktion auf dieser Achse nicht stetig ist. Sie wäre dann auch nicht differenzierbar bzw. nicht analytisch. Dies ist jedoch nicht der Fall. Die Funktion $\ln z$ ist für alle Werte von z , außer für $z = 0$, analytisch.

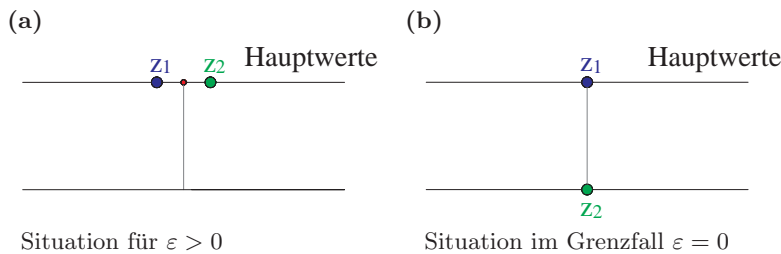


Abb. 2.8. Definitionsbereich der Funktion $\ln z$ aus der Sicht der negativen reellen Achse (rot)

Zur Erläuterung der Situation muss man den Definitionsbereich von $\ln z$ genauer betrachten. Der Definitionsbereich kann als eine unendlichblättrige Riemannsche Fläche angesehen werden. Benachbarte, übereinanderliegende Blätter sind entlang der negativen reellen Achse zusammengeheftet

(Abb. 2.8). Man bezeichnet die negative reelle Achse ($\operatorname{Re}(z) < 0$) als Verzweigungsschnitt der Funktion $\ln z$, die Stelle $z = 0$ ist, wie schon benannt, ein Verzweigungspunkt. *Definiert* man als das Hauptblatt, das Blatt auf dem die Argumente der Hauptwerte angesiedelt sind, also z -Werte mit $-\pi < \operatorname{Im}(z) \leq +\pi$, so erkennt man, dass der oben gewählte Punkt z_1 auf dem Hauptblatt liegt und im Grenzfall auf diesem bleibt. Der Punkt z_2 , der zunächst auch auf dem Hauptblatt lag, verlässt dieses in dem Grenzfall und wechselt auf ein anderes Blatt, nämlich das Blatt, auf dem die z -Werte mit $-3\pi < \operatorname{Im}(z) \leq -\pi$ zu finden sind. Die oben gefundene ‘Singularität’ ist also keine wirkliche, sie entsteht nur durch eine inkorrekte Zuordnung der Grenzwerte der Argumente zu den Blättern des Definitionsbereiches der Funktion $\ln z$. Die einzige singuläre Stelle von $\ln z$ ist der Verzweigungspunkt bei $z = 0$. Trotzdem ist in Anwendungen - entsprechende Verzweigungsschnitte treten bei allen mehrdeutigen Funktionen auf - Vorsicht beim Umgang mit Verzweigungsschnitten geboten.

2.3.6 Der Residuensatz

Der Koeffizient a_{-1} der ersten negativen Potenz der Laurentreihe wird als das **Residuum** der Funktion $f(z)$ in z_0 bezeichnet. Gemäß der Laurentreihe gilt für eine geschlossene, positiv orientierte Kurve \mathcal{C} , die ganz in einem Regularitätsgebiet um z_0 verläuft,

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz .$$

Liegen in dem Innengebiet von \mathcal{C} endlich viele singuläre Stellen, so kann man diese Definition auf den **Residuensatz** erweitern. Man legt um die singulären Stellen hinreichend kleine, positiv orientierte Kreise und erhält anhand der in Abb. 2.9 angedeuteten Zerlegung der umfassenden Kontur \mathcal{C}

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} f(z) dz \dots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_m} f(z) dz .$$

Diese Zerlegung wird meist in der Form

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum \left\{ \begin{array}{l} \text{der Residuen von } f(z) \text{ in den von} \\ \mathcal{C} \text{ umschlossenen singulären Stellen} \end{array} \right\}$$

zitiert. Der Residuensatz findet in vielen Bereichen Anwendung. Einige Beispiele sind:

1. Zu berechnen ist das Integral entlang der reellen Achse

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} .$$

Elementare Auswertung (als uneigentliches Integral mittels der Arcustangensfunktion) ergibt den Wert π . Das Integral eignet sich aber auch, die

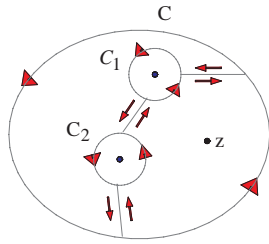


Abb. 2.9. Integralsatz: Zum Residuensatz

Auswertung mit Hilfe des Residuensatzes zu illustrieren und das allgemeine Muster zur Berechnung solcher Integrale aufzuzeigen. Man wählt (siehe Abb. 2.10) als Integrationsweg C einen Weg von $z = -R$ entlang der reellen Achse zu dem Punkt $z = +R$ und von dort längs eines Halbkreises mit dem Radius R zurück zu dem Punkt $z = -R$. Die Zerlegung des Integranden

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$$

zeigt, dass der Weg (für $R > 1$) den Pol bei $z = i$ einschließt, dessen Residuum mit $1/(2i)$ abgelesen werden kann. Nach dem Residuensatz ist

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\mathcal{HK}} \frac{dz}{1+z^2}.$$

Für den Beitrag des Halbkreises findet man die Abschätzung

$$\left| \int_{\mathcal{HK}} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq M \cdot L,$$

wobei M der maximale Betrag des Integranden entlang des Weges und L die Länge des Weges ist. Für das Beispiel ist

$$\left| \int_{\mathcal{HK}} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1}.$$

Der Beitrag des Halbkreises verschwindet für $R \rightarrow \infty$, es verbleibt in diesem Grenzfall das Integral über die reelle Achse.

2. Im Fall des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx \quad a > 0 \text{ reell}$$

ist die elementare Auswertung nicht einfach. Zur Anwendung des Residuensatzes würde man mit dem Integral

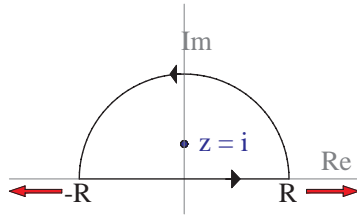


Abb. 2.10. Beispiel zur Anwendung des Residuensatzes

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{a^2 + z^2} dz$$

beginnen, wobei \mathcal{C} der gleiche Integrationsweg wie im vorherigen Beispiel ist. Ist $R > a$, so ist die Polstelle bei $z = ai$ in die Kontur eingeschlossen und man erhält

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{a^2 + z^2} dz = 2\pi i \text{ (Residuum bei } ai) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-a}}{2ai} = \frac{\pi e^{-a}}{a}.$$

Die Abschätzung des Beitrages des Halbkreises ist

$$\left| \int_{\mathcal{HK}} \frac{e^{iz}}{a^2 + z^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - a^2}.$$

Der Beitrag verschwindet für $R \rightarrow \infty$, so dass in diesem Fall das Ergebnis lautet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{-a}}{a},$$

bzw. wenn man den Realteil auf beiden Seiten nimmt (das Integral mit $\sin x$ verschwindet infolge der Symmetrie)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{-a}}{a}.$$

In beiden Beispielen erweist sich die Abschätzung der Ergänzung der Kontur zu einem geschlossenen Weg als der wesentliche Punkt. Hat der Integrand die Form $e^{\pm iaz} f(z)$ mit reellem $a > 0$ und einer Funktion $f(z)$, die mit $|z| \rightarrow \infty$ gegen Null geht, so gilt allgemein

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\pm \mathcal{HK}} e^{\pm iaz} f(z) dz \right| \rightarrow 0,$$

wobei die Ergänzung je nach Vorzeichen des Argumentes der Exponentialfunktion ein Halbkreis in der oberen (+) oder unteren (−) Halbebene ist.

In vielen Beispielen zur Auswertung von uneigentlichen Integralen entlang der reellen Achse ist die Ergänzung durch Halbkreise nützlich, doch sind andere Ergänzungen zu geschlossenen Konturen, z.B. durch die drei fehlenden Seiten eines Rechtecks, durchaus möglich.

3. Das letzte Beispiel illustriert eine Situation mit einem Verzweigungspunkt bzw. Verzweigungsschnitt. Um das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx \quad 0 < \alpha < 1$$

zu berechnen, beginnt man mit dem komplexen Integral

$$I_C = \oint_C \frac{z^{-\alpha}}{1+z} dz .$$

Der Integrand hat einen singulären Verzweigungspunkt bei $z = 0$ und einen einfachen Pol bei $z = -1$. Wählt man als Wertebereich der Darstellung von

$$z^{-\alpha} = |z|^{-\alpha} e^{-i\alpha\varphi}$$

den Bereich $0 \leq \varphi < 2\pi$, so ist die positive reelle Achse ein Verzweigungsschnitt. Es ist deshalb nicht möglich, die Integrationskontur entlang der reellen Achse zu nehmen. Eine Möglichkeit ist die in Abb. 2.11 gezeigt

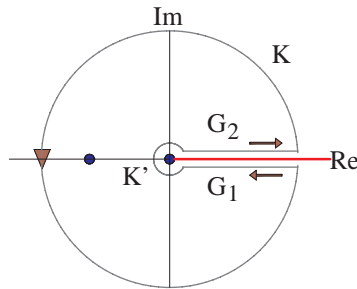


Abb. 2.11. Beispiel zur Integration um einen Verzweigungsschnitt

te Kontur C , die aus zwei Geraden parallel zu dem Verzweigungsschnitt (G_1 und G_2), einem Teilkreis K' mit Radius ε und einem Teilkreis K mit Radius $R > 1$ um die Stelle $z = 0$ besteht. Es ist dann

$$I_C = \oint_C \frac{z^{-\alpha}}{1+z} dz = 2\pi i (\text{Residuum bei } -1) = 2\pi i e^{-i\alpha\pi} .$$

Auf der anderen Seite ist

$$I_C = \int_{G_1} \frac{z^{-\alpha}}{1+z} dz + \int_{G_2} \frac{z^{-\alpha}}{1+z} dz + \int_{K_1} \frac{z^{-\alpha}}{1+z} dz + \int_{K_2} \frac{z^{-\alpha}}{1+z} dz .$$

Es ist nun zu untersuchen, was in dem Grenzfall

$$\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad G_1, G_2 \rightarrow \text{reelle Achse}$$

passiert. Die Gerade G_1 liegt dann auf dem nächsten Blatt der Riemannschen Fläche. Unter Beachtung der Richtung der Integration findet man

$$\int_{\mathcal{G}_1} \frac{z^{-\alpha}}{1+z} dz \longrightarrow \int_{\infty}^0 \frac{|z|^{-\alpha} e^{-2i\alpha\pi}}{1+z} dz = -e^{-2i\alpha\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx .$$

Die Gerade \mathcal{G}_2 bleibt auf dem Hauptblatt

$$\int_{\mathcal{G}_2} \frac{z^{-\alpha}}{1+z} dz \longrightarrow \int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx .$$

Die beiden Teilkreise werden zu Kreisen mit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{K}_1} \frac{z^{-\alpha}}{1+z} dz \right| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\varepsilon} = 0 ,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathcal{K}_2} \frac{z^{-\alpha}}{1+z} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2\pi R^{1-\alpha}}{R-1} = 0 .$$

Es verbleibt also

$$(1 - e^{-2i\alpha\pi}) \int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx = 2\pi i e^{-i\alpha\pi} ,$$

bzw. nach Sortierung

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} .$$

2.3.7 Eine ganz kurze Klassifikation der komplexen Funktionen

Man unterscheidet zwei Hauptklassen von Funktionen gemäß dem Attribut **eindeutig** oder **mehrdeutig**.

Zu den eindeutigen Funktionen zählen die **ganzen** und die **meromorphen** Funktionen. Die ganzen Funktionen sind dadurch charakterisiert, dass sie in der komplexen Ebene (ausgenommen der Punkt ∞) keine Singularitäten haben. Sie können in der gesamten Ebene durch eine (beständig konvergente) Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

dargestellt werden und umfassen somit die ganzen rationalen Funktionen (Polynome) und die elementaren transzendenten Funktionen wie $e^z, \sin z$ etc. Meromorphe Funktionen besitzen in der komplexen Ebene (ausgenommen der Punkt ∞) keine anderen Singularitäten als Pole. Sie umfassen die gebrochen rationalen Funktionen sowie transzendente Funktionen wie $\tan z, \cot z$, jedoch auch 'höhere' Funktionen wie die Γ -Funktion (Math.Kap. 4.1). Eine weitere Eigenschaft, unter dem eindeutigen Funktionen diskutiert werden können, ist die Periodizität, die entweder einfach $f(z+n\omega) = f(z)$ oder doppelt $f(z+n\omega+n'\omega') = f(z)$ sein kann. Das bekannteste Beispiel für eine einfach periodische Funktion ist die Exponentialfunktion, alle ihre Eigenschaften können anhand der Betrachtung eines Periodenstreifens gewonnen

werden. Erweiterungen zielen auf die Fourierentwicklung. Bezüglich der doppelt periodischen beweist man, dass sie keine ganzen Funktionen sein können sondern notwendigerweise meromorphe Funktionen sein müssen. Ein Beispiel ist die \mathcal{P} -Funktion $w = \mathcal{P}(z)$ von Weierstraß, die durch eine Differentialgleichung der Form

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = 4w^3 - g_2w - g_3$$

definiert ist. Die Konstanten in dieser Differentialgleichung sind durch die Perioden ω und ω' bestimmt.

Die mehrdeutigen Funktionen, die zweckmäßiger Weise mit Hilfe der Riemannschen Flächen diskutiert werden, leiten sich im Wesentlichen von den Wurzeln, mit der einfachsten Form \sqrt{z} , und dem Logarithmus $\ln z$ ab.

3 Partielle Differentialgleichungen

In der Elektrodynamik spielen eine gute Anzahl von durchaus verwandten partiellen Differentialgleichungen eine Hauptrolle. Die Theorie wird in den Maxwellgleichungen, einem Satz von partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung der sechs Komponenten des elektromagnetischen Feldes, zusammengefasst. In dem stationären Grenzfall diskutiert man für den elektrischen Anteil die Laplace- bzw. Poissongleichung zur Berechnung des elektrischen Potentials $V(\mathbf{r})$

$$\Delta V(\mathbf{r}) = 0 \text{ bzw. } -4\pi k_e \rho(\mathbf{r}) ,$$

für den magnetischen Anteil die Ampèresche Differentialgleichung

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -4\pi k_m \mathbf{j}(\mathbf{r}) ,$$

die das magnetische Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ bestimmt.

Im dynamischen, dem voll zeitabhängigen Fall, werden die Maxwellgleichungen zu Wellengleichungen für die (verkoppelten) Feldkomponenten oder die elektromagnetischen Potentiale umgeformt. Neben der Wellengleichung im ladungs- und stromfreien Raum, wie

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} ,$$

ist in leitender Materie die Telegrafengleichung

$$\left(\Delta - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 4\pi\mu\sigma k_m k_f \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$$

zu betrachten. Das Senderproblem erfordert die Diskussion von inhomogenen Wellengleichungen, z.B. für das Potential

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) V(\mathbf{r}, t) = -4\pi k_e \rho(\mathbf{r}, t) .$$

Geht man in die homogene Wellengleichung mit einem Ansatz

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{\pm i\omega t}$$

ein, so erhält man eine Helmholtzgleichung

$$(\Delta + k^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} .$$

Alle vorliegenden Differentialgleichungen sind homogene bzw. inhomogene Differentialgleichungen von zweiter Ordnung mit bis zu vier Variablen. Neben allgemeineren Untersuchungen steht die Frage nach direkten, praktischen Lösungsmethoden für solche Differentialgleichungen im Raum. Im Endeffekt existiert, außer numerischen Methoden, für die homogenen, linearen Differentialgleichungen nur ein Zugang: Die Reduktion einer partiellen Differentialgleichung in n Variablen auf einen Satz von n gewöhnlichen Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen. Diese Methode wird in dem Abschnitt Math.Kap. 3.1 vorgestellt. Nach Klärung dieser mehr technischen Frage kommt die physikalische Fragestellung in der Form einer allgemeineren Diskussion des Randwertproblems (der Elektrostatik) zum Wort (Math.Kap. 3.2). Eine generelle Methode zur Behandlung der inhomogenen Differentialgleichungen ist die Methode der Greenschen Funktionen. Die Greensche Funktion für das stationäre Randwertproblem wird in Math.Kap. 3.3, die retardierte Greensche Funktion der Elektrodynamik in Math.Kap. 3.4 behandelt.

3.1 Die Trennung der Variablen

Um das Prinzip dieser Methode zu erläutern, bietet sich die Betrachtung einer einfachen Situation an, die Laplacegleichung in zwei kartesischen Koordinaten.

3.1.1 Laplacegleichung, zwei kartesische Koordinaten

Die Laplacegleichung in einer zweidimensionalen kartesischen Welt lautet

$$\Delta V(x, y) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 .$$

Man kann deren Lösung mit einem Produktansatz (auch Ansatz nach Bernoulli genannt) versuchen

$$V(x, y) = f(x)g(y) .$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung ein, so folgt

$$g \frac{d^2 f}{dx^2} + f \frac{d^2 g}{dy^2} = 0 .$$

Man kann gewöhnliche Differentiationssymbole benutzen, da f und g Funktionen einer Veränderlichen sind. Multipliziert man diese Gleichung mit $1/(f \cdot g)$, so erhält man

$$\frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{1}{g(y)} \frac{d^2 g(y)}{dy^2} = 0 ,$$

also offensichtlich eine Gleichung der Form

$$F(x) + G(y) = 0 .$$

Diese Gleichung kann für beliebige Wertepaare (x, y) nur erfüllt sein, wenn die einzelnen Summanden konstante Größen sind. Man setzt also

$$F(x) = k \quad G(y) = -k .$$

Die Konstante k bezeichnet man als die **Separationskonstante**. Mit dieser Argumentation hat man aus einer partiellen Differentialgleichung zwei gewöhnliche Differentialgleichungen gewonnen

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = k f(x) \quad \frac{d^2 g(y)}{dy^2} = -k g(y) .$$

Setzt man voraus, dass diese gewöhnlichen Differentialgleichungen für vorgegebene Werte von k gelöst werden können

$$\Rightarrow f(k, x) \quad g(k, y) ,$$

so ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

- (i) Die Differentialgleichungen sind für alle k -Werte aus einem Intervall lösbar

$$a \leq k \leq b ,$$

wobei a und b auch $-\infty$ bzw. $+\infty$ sein können.

- (ii) Die Differentialgleichungen sind nur für diskrete Werte von k lösbar

$$k = k_n \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

- (iii) Möglich ist auch eine Kombinationen aus (i) und (ii).

Unabhängig von der Situation bezüglich der Integrationskonstanten muss man jedoch die folgenden Aussagen beachten: Jede Produktfunktion

$$V_k(x, y) = f(k, x)g(k, y)$$

ist per Konstruktion eine Lösung der partiellen Differentialgleichung. Sie kann jedoch keine allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung sein, da die Separationskonstante in der ursprünglichen, partiellen Differentialgleichung nicht auftritt. Infolge der Linearität der zur Diskussion stehenden Differentialgleichungen kann man die allgemeine Lösung durch Superposition der Einzellösungen ansetzen, in den einzelnen Fällen:

$$(i) \quad V(x, y) = \int_a^b dk A(k) f(k, x) g(k, y)$$

$$(ii) \quad V(x, y) = \sum_{n=0}^{(\infty)} A(k_n) f(k_n, x) g(k_n, y) .$$

Man kann verifizieren, dass diese Superpositionen eine Lösung der partiellen Differentialgleichung darstellen. So gilt z.B. im Fall (i)

$$\begin{aligned}\Delta V(x, y) &= \int_a^b dk A(k) \left(g \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + f \frac{d^2 g(y)}{dy^2} \right) \\ &= \int_a^b dk A(k) (g(kf) - f(kg)) = 0.\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu dem Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung enthält die allgemeine Lösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung beliebig viele Integrationskonstanten. Dies ist jedoch genau der Problemstellung angepasst. In einer Raumdimension kann man für ein Randwertproblem zwei Randwerte vorgeben. Im Fall von zwei Raumdimensionen würde eine Randkurve vorliegen, also beliebig viele Randpunkte. Anhand dieser Vorgabe kann man den gesamten Satz von Integrationskonstanten $A(k)$ bzw. $A(k_n)$ festlegen.

Da die Separation der Laplacegleichung in der dreidimensionalen Welt immer wieder gefragt ist, soll in den nächsten Abschnitten die Separation in den drei gebräuchlichsten Koordinaten (kartesische, Kugel- und Zylinderkoordinaten) angegeben werden. Die jeweilige Form des Laplaceoperators entnimmt man dem Math.Kap. 5.2, in dem auch Hinweise auf weitere Systeme von krummlinigen Koordinaten zu finden sind.

Auch in der dreidimensionalen Welt ist zu beachten, dass sich eine allgemeine Lösung der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung erst durch Superposition der Lösungen der drei gewöhnlichen Differentialgleichungen, die aus ihr hervorgehen, ergibt. Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen und die damit verbundene Diskussion der Separationskonstanten wird entweder im Haupttext oder in den Math.Kap. 4.2 bis 4.6 diskutiert.

Die Laplacegleichung separiert, wie unten gezeigt, in Kugelkoordinaten. Die Tatsache, dass nicht jede partielle Differentialgleichung in allen möglichen Koordinaten (oder überhaupt) separieren muss, kann demonstriert werden, indem man anstelle der Laplacegleichung eine lineare, homogene Gleichung wie

$$(\Delta + f(x))V(\mathbf{r}) = 0$$

betrachtet. Diese partielle Differentialgleichung ist in kartesischen, nicht aber in Kugelkoordinaten separierbar.

3.1.2 Helmholtz-/Laplacegleichung, kartesische Koordinaten

In diesem Abschnitt soll die Helmholtzgleichung

$$(\Delta + k^2)V(\mathbf{r}) = 0$$

betrachtet werden. Diese ist nur ein wenig allgemeiner als die Laplacegleichung, die $k = 0$ entspricht. Die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) V(x, y, z) = 0$$

kann in zwei Schritten separiert werden. Mit dem Ansatz

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

sortiert man die Differentialgleichung z.B. in der Form

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2.$$

Die linke Seite hängt nur von x ab, muss also gleich einer Konstanten λ_x sein. In der restlichen Differentialgleichung trennt man die Variablen noch einmal

$$-\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 - \lambda_x$$

und setzt beide Seiten gleich einer zweiten Konstanten λ_y . Die drei getrennten Differentialgleichungen können somit in der gleichen Form angegeben werden

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda_x X &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda_y Y &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + \lambda_z Z &= 0, \end{aligned}$$

sofern man die Relation

$$\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z = k^2$$

beachtet.

Die Lösung dieser Differentialgleichungen kann durch die Exponentialfunktion (oder Kosinus und Sinus) dargestellt werden, so sind z.B. die Fundamentallösungen für $X(x)$

$$X(x) \longrightarrow \{e^{+i\sqrt{\lambda_x}x}, e^{-i\sqrt{\lambda_x}x}\}.$$

Jede der Differentialgleichungen stellt jedoch ein Randwertproblem dar. Für die Angabe der expliziten Lösung benötigt man die Vorgabe von je zwei Funktionswerten, wie z.B.

$$X(a_x) = A_x \quad \text{und} \quad X(b_x) = B_x.$$

Das Randwertproblem wird in Math.Kap. 3.2 diskutiert.

3.1.3 Laplacegleichung, Kugelkoordinaten

Der Laplaceoperator in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) führt auf die Differentialgleichung

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} V(r, \theta, \varphi) = 0 .$$

Nach Einsetzen des Separationsansatzes

$$V(r, \theta, \varphi) = R(r)P(\theta)S(\varphi)$$

kann man durch Multiplikation der Gleichung mit

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{R P S}$$

und Sortieren zunächst den Anteil in dem Winkel φ abspalten

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{P} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = -\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\varphi^2} .$$

Beide Seiten dieser Gleichung müssen gleich einer Konstanten λ_φ gesetzt werden. In dem zweiten Separationsschritt multipliziert man die restliche Gleichung mit $1/\sin^2 \theta$ und sortiert, so dass man auf jeder Seite der Gleichung einen Ausdruck in einer anderen Variablen erhält

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{\lambda_\varphi}{\sin^2 \theta} .$$

Mit einer weiteren Separationskonstanten λ_θ lautet der endgültige Satz von getrennten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + 2r \frac{dR(r)}{dr} - \lambda_\theta R(r) &= 0 \\ \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) - \frac{\lambda_\varphi}{\sin^2 \theta} P(\theta) + \lambda_\theta P(\theta) &= 0 \\ \frac{d^2 S(\varphi)}{d\varphi^2} + \lambda_\varphi S(\varphi) &= 0 . \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung in der Variablen φ wird durch die Funktionen

$$\{e^{+i\sqrt{\lambda_\varphi}\varphi}, e^{-i\sqrt{\lambda_\varphi}\varphi}\} ,$$

bzw. durch eine Sinus- und Kosinusfunktion mit dem entsprechenden Argument, gelöst. Die Eindeutigkeit der periodischen Funktionen erfordert

$$S(\varphi + 2\pi) = S(\varphi) \longrightarrow e^{\pm 2\pi i \sqrt{\lambda_\varphi}} = 1 ,$$

eine Forderung, die durch

$$\sqrt{\lambda_\varphi} = m \quad \text{mit} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

erfüllt ist. Die Differentialgleichung kann somit in der Form

$$\frac{d^2 S(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 S(\varphi) = 0$$

mit der Lösung

$$S(\varphi) = e^{im\varphi}$$

notiert werden. Die Differentialgleichung in der Variablen θ definiert die Legendreschen Funktionen. Diese werden in Math.Kap. 4.3 vorgestellt. Die Lösung der Radialgleichung, die aus Potenzen von r besteht, findet man in Kap. 3.1.

3.1.4 Laplacegleichung, Zylinderkoordinaten

In Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) lautet die Laplacegleichung

$$\left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V(\varrho, z, \varphi) = 0.$$

Der Separationsansatz

$$V(\varrho, z, \varphi) = R(\varrho)S(\varphi)Z(z)$$

erlaubt auch hier durch Multiplikation mit $\varrho^2/R S Z$ in einem ersten Schritt die Abspaltung des Winkelanteils, mit der Wahl der Separationskonstanten wie zuvor somit

$$\frac{\varrho}{R} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dR}{d\varrho} \right) + \frac{\varrho^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = m^2.$$

Zur weiteren Separation teilt man durch ϱ^2 und schlägt den Term mit der Konstanten m^2 zu dem Radialanteil. Die getrennten Differentialgleichungen sind dann

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R(\varrho)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dR(\varrho)}{d\varrho} + \left(\lambda_\varrho - \frac{m^2}{\varrho^2} \right) R(\varrho) &= 0 \\ \frac{d^2 S(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 S(\varphi) &= 0 \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - \lambda_\varrho Z(z) &= 0. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung in der Radiuskoordinate führt auf die Besselfunktionen, die in Math.Kap. 4.4 näher beschrieben werden.

3.2 Randwertaufgaben

Die analytische Lösung der Laplacegleichung erfordert aus technischer Sicht Separation der Variablen. Aus physikalischer Sicht ist das durch die Laplacegleichung gestellte Potentialproblem erst vollständig durch die Vorgabe von Randbedingungen definiert. Da die Laplacegleichung (ebenso die Poissongleichung) eine lineare Differentialgleichung des elliptischen Typus ist, können als Randbedingungen nur

Potentialwerte auf (geschlossenen) Flächen

oder

die Normalenableitung des Potentials auf (geschlossenen) Flächen

oder auch eine lineare Kombination dieser Vorgaben, gegeben sein. Im ersten Fall wird das Potentialproblem als ein **Dirichletsches Randwertproblem** bezeichnet. Die Bedingungen

$$V(\mathbf{r})|_{F_i} = V_i \quad i = 1, 2, \dots,$$

wobei die Flächen F_i geschlossen oder offen sein können, sind Dirichletsche Randbedingungen. Die Problemstellung in dem zweiten Randwertproblem

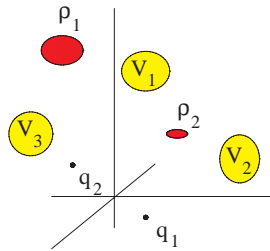


Abb. 3.1. Vorgabe bei Randwertproblemen der Elektrostatik

lautet: Auf Flächen F_i dient die Normalenableitung

$$\left. \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{F_i} = E_{n,i}$$

zur Festlegung der gesuchten Lösung. Dieses Problem bezeichnet man als ein **Neumannsches Randwertproblem**.

Die Frage, die sich im Rahmen der Untersuchung der Struktur dieser Randwertaufgaben stellt, ist die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösung dieser Randwertprobleme. Zur Beantwortung dieser Frage kann man ein Gebiet G betrachten, das von zwei Flächen F_1 und F_2 umschlossen ist (Abb. 3.2). In

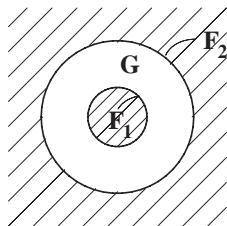


Abb. 3.2. Illustration der Geometrie der Randwertprobleme

diesem Gebiet betrachtet man die Lösung der Laplacegleichung $\Delta V(\mathbf{r}) = 0$ mit den Randbedingungen

$$(a) \quad V(\mathbf{r}_{F_i}) = f(\mathbf{r}_{F_i}) \quad (\text{Dirichlet})$$

$$(b) \quad \left. \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{\mathbf{r}_{F_i}} = g(\mathbf{r}_{F_i}) \quad (\text{Neumann})$$

auf den jeweiligen Flächen F_i .

Man kann dann folgendermaßen argumentieren: Nimmt man an, dass zwei Lösungen $V_1(\mathbf{r})$ und $V_2(\mathbf{r})$ existieren, die die Differentialgleichung und einen der Sätze von Randbedingungen erfüllen, so gilt für die Differenz der beiden Lösungen

$$\phi(\mathbf{r}) = V_1(\mathbf{r}) - V_2(\mathbf{r})$$

die Laplacegleichung

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = 0 ,$$

sowie entweder

$$(a) \quad \phi(\mathbf{r}_{F_i}) = 0 \quad \text{oder} \quad (b) \quad \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{\mathbf{r}_{F_i}} = 0 .$$

Für die Differenzfunktion ϕ berechnet man den folgenden Ausdruck

$$\nabla \cdot (\phi(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r})) = \phi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) + (\nabla \phi(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \phi(\mathbf{r})) .$$

Der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwindet, da ϕ eine Lösung der Laplacegleichung ist. Für das Volumenintegral über das Gebiet G gilt somit

$$\iiint_G (\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 dV = \iiint_G \nabla \cdot (\phi(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r})) dV .$$

Die rechte Seite kann mit dem Divergenztheorem (Band 1 Math.Kap. 5.3.3) umgeschrieben werden

$$= \iint_{F_1} \phi(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f}_1 + \iint_{F_2} \phi(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f}_2 .$$

Es ist noch eine kurze Erläuterung zu der Orientierung der Flächenelemente $d\mathbf{f}_1$ und $d\mathbf{f}_2$ nötig. Da das Gebiet G nicht notwendigerweise einfach zusammenhängend ist, müssen die Begrenzungsflächen formal durch eine doppelt belegte Zwischenfläche verbunden werden. Damit ergeben sich die in (Abb. 3.3) angedeuteten Orientierungen von $d\mathbf{f}_1$ und $d\mathbf{f}_2$ jeweils in das Gebiet G hinein. Die Trennfläche selbst liefert keinen Beitrag.

Da die Vektoren $d\mathbf{f}_i$ in jedem Punkt senkrecht auf den Flächen F_i stehen, erhält man

$$\iiint_G (\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 dV = \iint_{F_1} \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} df + \iint_{F_2} \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} df .$$

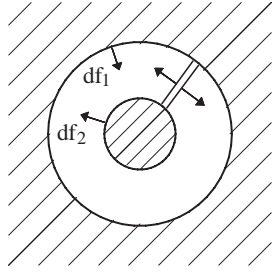


Abb. 3.3. Umsetzung der Geometrie bei Randwertproblemen

Sowohl im Fall der Randbedingung (a) als auch im Fall der Randbedingung (b) verschwinden die beiden Oberflächenintegrale. Es ist auf der Berandung entweder $\phi(\mathbf{r})$ oder $\partial\phi(\mathbf{r})/\partial n$ gleich Null. Da der Integrand des Volumenintegrals (ein Skalarprodukt) positiv definit ist, kann die Aussage

$$\iiint_G (\nabla\phi(\mathbf{r}))^2 dV = 0$$

nur erfüllt sein, wenn $\nabla\phi(\mathbf{r}) = 0$ bzw.

$$\phi(\mathbf{r}) = \text{const.}$$

ist.

Die Folgerung ist also: Lösungen der Laplacegleichung, die entweder Dirichletsche oder Neumannsche Randbedingungen erfüllen, können sich höchstens um eine Konstante unterscheiden. Im Fall von Dirichletbedingungen gilt sogar wegen

$$\phi(\mathbf{R}_{F_1}) = \phi(\mathbf{R}_{F_2}) = 0$$

die Aussage $\phi(\mathbf{r}) = 0$. Die Konstante muss den Wert Null haben. Es gibt eine eindeutige Lösung $V(\mathbf{r})$. Im Fall der Neumannbedingungen ist

$$\left. \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{F_1} = \left. \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{F_2} = 0.$$

Die Konstante ist durch die Randbedingung nicht festgelegt.

Der folgende Punkt muss beachtet werden: Voraussetzung für die Anwendung des Divergenztheorems ist das Vorliegen von geschlossenen Flächen F_i . Nur dann kann man die Eindeutigkeit der Lösung garantieren.

Ist neben den Randwerten noch eine Ladungsverteilung (Abb. 3.4) vorgegeben, so steht die Poissongleichung

$$\Delta V(\mathbf{r}) = -4\pi k_e \rho(\mathbf{r}),$$

eine inhomogene Differentialgleichung, zur Diskussion. Bezüglich der Frage der Eindeutigkeit der Lösung dieses Potentialproblems kann man die Argumentation zu der Laplacegleichung nahezu wörtlich wiederholen. Nimmt man

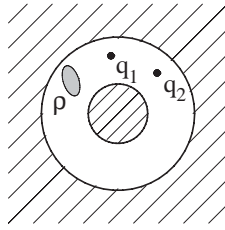


Abb. 3.4. Zur Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung

an, dass für die Differentialgleichung

$$\Delta V(\mathbf{r}) = -4\pi k_e \rho(\mathbf{r})$$

zwei verschiedene Lösungen V_1 und V_2 existieren, die von der gleichen Ladungsverteilung hervorgebracht werden und die die gleichen Randbedingungen erfüllen, so gilt für die Differenzfunktion wiederum

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \Delta(V_1(\mathbf{r}) - V_2(\mathbf{r})) = 0$$

mit

$$\phi(\mathbf{r}_{F_i}) = 0 \quad \text{oder} \quad \left. \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{\mathbf{r}_{F_i}} = 0 .$$

Die weitere Argumentation unterscheidet sich nicht von dem Fall der Laplace-Gleichung.

3.3 Die Greensche Funktion für Randwertaufgaben

Greensche Funktionen sind ein generelles Hilfsmittel zur Diskussion der geometrischen Struktur und zur Lösung von *inhomogenen*, gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen (zweiter Ordnung). Die Grundidee ist es, eine Lösung von äquivalenten Differentialgleichungen zu finden, deren inhomogener Term eine möglichst einfache Form hat. Auf der anderen Seite soll die Lösung nicht nur die Erfüllung einer speziellen Randbedingung beinhalten sondern, entsprechend der Geometrie der Randbedingungen, einer ganzen Klasse von Randbedingungen. Aus der Lösung dieser Voraufgabe kann man im Anschluss für die vorgegebene Geometrie die Lösung mit beliebigen inhomogenen Termen gewinnen.

In diesem Abschnitt werden formale und praktische Aspekte der Greenschen Funktionen für die Poisson-Gleichung erarbeitet.

3.3.1 Definition der Greenschen Funktion

Für die Poisson-Gleichung ist, wie für eine gewöhnliche inhomogene, lineare Differentialgleichung, ein Lösungsansatz der Form

$$V(\mathbf{r}) = V_{\text{hom}}(\mathbf{r}) + V_{\text{part}}(\mathbf{r})$$

möglich, wobei beide Lösungsanteile zusammen die gestellten Randbedingungen erfüllen müssen. Die partikuläre Lösung kann über den Ansatz

$$V_{\text{part}}(\mathbf{r}) = \iiint dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}')$$

diskutiert werden. Die hier eingeführte Funktion G , eine Funktion von sechs Variablen, bezeichnet man als eine **Greensche Funktion**. Wirkt man mit dem Laplaceoperator auf den allgemeinen Lösungsansatz ein, so folgt

$$\Delta V(\mathbf{r}) = \Delta V_{\text{hom}}(\mathbf{r}) + \iiint dV' \Delta_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') = -4\pi \rho(\mathbf{r}) .$$

Da V_{hom} eine Lösung der Laplacegleichung ist, gilt

$$-4\pi \rho(\mathbf{r}) = 0 + \iiint dV' \Delta_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') .$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn die Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$\Delta_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

gehört. Da die Greensche Funktion durch eine ‘Punktladung’ und Randbedingungen, nicht aber durch eine spezifische Ladungsverteilung, bestimmt ist, ist zu erwarten, dass eine Greensfunktion bestimmte Klassen von Randwertaufgaben abdeckt, so z.B. für Dirichletbedingungen auf zwei konzentrischen Kugelschalen unabhängig von der Art der Ladungsverteilung in dem Zwischenraum. Die Aufbereitung derartiger allgemeiner Lösungsformeln soll hier im Vordergrund stehen. Die Frage nach der expliziten Berechnung von Greenschen Funktionen wird in Kap. 4.3 und in den Aufgaben angesprochen.

3.3.2 Die Greenschen Integralsätze

Die weitere Aufbereitung basiert auf den sogenannten Greenschen Integralsätzen. Diese folgen direkt aus dem schon öfter zitierten Divergenztheorem (Band 1 Math.Kap. 5.3.3)

$$\iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV = \oint_{O(B)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} .$$

Der Bereich B ist von der Fläche $O(B)$ umschlossen. Diese Relation gilt für beliebige Vektorfelder \mathbf{F} . Benutzt man speziell ein Vektorfeld der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) ,$$

wobei die Funktionen $\phi(\mathbf{r})$ und $\psi(\mathbf{r})$ zwei beliebige, differenzierbare Skalarfelder darstellen, so gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r}) + \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) ,$$

sowie

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_n df = \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} df.$$

Die Ableitung $\partial \psi(\mathbf{r}) / \partial n = \mathbf{e}_n \cdot \nabla \psi(\mathbf{r})$ ist die Normalenableitung der Skalarfunktion ψ auf der Fläche $O(B)$, wobei der Normalenvektor in den Außenbereich des Volumens B zeigt. Setzt man diese Vorgaben in das Divergenztheorem ein, so folgt

$$\iiint_B [\phi(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r}) + \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r})] dV = \oint_{O(B)} \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} df.$$

Diese Relation zwischen einem Volumenintegral und einem Oberflächenintegral von zwei Skalarfeldern bezeichnet man als den **ersten Greenschen Integralsatz**. Man kann die Argumentation mit dem Ansatz

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r})$$

wiederholen. Es folgt dann die Relation

$$\iiint_B [\psi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) + \nabla \psi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r})] dV = \oint_{O(B)} \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} df.$$

Subtraktion dieser Varianten des Divergenztheorems ergibt den **zweiten Greenschen Integralsatz** (auch **Greens Theorem** genannt)

$$\begin{aligned} \iiint_B [\phi(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r})] dV = \\ \oint_{O(B)} \left[\phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} - \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] df. \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.3.3 Die allgemeine Lösungsformel des Randwertproblems

Setzt man in Greens Theorem die speziellen Funktionen

$$\phi(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) \quad \psi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

ein, so erhält man in wenigen Schritten die gesuchte allgemeine Lösungsformel. Man benutzt die Differentialgleichungen

$$\Delta V(\mathbf{r}) = -4\pi k_e \rho(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \Delta_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi k_e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

und erhält mit dem Greenschen Theorem (3.1)

$$\begin{aligned}
& -4\pi k_e \iiint_B [V(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r})] dV \\
& = \oint_{O(B)} \left[V(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial n} \right] df.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird nach $V(\mathbf{r}')$ aufgelöst und die Variablen werden umbenannt $\mathbf{r} \longleftrightarrow \mathbf{r}'$. Das Resultat ist die Lösungsformel

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{r}) &= \iiint_B G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') dV' \\
&+ \frac{1}{4\pi k_e} \oint_{O(B)} \left[G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial V(\mathbf{r}')}{\partial n'} - V(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right] df'.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Mit dieser Relation ist ein Zusammenhang zwischen dem Potential $V(\mathbf{r})$ und der Greens Funktion $G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ hergestellt. Die Formel besagt: Sind die Ladungsverteilung und die Greensche Funktion bekannt und ist $V(\mathbf{R})$ und $\partial V(\mathbf{R})/\partial n$ auf Randflächen eines Bereiches B vorgegeben, so kann man das Potential $V(\mathbf{r})$ in jedem Punkt des Bereiches berechnen. Da jedoch $V(\mathbf{R})$ und $\partial V(\mathbf{R})/\partial n$ für das Potentialproblem nicht gleichzeitig auf den Randflächen vorgegeben werden können, muss die Greens Funktion bestimmte Bedingungen erfüllen, die mit den Randbedingungen des gestellten Problems korrespondieren. Diese Randbedingungen für die Greensche Funktion sollen nun im Einzelnen festgelegt werden.

- Einfache Randbedingungen: In diesem Fall ist das Gebiet B der gesamte Raum, der Rand $O(B)$ ist entsprechend eine unendlich große Kugelfläche. Mit der Vorgabe, dass das Potential auf $O(B)$ verschwindet

$$V(\mathbf{r}') \xrightarrow{r' \rightarrow \infty} 0,$$

erhält man aus der zentralen Gleichung (3.2) gemäß den Randbedingung für das Potential

$$0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\iiint_B G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') dV' + \oint_{O(B) \rightarrow \text{Ku}_\infty} \frac{G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{4\pi k_e} \frac{\partial V(\mathbf{r}')}{\partial n'} df' \right].$$

Da die Richtungsableitung $\partial V(\mathbf{r})/\partial n$ auf der unendlich großen Kugel nicht vorgegeben ist, ist das Potentialproblem nur eindeutig lösbar, falls die Greens Funktion die Randbedingung

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

erfüllt.

Die Lösung der Differentialgleichung für die Greensche Funktion mit dieser Randbedingung ist das Punktladungspotential

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{k_e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ,$$

an dem man explizit eine Symmetrie der Greensfunktion erkennt. Die allgemeine Lösungsformel geht in diesem Spezialfall in das bekannte Resultat

$$V(\mathbf{r}) = \iiint G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' = k_e \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

über.

- Dirichletrandbedingungen: Für den Dirichletfall ist B ein beliebiges, geschlossenes Gebiet (Abb. 3.5). Das Potential ist auf den Randflächen vor-

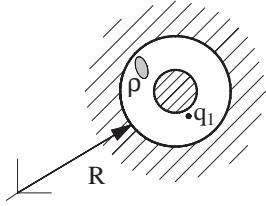


Abb. 3.5. Zum Dirichletproblem

gegeben

$$V(\mathbf{R}) = f(\mathbf{R}) \quad \mathbf{R} \in O(B) .$$

Betrachtet man die allgemeine Lösungsformel (3.2), so stellt man fest: Da die Richtungsableitung $\partial V(\mathbf{R})/\partial n$ nicht vorgegeben ist, muss man auf den Randflächen

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{R} \in O(B)$$

fordern, damit man nicht in einen Widerspruch gerät. Die Greensche Funktion muss auf der Randfläche verschwinden. Die Lösungsformel reduziert sich in diesem Fall auf die Aussage

$$V(\mathbf{r}) = \iiint_B G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi k_e} \oint_{O(B)} V(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} df' .$$

Die Greensche Funktion bestimmt, bei vorgegebener Ladungsverteilung und vorgegebenen Potentialwerten auf dem Rand, die Lösung des Poissonproblems.

- Neumannsche Randbedingungen: In dem Fall von Neumannschen Randbedingung ist $\partial V(\mathbf{R})/\partial n$ auf den Randflächen vorgegeben. Die allgemeine Lösungsformel wäre in diesem Fall verwertbar, wenn für die Greensche Funktion die Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{R} \in O(B)$$

gilt. Diese Forderung ist jedoch *nicht* erfüllbar. Sie widerspricht der Differentialgleichung für die Greensche Funktion. Anwendung des Divergenztheorems ergibt nämlich

$$\begin{aligned} \oint_{O(B)} \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} df' &= \oint_{O(B)} \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f}' \\ &= \iiint_B \Delta_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dV' \\ &= -4\pi k_e \iiint_B \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = -4\pi k_e \quad (\mathbf{r} \in B) . \end{aligned}$$

Eine mögliche (aber trotzdem einfache) Wahl der Randbedingung ist

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} = \text{const.} \quad \text{für } \mathbf{r}' = \mathbf{R} \in O(B) .$$

Aus dem Divergenztheorem folgt dann für die Konstante

$$\text{const.} = -\frac{4\pi k_e}{F(O(B))} ,$$

wobei $F(O(B))$ die Fläche von $O(B)$ ist. Die Lösungsformel lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \iiint_B G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') dV' \\ &+ \frac{1}{F_{O(B)}} \oint_{O(B)} V(\mathbf{r}') df' + \frac{1}{4\pi k_e} \oint_{O(B)} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial V(\mathbf{r}')}{\partial n'} df' . \end{aligned}$$

Der zweite Term ist der Mittelwert des Potentials auf den vorgegebenen Randflächen. Die Tatsache, dass ein solcher Term auftritt, ist mit der Aussage verknüpft, dass das Neumann Problem *keine* vollständig eindeutige Lösung besitzt. Ist jedoch eine der Randflächen eine unendlich große Kugel, so ist die Fläche $F_{O(B)}$ unendlich groß und man kann diesen Term ignorieren. Die anderen Terme stellen den Beitrag der vorgegebenen Ladungsverteilung und den Oberflächenbeitrag, der durch die Normalenableitung des Potentials bestimmt ist, dar.

3.3.4 Die Symmetrie der Greenschen Funktion

Eine wichtige Eigenschaft der Greenschen Funktion ist deren Symmetrie. Wegen der Symmetrie der Deltafunktion $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$, erwartet man, dass die Greensche Funktion, eine Funktion von sechs Variablen, symmetrisch gegen Vertauschung von \mathbf{r} und \mathbf{r}' ist

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) ,$$

so dass

$$\Delta_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi k_e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

gilt. Der Nachweis dieser Vermutung lässt sich für den Fall von Dirichlet-Randbedingungen direkt erbringen. Man benutzt dazu das Greensche Theorem (3.1)

$$\iiint_B [\phi(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r})] dV$$

$$\oint_{O(B)} \left[\phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} - \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] df$$

und setzt die Funktionen

$$\phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad \psi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')$$

für die die Randbedingungen

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') = 0 \quad \text{für } \mathbf{r} = \mathbf{R} \in O(B)$$

gelten sollen, ein. Es folgt dann bei Benutzung der Differentialgleichung für die Greens Funktionen

$$\begin{aligned} & \iiint_B dV \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (-4\pi k_e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') (-4\pi k_e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \right] \\ &= \oint_{O(B)} df \left[G(\mathbf{R}, \mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')}{\partial n} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} - G(\mathbf{R}, \mathbf{r}'') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} \right] . \end{aligned}$$

Die rechte Seite verschwindet infolge der Randbedingung für G und es bleibt auf der linken Seite

$$G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 0 .$$

3.4 Die retardierte Greensche Funktion für Anfangswertprobleme

Zur Diskussion der Greensfunktion der vier inhomogenen Wellengleichungen der Elektrodynamik kann man sich auf eine dieser Gleichungen beschränken, z.B. auf die Gleichung für das skalare Potential im Vakuum

$$\Delta V(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi k_e \rho_w(\mathbf{r}, t) .$$

Die zugehörige Greensche Funktion, die durch den Ansatz für eine Partikulärlösung

$$V_{\text{part}}(\mathbf{r}, t) = k_e \iiint d^3 r' \int dt' G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') \rho_w(\mathbf{r}', t')$$

definiert ist, wird durch die Differentialgleichung

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$$

und ‘Anfangsbedingungen’ bestimmt. Ausgehend von der vierdimensionalen Fourierentwicklung der Partikulärlösung der Wellengleichung in den Variablen ω und \mathbf{k}

$$V_{\text{part}}(\mathbf{r}, t) = k_e \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \iiint d^3 k g(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

findet man (siehe Kap. 6.6) die Darstellung

$$G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \iiint d^3 k \frac{1}{\left(k^2 - \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2}\right)} e^{i(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))} e^{-i\omega(t-t')},$$

in die jedoch die **Kausalitätsbedingung**

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = 0 \quad \text{für } t - t' \leq 0$$

noch nicht eingearbeitet ist. Um dies zu erreichen, muss man die angedeutete Integration über ω entlang der reellen Achse durch Konturintegration (siehe Math.Kap. 2.3) erweitern.

3.4.1 Definition der retardierten Greensfunktion durch Konturintegration

Man beginnt zweckmäßigerweise mit der Betrachtung der ω -Integration in der allgemeinen Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} f(\omega) \quad (\tau = t - t').$$

Derartige Integrale mit (komplexen) Funktionen entlang einer reellen Achse kann man durch Konturintegration berechnen. Die Technik ist eine Ergänzung des Integrationsweges durch einen geeigneten, unendlich großen Halbkreis zu einem geschlossenen Weg und anschließende Anwendung der Cauchyschen Integralformeln. Man muss dabei die zwei möglichen Fälle $\tau > 0$ und $\tau < 0$ unterscheiden.

- Ist $\tau > 0$, so benutzt man zur Ergänzung einen Halbkreis in der unteren komplexen Halbebene (Abb. 3.6), der im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Für das Argument der Exponentialfunktion findet man für Punkte in der unteren komplexen ω Ebene mit

$$\omega = a - ib \quad b > 0$$

die Faktorisierung

$$e^{-i\omega\tau} = e^{-ia\tau} e^{-b\tau}.$$

Der Faktor $e^{-b\tau}$ bedingt, dass im Grenzfall $b \rightarrow \infty$ das Kurvenintegral über den Halbkreis nicht beiträgt und somit der Wert des Integrals entlang der reellen Achse durch die Ergänzung nicht verfälscht wird. Weist die

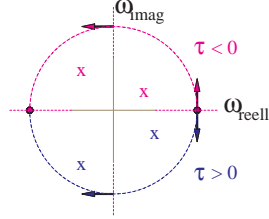


Abb. 3.6. Konturintegration: Ergänzungen zu geschlossenen Kurven mit eingeschlossenen Polstellen

Funktion $f(\omega)$ entlang der reellen Achse keine Singularitäten auf, so kann man für das Integral entlang dieser Achse

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} f(\omega) = \oint d\omega e^{-i\omega\tau} f(\omega)$$

schreiben. Auf das Integral entlang der geschlossenen Kurve kann man nun den Residuensatz anwenden und findet

$$\oint d\omega e^{-i\omega\tau} f(\omega) = -2\pi i \sum \text{Res}(f(\omega), \text{untere Halbebene}).$$

- In dem Fall $\tau < 0$ benutzt man entsprechend einen Halbkreis in der oberen Halbebene (Abb. 3.6), der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird, und findet mit

$$\omega = a + ib \quad b > 0$$

und

$$e^{-i\omega\tau} = e^{-ia\tau} e^{+b\tau}$$

die Aussage

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} f(\omega) &= \oint d\omega e^{-i\omega\tau} f(\omega) \\ &= +2\pi i \sum \text{Res}(f(\omega), \text{obere Halbebene}). \end{aligned}$$

Die jeweiligen Vorzeichen vor der Summe über die Residuen entsprechen der entgegengesetzten Orientierung der beiden Kurven des Konturintegrals.

Das Integral, das bei der Diskussion der Greenschen Funktion ansteht,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\left(k^2 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\right)} \quad (\tau = t - t')$$

unterscheidet sich von diesen einfachen Fällen, denn der Integrand hat Polstellen auf der reellen Achse, und zwar einfache Pole an den Stellen $\omega = \pm kc/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Aus diesem Grund ist das Integral nicht definiert. Man kann jedoch verwandte Integrale betrachten, bei denen man die Polstellen umgeht.

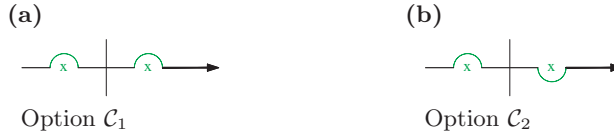


Abb. 3.7. Konturintegration: Umgehung von Polstellen auf der reellen Achse



Abb. 3.8. Konturintegration: Umgehung von Polstellen auf der reellen Achse

‘Umgehen‘ bedeutet dabei: Integriere entlang der reellen Achse bis zu der ersten Polstelle, umgehe die singuläre Stelle mit einem kleinen Halbkreis (in der oberen oder der unteren Halbebene), integriere weiter entlang der reellen Achse bis zu der zweiten singulären Stelle, umgehe auch diese mit einem kleinen Halbkreis, integriere weiter entlang der reellen Achse und ergänze schließlich, wie oben, dieses Integral zu einem Konturintegral über eine geschlossene Kurve durch einen unendlich großen Halbkreis in der unteren oder der oberen Halbebene. Der Integrationsweg schneidet nicht durch singuläre Stellen und z.B. das beschriebene Kurvenintegral lautet im Detail

$$\oint_{\mathcal{C}, \eta} d\omega e^{-i\omega\tau} f(\omega) = \left\{ \int_{-\infty}^{\omega_1 - \eta} d\omega + \int_{\text{Hkreis 1}} d\omega + \int_{\omega_1 + \eta}^{\omega_2 - \eta} d\omega + \int_{\text{Hkreis 2}} d\omega + \int_{\omega_2 + \eta}^{\infty} d\omega + \int_{\text{gr. Hkreis}} d\omega \right\} e^{-i\omega\tau} f(\omega) .$$

Nach der Ausführung der Integration betrachtet man den Grenzfall, dass die Radien der beiden kleinen Halbkreise gegen Null gehen. Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten (Abb. 3.7a,b und 3.8a,b), die Polstellen zu umgehen. Auf diese Weise kann man vier Funktionen definieren

$$\oint_{\mathcal{C}_i} d\omega e^{-i\omega\tau} f(\omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \oint_{\mathcal{C}_{i,\eta}} d\omega e^{-i\omega\tau} f(\omega) ,$$

die die Differentialgleichung der zeitabhängigen Greenschen Funktion sowie zusätzliche Bedingungen erfüllen und die wohldefiniert sind. Die Frage, die bei der Untersuchung dieser Funktionen im Vordergrund steht, lautet: Entspricht eine der vier Möglichkeiten der Kausalitätsbedingung?

Auch bei der Untersuchung der vier Konturintegrale muss man die Fälle unterscheiden, dass die Zeitdifferenz τ größer oder kleiner als Null ist.

- Ist $\tau < 0$, so ist eine Ergänzung des Integrationsweges entlang der reellen Achse durch einen großen Halbkreis in der oberen Halbebene notwendig. Man stellt fest, dass für die Umgehung \mathcal{C}_1 in diesem Fall das Konturintegral

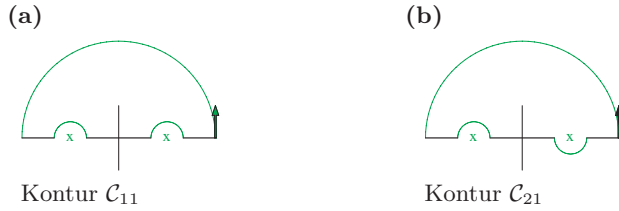


Abb. 3.9. Konturintegration: Ergänzungen der Kontur für $\tau < 0$

verschwindet, da keine Polstelle innerhalb des geschlossenen Integrationsweges liegt (Abb. 3.9a)

$$\oint_{\mathcal{C}_{11}} d\omega \left(\mathbf{k}^2 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \right)^{-1} e^{-i\omega\tau} = 0 \quad \text{für } \tau < 0 .$$

Für die Umgehungen $\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_4$ sind eine oder zwei Polstellen in dem Integrationsweg eingeschlossen, so dass man Beiträge von den entsprechenden Residuen erhält (Abb. 3.9b)

$$\oint_{\mathcal{C}_{m1}} d\omega \left(\mathbf{k}^2 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \right)^{-1} e^{-i\omega\tau} = 2\pi i \sum \text{Res} \quad \text{für } \tau < 0 \quad m = 2, \dots, 4 .$$

- Im Fall einer positiven Zeitdifferenz $\tau > 0$ ist eine Ergänzung des Integrationsweges in der unteren Halbebene notwendig. Für den so geschlossenen Integrationsweg ergibt der Weg \mathcal{C}_{12} (Abb. 3.10a) einen nichtverschwindenden Beitrag, da die Polstellen von dem Weg \mathcal{C}_{12} eingeschlossen werden. Es ist

$$\oint_{\mathcal{C}_{12}} d\omega \left(\mathbf{k}^2 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \right)^{-1} e^{-i\omega\tau} = -2\pi i \sum \text{Res} \quad \text{für } \tau > 0 .$$

Eine entsprechende Aussage gilt für die Optionen \mathcal{C}_{22} und \mathcal{C}_{32} (Abb. 3.10b), während der Integrationsweg mit der Option \mathcal{C}_{42} in diesem Fall keinen Beitrag ergibt.

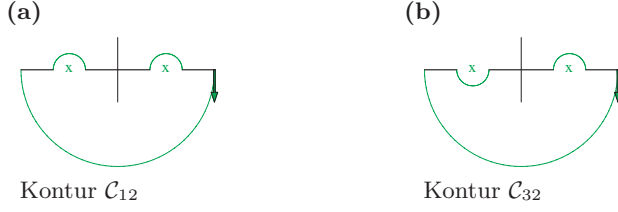


Abb. 3.10. Konturintegration: Ergänzungen der Kontur für $\tau > 0$

Die Frage, welche der vier möglichen Umgehungen der Polstellen die Kausalitätsbedingungen ($\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$)

$$G^{(+)}(\mathbf{R}, \tau) = 0 \quad \text{für} \quad \tau < 0 \quad G^{(+)}(\mathbf{R}, \tau) \neq 0 \quad \text{für} \quad \tau > 0$$

erfüllt, ist nun leicht zu beantworten. Es ist die Umgehung \mathcal{C}_1 , denn es gilt

$$\oint_{\mathcal{C}_{11}} d\omega \left(k^2 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \right)^{-1} e^{-i\omega\tau} = 0 \quad \text{für} \quad \tau < 0$$

$$\oint_{\mathcal{C}_{12}} d\omega \left(k^2 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \right)^{-1} e^{-i\omega\tau} \neq 0 \quad \text{für} \quad \tau > 0.$$

Ohne expliziten Beweis sei erwähnt, dass man mit der Umgehung \mathcal{C}_4 , die einen Beitrag für die Ergänzung im Fall $\tau < 0$, jedoch keinen Beitrag für $\tau > 0$ liefert, eine avancierte Greens Funktion gewinnen würde. Die Optionen \mathcal{C}_2 und \mathcal{C}_3 , bei denen sich sowohl für $\tau < 0$ als auch für $\tau > 0$ Beiträge ergeben, entsprechen Greens Funktionen für stehende Wellen.

Anhand dieser Betrachtungen bietet sich die folgende, vollständige Definition einer retardierten Greens Funktion an

$$G^{(+)}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{4\pi^3} \iiint d^3k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})} \oint_{\mathcal{C}_{1m}} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\left(k^2 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \right)}$$

$$\text{mit} \quad m = 1, 2.$$

Der Integrationsweg \mathcal{C}_1 entlang der reellen Achse ist der für die retardierte Greens Funktion zuständige Weg. Die notwendige Ergänzung zu einer geschlossenen Kontur durch unendlich große Halbkreise in der oberen oder der unteren Halbebene regelt das Vorzeichen der Zeitdifferenz τ . Die Kontur \mathcal{C}_{11} (nichtkausal) schließt keine Pole ein, das Integral hat den Wert Null. Der relevante Beitrag zu der retardierten Greens Funktion ist das Integral mit dem Integrationsweg \mathcal{C}_{12} (kausal). Die nächste Aufgabe ist die explizite Auswertung dieses Integrals.

3.4.2 Auswertung des Konturintegrals

Zur Abkürzung bezeichnet man das anstehende Integral über ω mit

$$F(k) = \oint_{C_{12}} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\left(k^2 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\right)},$$

wobei noch einmal die Aussage $\tau > 0$ festgehalten werden soll. Man definiert zusätzlich $c_{\text{med}} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ und benutzt die einfache Partialbruchzerlegung

$$F(k) = \frac{c_{\text{med}}}{2k} \oint_{C_{12}} d\omega \left[\frac{1}{(\omega + c_{\text{med}}k)} - \frac{1}{(\omega - c_{\text{med}}k)} \right] e^{-i\omega\tau}.$$

Da die Exponentialfunktion in der komplexen Ebene keine Singularitäten besitzt, kann man die Cauchyformel direkt anwenden

$$F(k) = -\frac{c_{\text{med}}\pi i}{k} \left[e^{-i\tau(-c_{\text{med}}k)} - e^{-i\tau(c_{\text{med}}k)} \right].$$

Das Vorzeichen vor dem Gesamtergebn ist eine Folge der Definition des negativen Umlaufsinn bei der Cauchyintegration. In Zusammenfassung ergibt sich

$$F(k) = \frac{2\pi c_{\text{med}}}{k} \sin(c_{\text{med}}k\tau).$$

Die abschließende k -Integration

$$G^{(+)}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{4\pi^3} \iiint d^3k F(k) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}$$

ist nicht trivial. Man benutzt Kugelkoordinaten im k -Raum, wobei der Vektor \mathbf{R} in die z -Achse gelegt werden kann, so dass der Winkel zwischen den Vektoren \mathbf{R} und \mathbf{k} dem Polarwinkel θ_k entspricht

$$G^{(+)}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^\infty k^2 dk F(k) \int d\Omega_k e^{ikR \cos \theta_k}.$$

Die Winkelintegration ergibt

$$\int d\Omega_k e^{ikR \cos \theta_k} = \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_{-1}^1 dx e^{ikRx} = \frac{4\pi}{kR} \sin kR$$

und es folgt

$$G^{(+)}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{2c_{\text{med}}}{\pi R} \int_0^\infty dk \sin(kR) \sin(c_{\text{med}}\tau k).$$

Um das verbleibende Integral auszuwerten, benutzt man die Darstellung der Sinusfunktion im Komplexen

$$G^{(+)}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{c_{\text{med}}}{2\pi R} \int_0^\infty dk \left\{ e^{i(R-c_{\text{med}}\tau)k} + e^{-i(R-c_{\text{med}}\tau)k} \right. \\ \left. - e^{i(R+c_{\text{med}}\tau)k} - e^{-i(R+c_{\text{med}}\tau)k} \right\},$$

substituiert in dem zweiten und vierten Term $k \rightarrow -k$, so dass die Integration auf das Intervall $[-\infty, \infty]$ ausgedehnt werden kann

$$G^{(+)}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{c_{\text{med}}}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left\{ e^{i(R - c_{\text{med}}\tau)k} - e^{i(R + c_{\text{med}}\tau)k} \right\}$$

und erkennt, dass jeweils eine Darstellung der eindimensionalen Deltafunktion (vergleiche Math.Kap. 1) vorliegt

$$G^{(+)}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{c_{\text{med}}}{R} [\delta(R - c_{\text{med}}\tau) - \delta(R + c_{\text{med}}\tau)] .$$

Da das Argument der zweiten Deltafunktion für $\tau > 0$ immer positiv ist

$$R + c_{\text{med}}\tau > 0 \quad \text{für } \tau > 0 ,$$

trägt der zweite Term nicht bei und kann ignoriert werden. Zur Umschreibung verwendet man noch die Eigenschaften

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad \text{und} \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

der δ -Funktion und erhält

$$G^{(+)}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{R} \delta\left(\tau - \frac{R}{c_{\text{med}}}\right) .$$

Explizit lautet also die retardierte Greensche Funktion

$$G^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \begin{cases} 0 & t - t' < 0 \\ \frac{\delta\left(t - t' - \frac{1}{c_{\text{med}}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & t - t' > 0 \end{cases} .$$

Die Deltafunktion gibt das kausale Verhalten korrekt wieder. Ein Ereignis (z.B. die Anwesenheit einer bewegten Punktladung), das zur Zeit t' an der Stelle \mathbf{r}' stattfindet, wird zu der Zeit

$$t = t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_{\text{med}}} \geq t'$$

an der Stelle \mathbf{r} registriert. R/c_{med} ist genau die Zeit, die ein Signal benötigt, um die Strecke R mit der Geschwindigkeit c_{med} zurückzulegen.

3.4.3 Variante

Eine Variante für die Definition der retardierten Greens Funktion, die in der Praxis oft Anwendung findet, soll noch erwähnt werden. Anstatt den Integrationsweg zu deformieren (und die Deformation nach Auswertung rückgängig zu machen), kann man die Pole in die untere Halbebene verschieben (und die Verschiebung nach Auswertung des Integrals rückgängig machen). Dies erreicht man mit der Ersetzung

$$\omega = \pm c_{\text{med}}k - i\varepsilon, \varepsilon > 0 .$$

Das Integral kann dann mit einem Integrationsweg, der entlang der reellen Achse verläuft und für $\tau < 0$ durch einen unendlich großen Halbkreis in

der oberen Halbebene geschlossen wird (für $\tau > 0$ durch einen Halbkreis in der unteren Halbebene), berechnet werden (Abb. 3.11). Es ist dann der Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0^+$ zu betrachten

$$G^{(+)}(\mathbf{R}, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi^3} \iiint d^3k \, e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\left(k^2 - \frac{(\omega + i\varepsilon)^2}{c_{\text{med}}^2}\right)}.$$

Da nur der Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0^+$ gefragt ist, genügt der Nenner

$$\left(k^2 - \frac{(\omega + i\varepsilon)^2}{c_{\text{med}}^2}\right) \rightarrow k^2 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c_{\text{med}}^2} - i\varepsilon.$$

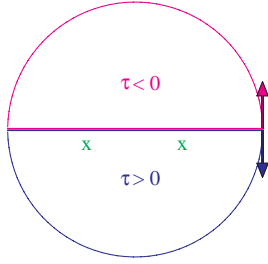


Abb. 3.11. Konturintegration: Verschiebung der Polstellen

Die Auswertung des ω -Integrals in der Gleichung für $G^{(+)}(\mathbf{R}, \tau)$ mit der Cauchyformel, des Integrales über die Wellenzahl mit den gleichen Schritten wie zuvor und letztlich die Durchführung des Grenzüberganges ergibt das gleiche Resultat wie die Deformation der Kontur.

4 Spezielle Funktionen der mathematischen Physik

Spezielle Funktionen, die eine komplexere Struktur als die elementaren Funktionen aufweisen, können in verschiedener Weise definiert werden. Die Gammafunktion, eine Erweiterung des Konzeptes der Fakultät, wird durch ein Integral oder alternativ durch eine Funktionalgleichung eingeführt. Da bei der Diskussion der anderen speziellen Funktionen, die in diesem Kapitel angesprochen werden, Eigenschaften der Γ -Funktion benutzt werden, beginnt dieses Kapitel mit einer kompakten Zusammenstellung von Aussagen über diese Funktion (Math.Kap 4.1). Alle weiteren speziellen Funktionen in diesem Kapitel, wie die Besselfunktionen, Legendreschen Polynome etc., werden essentiell durch homogene, lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung definiert, die bei der Separation der Laplacegleichung in krummlinigen Koordinaten auftreten. Der Typus von Differentialgleichung, der in diesem Zusammenhang diskutiert werden muss, hat die Form

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + p(x) \frac{dy(x)}{dx} + q(x)y(x) = 0, \quad (4.1)$$

wobei die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ vorgegeben sind. Die erste Aufgabe ist die Bereitstellung von Werkzeugen, um die Struktur derartiger Differentialgleichungen zu sortieren und Lösungsstrategien zu entwickeln. Diese Aufgabe wird in Math.Kap. 4.2 betrachtet. Im Weiteren werden dann in Math.Kap. 4.3 bis Math.Kap. 4.6 die wichtigsten speziellen Funktionen, die man in der Elektrodynamik antrifft, in einigem Detail vorgestellt.

4.1 Die Gammafunktion

Die Γ -Funktion, die in Band 1 Math.Kap. 4.3.1 eingeführt wurde, kann entweder durch das Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt \, t^{x-1} e^{-t}$$

oder durch die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

definiert werden. Der Zusammenhang ergibt sich durch partielle Integration

$$\Gamma(x) = \frac{t^x e^{-t}}{x} \Big|_0^\infty + \frac{1}{x} \int_0^\infty dt t^x e^{-t} = \frac{1}{x} \Gamma(x+1) .$$

Eine analytische Fortsetzung ins Komplexe ist möglich, wobei

$$\Gamma(z^*) = \Gamma(z)^*$$

gilt. Alle weiteren Aussagen zu der Γ -Funktion können aus der Definition abgeleitet werden. Da

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty dt e^{-t} = 1$$

ist, folgt für positive ganze Zahlen $x \equiv n$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n! .$$

Die Γ -Funktion ist eine Verallgemeinerung des Konzeptes der Fakultät. Die Γ -Funktion mit dem Argument $x = n + \delta$, wobei $0 < \delta < 1$ ist kann auf $\Gamma(\delta)$ zurückgeführt werden. So ist z.B.

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) .$$

Für $\Gamma(1/2)$ berechnet man

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty dt t^{-1/2} e^{-t} = 2 \int_0^\infty dz e^{-z^2} = \sqrt{\pi} .$$

Oft wird auch die Notation

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = (2n-1)!! \quad \text{und} \quad 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n n! = (2n)!!$$

benutzt.

Die Γ -Funktion für negative Argumentwerte erhält man durch rückwärtige Anwendung der Funktionalgleichung bis das Argument positiv wird, für $n-1 < |x| < n$ also

$$\Gamma(-|x|) = -\frac{\Gamma(-|x|+1)}{|x|} = \frac{\Gamma(-|x|+2)}{|x| \cdot |x-1|} = (-1)^n \frac{\Gamma(-|x|+n)}{|x| \cdot |x-1| \cdots |x-n+1|} .$$

Aus dieser Relation ergeben sich die Aussagen

- Ist $|x|$ eine ganze Zahl $|x| = n$, so tritt der Zähler $\Gamma(0)$ auf. Da jedoch $1 = \Gamma(1) = 0 \cdot \Gamma(0)$ ist, muss $\Gamma(0) \rightarrow \infty$ sein. Die Γ -Funktion ist für negative ganze Zahlen nicht definiert.
- Infolge des Vorzeichens $(-1)^n$ wechselt die Funktion $\Gamma(x)$ für negative Argumentwerte ($x \neq -n$) von Intervall zu Intervall das Vorzeichen. So ist sie in dem Intervall $-1 < x < 0$ negativ, in dem Intervall $-2 < x < -1$ positiv, etc. (siehe Abb. 4.1).
- Ein explizites Beispiel für die Anwendung der rückwärtigen Rekursion ist $\Gamma(-3/2)$. Man findet

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} .$$

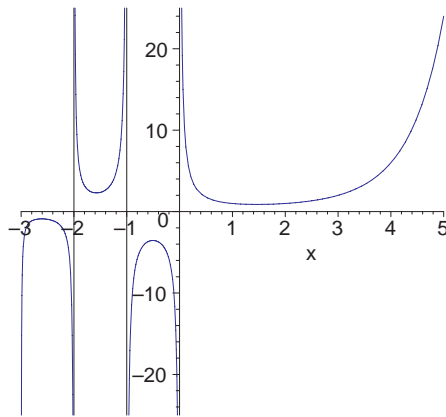


Abb. 4.1. Die Funktion $\Gamma(x)$

Ohne Beweis sollen noch die folgenden Eigenschaften notiert werden

- Die sogenannte Reflexionsformel

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} ,$$

- die Darstellung des Binomialkoeffizienten durch die Γ -Funktion

$$\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)} = \frac{x!}{y!(x-y)!} ,$$

- die logarithmische Ableitung der Γ -Funktion, die Digammafunktion

$$\psi(x) = \frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d\Gamma(x)}{dx}$$

mit der Rekursionsformel

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x} .$$

- Einige nichttriviale Integrale, die auf Ausdrücke mit der Γ -Funktion führen, findet man z.B. in dem ersten Kapitel des Buches

W. Magnus und F. Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik (Springer Verlag, Heidelberg (1948)).

4.2 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Zur Charakterisierung der Struktur der Lösungen der Differentialgleichungen (4.1) betrachtet man die Singularitäten der Koeffizientenfunktionen p und q . Ein Punkt x_0 wird als ein regulärer Punkt der Differentialgleichung bezeichnet, falls sowohl $p(x)$ als auch $q(x)$ an dieser Stelle analytische Funktionen (siehe Math.Kap. 2.3) sind. Ist dies nicht der Fall, so liegt ein singulärer Punkt der Differentialgleichung vor, und zwar definiert man:

- Der Punkt x_0 ist ein **regulärer singulärer Punkt**, falls die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) p(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 q(x)$$

endlich sind, also wenn die Funktionen an der Stelle x_0 einen Pol erster bzw. zweiter Ordnung haben. Eine Bezeichnung, die auch benutzt wird, ist außerwesentlich singulärer Punkt.

- Der Punkt wird als **irregulärer singulärer Punkt** bezeichnet, falls einer dieser Grenzwerte unendlich ist.
- In einigen Fällen ist es notwendig, das Verhalten der Differentialgleichung an den Stellen $\pm\infty$ zu untersuchen. Zu diesem Zweck benutzt man die Transformation $x = 1/\xi$ und untersucht die Stelle $\xi = 0$ der transformierten Differentialgleichung.

Der Sprachgebrauch deutet an, dass es nützlich (doch nicht unbedingt erforderlich) ist, die Betrachtungen ins Komplexe fortzusetzen.

4.2.1 Beispiele für singuläre Punkte

Als Beispiele kann man die Differentialgleichungen für die konfluente hypergeometrische Funktion und für die Legendrefunktionen betrachten.

- Die Differentialgleichung

$$x \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + (c - x) \frac{dw(x)}{dx} - aw(x) = 0,$$

mit konstantem a und c , definiert die konfluente hypergeometrische Funktion, (siehe auch Math.Kap. 4.6) in der Standardnomenklatur

$$w(x) = F(a, c; x).$$

An der Form

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \left(1 - \frac{c}{x}\right) \frac{dw(x)}{dx} - \frac{a}{x} w(x) = 0$$

erkennt man, dass die Stelle $x = 0$ ein regulärer singulärer Punkt ist, denn es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} x p(x) = c \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) = 0.$$

Zur Untersuchung der Stellen $x = \pm\infty$ benötigt man ($\xi = 1/x$)

$$\begin{aligned} \frac{dw(x)}{dx} &= \frac{dw}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\xi^2 \frac{dw}{d\xi} \\ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} &= \left[\frac{d}{d\xi} \left(-\xi^2 \frac{dw}{d\xi} \right) \right] (-\xi^2) = 2\xi^3 \frac{dw}{d\xi} + \xi^4 \frac{d^2 w}{d\xi^2}. \end{aligned}$$

Die transformierte Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{(2-c)}{\xi} \right) \frac{dw}{d\xi} - \frac{a}{\xi^3} = 0$$

zeigt, dass $x = \pm\infty$ jeweils ein irregulärer singulärer Punkt ist.

- Die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P(\theta) + \lambda_\theta P(\theta) = 0 ,$$

die bei der Separation der Laplacegleichung in Kugelkoordinaten auftritt, kann mit der Substitution $x = \cos \theta$ in die Form

$$(1-x^2) \frac{d^2 P(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP(x)}{dx} + \left(\lambda_\theta - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right) P(x) = 0 ,$$

bzw.

$$\frac{d^2 P(x)}{dx^2} - \frac{2x}{(1-x^2)} \frac{dP(x)}{dx} + \left(\frac{\lambda_\theta}{(1-x^2)} - \frac{m^2}{(1-x^2)^2} \right) P(x) = 0$$

gebracht werden. Es ist

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} (x \mp 1) p(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \pm 1} (x \mp 1)^2 q(x) = -\frac{m^2}{4} .$$

Die Punkte ± 1 sind reguläre singuläre Punkte der Legendreschen Differentialgleichung.

4.2.2 Lösung durch Reihenentwicklung

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die nur reguläre singuläre Punkte besitzen, zählen zu der **Fuchsschen Klasse** von Differentialgleichungen. Eine klassische Methode zur Bestimmung der Lösung solcher Differentialgleichungen ist die Reihenentwicklung. Man muss dabei unterscheiden, ob die Entwicklung um einen regulären oder einen singulären Punkt gesucht wird.

Für die Entwicklung um einen regulären Punkt ist der Standardpotenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

ausreichend. Man geht mit dem Ansatz in die Differentialgleichung ein und vergleicht Koeffizienten mit der gleichen Potenz von $(x - x_0)$. Zur Erläuterung der Methode folgen zwei Beispiele.

- Die Differentialgleichung $y'' + y = 0$ wird bekanntlich von der Sinus- und der Kosinusfunktion erfüllt. Die Entwicklung um den regulären Punkt $x = 0$ ergibt die Aussage

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 .$$

Um die Koeffizienten zu vergleichen, schreibt man für die erste Reihe mit Umbenennung des Summationsindex

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$$

und liest die **Rekursionsrelation**

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$$

ab, die Koeffizienten mit geradem bzw. ungeradem Index verknüpft. Die Koeffizienten a_0 und a_1 werden durch die Vorgabe von $y(0)$ und $y'(0)$ (Anfangswertaufgabe) oder $y(a)$ und $y(b)$ (Randwertaufgabe), nicht aber durch die Rekursion auf der Basis der homogenen Differentialgleichung bestimmt. Auflösung der Rekursion ergibt

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2!}, & a_4 &= \frac{a_0}{4!}, & \dots, & a_{2n} &= (-1)^n \frac{a_0}{(2n)!}, & \dots \\ a_3 &= -\frac{a_1}{3!}, & a_5 &= \frac{a_1}{5!}, & \dots, & a_{2n+1} &= (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)!}, & \dots \end{aligned}$$

und somit nach Resummation die allgemeine Lösung

$$y(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x.$$

- Die Differentialgleichung $y'' + (b - x^2)y = 0$, ($b = \text{const.}$) ist eine Umformung der Schrödingergleichung des eindimensionalen, quantenmechanischen harmonischen Oszillators. Der Potenzreihenansatz liefert in diesem Fall (nach Umbenennung der Summationsindizes, wo erforderlich)

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + ba_n - a_{n-2}] x^n = 0.$$

In diesem Beispiel tritt eine dreigliedrige Rekursionsformel auf. Die Koeffizienten a_{-2} und a_{-1} sind gleich Null zu setzen, da sie in dem Ansatz nicht vorkommen, die Koeffizienten a_0 und a_1 sind wie in dem vorherigen Beispiel nicht bestimmt. Die weitere Auflösung der Rekursion liefert

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{b}{1 \cdot 2} a_0, & a_4 &= \left[\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{b^2}{4!} \right] a_0, \dots \\ a_3 &= -\frac{b}{2 \cdot 3} a_1, & a_5 &= \left[\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{b^2}{5!} \right] a_1, \dots \end{aligned}$$

Alle weiteren Koeffizienten sind ebenfalls proportional zu a_0 oder a_1 , doch wird die Auflösung der Rekursion etwas mühselig. Einen besseren Zugang zur Lösung des quantenmechanischen harmonischen Oszillatorproblems wird auf Band 3 vertagt.

In den zwei Beispielen erhält man mit dem Potenzreihenansatz zwei linear unabhängige Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$. Dies ist jedoch nicht immer der Fall. Eine Methode zur Bestimmung einer zweiten linear unabhängigen Lösung basiert auf der Auswertung der Wronskideterminante (Band 1 Math.Kap. 2.2.2)

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

Für die lineare Differentialgleichung (4.1), die hier zur Diskussion steht, ist

$$y_i''(x) = -p(x)y_i'(x) - q(x)y_i(x) \quad (i = 1, 2),$$

so dass für die Wronskideterminante die Relation

$$\frac{dW(x)}{dx} = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = -p(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -p(x)W(x)$$

folgt. Integration dieser Relation in dem Intervall $[a, x]$ ergibt

$$W(x) = W(a) \exp \left(- \int_a^x p(x') dx' \right).$$

Sortiert man nun

$$W = y_1^2 \left(\frac{y_2'}{y_1} - \frac{y_1'}{y_1^2} y_2 \right) = y_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right),$$

löst nach der Ableitung auf, setzt die zweite Form der Wronskideterminante ein

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = W(a) \frac{\exp \left(- \int_a^x p(x') dx' \right)}{y_1^2(x)}$$

und integriert von einem Punkt $b > a$ bis x , so findet man, infolge der Tatsache, dass $W(x) \neq 0$ ist, für die zweite linear unabhängige Lösung die Berechnungsvorschrift

$$y_2(x) = \frac{y_2(b)}{y_1(b)} y_1(x) + W(a) y_1(x) \int_b^x dx' \frac{\exp \left(- \int_a^{x'} p(x'') dx'' \right)}{y_1^2(x')}.$$

Da mit y_1 und y_2 auch eine Linearkombination dieser Funktionen linear unabhängig ist, kann man den ersten Term unterdrücken, ebenso den Beitrag $\text{const. } y_1(x)$ durch die untere Integrationsgrenze b . Letztlich interessiert, für die Lösung einer homogenen Differentialgleichung, der konstante Vorfaktor $W(a)$ nicht, so dass man die vereinfachte Relation

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x dx' \frac{\exp \left(- \int_a^{x'} p(x'') dx'' \right)}{y_1^2(x')} \quad (4.2)$$

benutzen kann.

Ist der Punkt x_0 ein regulärer singulärer Punkt, so kann man wenigstens eine der zwei Lösungen des Fundamentalsystems mit einem Potenzreihenansatz erfassen, man benötigt jedoch eine modifizierte Form

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\rho} \quad (a_0 \neq 0).$$

Da $y(x)$ im Allgemeinen an der Stelle x_0 nicht analytisch ist, kann der zusätzliche Faktor $(x - x_0)^\rho$ dazu dienen, ein singuläres Verhalten an dieser Stelle

aufzufangen. Um die Auswirkungen dieses Ansatzes zu überschauen, schreibt man die Differentialgleichung (4.1) in der Form

$$(x - x_0)^2 y''(x) + (x - x_0) \bar{p}(x) y'(x) + \bar{q}(x) y(x) = 0 ,$$

wobei die Funktionen $\bar{p} = (x - x_0) p$ und $\bar{q} = (x - x_0)^2 q$ nun in eine Taylorreihe um x_0 entwickelt werden können

$$\bar{p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n \quad \bar{q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n .$$

Geht man mit der Entwicklung von $y(x)$ und den Entwicklungen für die Funktionen \bar{p} und \bar{q} in die Differentialgleichung (4.1) ein, so findet man die Bedingung

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \rho)(n + \rho - 1) (x - x_0)^{n+\rho} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} p_m (x - x_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \rho) (x - x_0)^{n+\rho} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} q_m (x - x_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\rho} = 0 . \end{aligned}$$

Die niedrigste, auftretende Potenz von $(x - x_0)$ ist $(x - x_0)^\rho$. Setzt man den Koeffizienten dieser Potenz gleich Null, so erhält man die **Index-** oder **Fundamentalgleichung**

$$a_0 \rho(\rho - 1) + a_0 p_0 \rho + a_0 q_0 = 0 ,$$

bzw.

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0 ,$$

eine quadratische Gleichung, aus der man ρ bestimmen kann. Setzt man den Koeffizienten von $(x - x_0)^{n+\rho}$ gleich Null, so folgt die Rekursionsrelation

$$\begin{aligned} & a_n [(n + \rho)(n + \rho - 1) + p_0(n + \rho) + q_0] \\ & + \sum_{m=1}^n [p_m(n - m + \rho) + q_m] a_{n-m} = 0 \end{aligned}$$

zur Bestimmung der weiteren Koeffizienten (Kenntnis von p_m und q_m vorausgesetzt).

Je nach der Natur der Lösungen der Indexgleichung muss man drei Fälle unterscheiden:

1. Die beiden Wurzeln sind verschieden und deren Differenz ist keine ganze Zahl. Aus der Rekursion ergeben sich für die zwei Wurzeln ρ_1 und ρ_2 der Indexgleichung zwei linear unabhängige Lösungen

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho_1)(x-x_0)^{n+\rho_1} \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho_2)(x-x_0)^{n+\rho_2},$$

wobei der Koeffizient a_0 jeweils unabhängig von ρ_1 bzw. ρ_2 ist und aus zusätzlichen Bedingungen bestimmt werden muss.

- Die beiden Wurzeln sind gleich ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$). In diesem Fall hat man eine Lösung

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho)(x-x_0)^{n+\rho}.$$

Eine zweite linear unabhängige Lösung kann man über die Relation (4.2), die unabhängig davon ist, ob man um einen regulären oder regulären singulären Punkt entwickelt hat, gewinnen. Varianten, die man anhand der Grundrelation (4.2) gewinnen kann, sind in der Literatur dokumentiert.

- Die Differenz $\rho_2 - \rho_1$, wobei ρ_2 die größere der beiden Wurzeln ist, ist eine positive ganze Zahl. Linear unabhängige Lösungen sind dann

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho_1)(x-x_0)^{n+\rho_1}$$

und eine Lösung auf der Basis von (4.2) bzw. Varianten dieser Relation.

Die drei Fälle können anhand der Besselschen Differentialgleichung (siehe Math.Kap. 3.1.4 mit $\lambda_\rho = 1$ und $m \rightarrow \nu$ zur Anpassung an die Standardnomenklatur)

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$$

illustriert werden. Der Punkt $x_0 = 0$ ist ein regulärer singulärer Punkt. Nur drei Entwicklungskoeffizienten der Funktionen $\bar{p}(x)$ und $\bar{q}(x)$ um diese Stelle sind ungleich Null

$$p_0 = 1 \quad q_0 = -\nu^2 \quad q_2 = 1.$$

Die Fundamentalgleichung und die Rekursionsformel lauten somit in diesem Beispiel

$$\rho^2 - \nu^2 = 0$$

$$a_n [(\rho + n)^2 - \nu^2] + a_{n-2} = 0$$

- Ist ν nicht ganzzahlig oder Null, so liefert die Rekursionsformel die Aussagen

$$a_1 [(\rho + 1)^2 - \nu^2] = 0$$

$$a_n [(\rho + n)^2 - \nu^2] = -a_{n-2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Die erste Gleichung erfordert $a_1 = 0$, die zweite besagt dann, dass alle Koeffizienten mit ungeradem Index ebenfalls gleich Null sind. Die Auflösung der Rekursion für gerade Indexwerte ist

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{1}{2(2\rho+2)}a_0, & a_4 &= \frac{1}{2 \cdot 4(2\rho+2)(2\rho+4)}a_0, \\
&\vdots \\
a_{2n} &= (-1)^n \frac{1}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2\rho+2)(2\rho+4) \cdots (2\rho+2n)}a_0, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ein Ergebnis, das in der Form

$$a_{2n} = \frac{a_0}{(\rho+1) \cdots (\rho+n)n!} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

zusammengefasst werden kann. Die linear unabhängigen Grundlösungen für $\rho = \pm\nu$ ($\nu > 0$) sind somit

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= x^\nu a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1) \cdots (\nu+n)n!} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n \\
y_2(x) &= x^{-\nu} a'_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-\nu+1) \cdots (-\nu+n)n!} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n.
\end{aligned}$$

2. Betrachtet man den Fall $\nu = 0$, so ist offensichtlich zunächst nur eine Lösung gegeben. Die Rekursion $n^2 a_n + a_{n-2} = 0$ ergibt

$$a_{2n} = \frac{a_0}{(n!)^2} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

und somit

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n.$$

Um eine zweite gemäß der angegebenen Vorschrift (4.2) zu gewinnen, muss man das Integral

$$I = \int^x \frac{\exp\left(\int_b^{x'} \frac{dx''}{x''}\right)}{y_1^2(x')} dx' = b \int^x \frac{dx'}{x' y_1^2(x')}$$

berechnen. Setzt man die erste Lösung (mit $a_0 = 1$)

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots$$

ein und entwickelt den Nenner in eine Potenzreihe, so verbleibt

$$I = b \int^x dx' \left(\frac{1}{x'} + \frac{x'}{2} + \frac{5x'^3}{32} + \frac{23x'^5}{576} + \dots \right).$$

Nach Auswertung der Integrale (und gegebenenfalls Untersuchung der Konvergenz) findet man als zweite linear unabhängige Lösung

$$y_2(x) = b y_1(x) \left(\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \dots \right).$$

3. Das dritte Beispiel ist die Besselsche Differentialgleichung mit $\nu^2 = 1$ bzw. $\rho = \pm 1$. Für $\rho = 1$ lautet die Rekursion $n(n+2)a_n + a_{n-2} = 0$. Man erhält

$$a_{2n} = \frac{a_0}{n!(n+1)!} \left(-\frac{1}{4} \right)^n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

und

$$y_1(x) = x a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(-\frac{x^2}{4} \right)^n.$$

Die Rekursionsformel für $\rho = -1$

$$n(n-2)a_n + a_{n-2}$$

ist nicht auflösbar. Die zweite Fundamentallösung kann man jedoch wie im Fall $\rho = 0$ gewinnen. Die Zutat ist (mit $a_0 = 1$)

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^5}{2^6 \cdot 3} - \dots \\ I &= \int^x dx' \left(\frac{1}{x'^3} + \frac{1}{4x'} + \frac{7x'}{4 \cdot 3} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{2x^2} + \frac{\ln x}{4} + \frac{7x^2}{2^3 \cdot 3} + \dots \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Besselfunktionen werden in Math.Kap 4.4 näher diskutiert.

4.3 Die Legendreschen Funktionen

Bei der Separation der Laplacegleichung (und weiterer Differentialgleichungen der theoretischen Physik) in Kugelkoordinaten stößt man auf die Legendresche Differentialgleichung (setze zur Vereinfachung der Schreibweise $\lambda_\theta = \lambda$)

$$(1-x^2) \frac{d^2 P(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP(x)}{dx} + \left(\lambda - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right) P(x) = 0.$$

Die Variable $x = \cos \theta$ ist in dem Bereich $-1 \leq \theta \leq 1$ definiert, wobei die Randpunkte ± 1 reguläre singuläre Punkte sind. Die Lösungen dieser Differentialgleichung werden in zwei Stufen diskutiert. Die Grundlage der Diskussion sind die Lösungen für den Fall $m = 0$, die Legendreschen Polynome. Ausgehend von diesen Funktionen gewinnt man in einem zweiten Anlauf die von λ und m abhängigen zugeordneten Legendreschen Funktionen (die jedoch meist auch als Polynome bezeichnet werden).

4.3.1 Die Legendreschen Polynome

Für eine Entwicklung um den regulären Punkt $x_0 = 0$ genügt der einfache Potenzreihenansatz

$$P_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Geht man damit in die Differentialgleichung

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_\lambda(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_\lambda(x)}{dx} + \lambda P_\lambda(x) = 0$$

ein und sortiert, so findet man die Aussage

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [n(n-1)x^{n-2} - (n(n+1) - \lambda)x^n] = 0 ,$$

aus der man durch Koeffizientenvergleich die Rekursionsformel

$$a_{n+2} = \frac{(n(n+1) - \lambda)}{(n+1)(n+2)} a_n$$

erhält. Setzt man hier $n = 0, 2, 4, \dots$ und $n = 1, 3, 5, \dots$ ein, so erhält man die Koeffizienten von zwei Potenzreihen

$$P_{\lambda,1}(x) = a_0 \left[1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-6)}{4!}x^4 - \frac{\lambda(\lambda-6)(\lambda-20)}{6!}x^6 + \dots \right]$$

$$P_{\lambda,2}(x) = a_1 \left[x - \frac{(\lambda-2)}{3!}x^3 + \frac{(\lambda-2)(\lambda-12)}{5!}x^5 - \dots \right] .$$

Da die erste Funktion gerade ist, die zweite jedoch ungerade, sind die zwei Funktionen linear unabhängig. Durch den Potenzreihenansatz kann man ein Fundamentalsystem von Lösungen bestimmen.

Ein Konvergenztest mit dem Quotientenkriterium (Band 1 Math.Kap. 1.3.3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}x^{n+2} + 2}{a_n x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n(n+1) - \lambda)}{(n+1)(n+2)} x^2 = x^2$$

zeigt, dass die Reihen für $|x| < 1$ konvergieren, und zwar unabhängig von dem Wert des Parameters λ . Für $|x| = 1$ muss man anhand verfeinerter Kriterien jedoch feststellen, dass die Reihen divergieren. Da die Punkte mit $|x| = 1$ zu dem Definitionsbereich zählen und da aus physikalischen Gründen nur endliche (und stetige) Winkelfunktionen zulässig sind (ansonsten wäre z.B. die Berechnung der in einem Volumen eingeschlossenen Ladung nicht möglich), gibt es nur einen Ausweg, um Funktionen zu definieren, die für die physikalischen Anwendungen nützlich sind. Die Separationskonstante λ muss die Form

$$\lambda = l(l+1) \quad \text{mit} \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

haben, denn dann bricht die Rekursion

- für die Funktion $P_{\lambda,1}(x)$ mit $n = l$ ab, falls l gerade ist. Diese Polynomlösung ist natürlich für $|x| = 1$ endlich. Die Rekursion für die Funktion $P_{\lambda,2}(x)$ bricht nicht ab, man erhält z.B. mit der Rekursionsformel mit $l = 0$

$$a_{n+2} = \frac{n}{(n+2)} a_n$$

für die Funktion $P_{0,2}$

$$P_{\lambda=0,2} = a_1 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right),$$

eine Reihe, die man zu

$$P_{0,2} = a_1 \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

zusammenfassen kann. Man erkennt explizit das divergente Verhalten an den Stellen $x = \pm 1$.

- für die Funktion $P_{\lambda,2}(x)$ mit $n = l$ ab, falls l ungerade ist. In diesem Fall ist die Funktion $P_{\lambda,1}(x)$ weiterhin divergent. Für $l = 1$ findet man z.B. anhand der Rekursion

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-2}{(n+1)(n+2)} a_n$$

die Reihe

$$P_{\lambda=2,1} = a_0 \left(1 - x \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right] \right) = a_1 \left(1 - x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right).$$

In Zusammenfassung kann man somit feststellen: Zu jedem $l = 0, 1, 2, \dots$ gibt es

- eine Polynomlösung. Die Standardnomenklatur für diese Polynome ist $P_l(x)$. Sie haben die Form

$$\begin{aligned} P_l(x) &= a_0(1 + c_2x^2 + \dots + c_lx^l) & l = \text{gerade} \\ P_l(x) &= a_1(x + d_3x^3 + \dots + d_lx^l) & l = \text{ungerade} . \end{aligned}$$

Dies sind die **Legendreschen Polynome**.

- Zu jeder Polynomlösung gibt es einen linear unabhängigen Partner, der in der Standardnomenklatur mit $Q_l(x)$ bezeichnet wird. Diese Funktionen haben, wie für die einfachsten Fälle angedeutet, die Form

$$Q_l(x) = (\text{Polynom}_1(x)) + (\text{Polynom}_2(x)) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Sie sind alle an den Stellen $x = \pm 1$ logarithmisch divergent. Sie werden benötigt, wenn eine allgemeine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung gefragt ist, für die Diskussion des Potentialproblems der Elektrodynamik spielen sie keine direkte Rolle.

Da die Legendrepolynome zu dem Rüstzeug der theoretischen Physik zählen, ist eine detailliertere Untersuchung ihrer Eigenschaften unerlässlich.

An dieser Stelle muss auf die Standardformelsammlungen für die speziellen Funktionen hingewiesen werden. Sie enthalten auch nicht alle möglichen Formeln für alle benötigten Funktionen, doch kann man gegebenenfalls speziellere Literaturstellen entnehmen. Diese Formelwerke sind

- M. Abramowitz, I. Stegun: 'Handbook of Mathematical Functions' (Dover Publications, New York, 1974)
- F. Lössch ed.: 'Jahnke, Emde, Lössch, Tafeln Höherer Funktionen' (Teubner, Stuttgart, 1966)
- (*) W. Magnus, F. Oberhettinger: 'Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik' (Springer Verlag, Heidelberg, 1948)
- (*) I.N. Sneddon: 'Spezielle Funktionen der Mathematischen Physik' (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1961)

(Werke, die (soweit den Internet-Seiten der Verlage entnehmbar) nicht mehr im Handel erhältlich sind, sind durch (*) markiert.)

4.3.2 Die Eigenschaften der Legendrepolynome

Die Standardform der Legendreschen Polynome ist so festgelegt, dass

$$P_l(1) = 1$$

ist. Die ersten fünf Polynome sind dann

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x) .$$

Den entsprechenden Funktionsverlauf zeigen Abb. 4.2 a,b. Offensichtlich gilt die Symmetrierelation

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x) .$$

Funktionen mit höheren l -Werten könnten bei Bedarf durch Auswertung der Rekursion für die Legendrepolynome gewonnen werden, doch oft ist die Anwendung von direkten Rekursionsformeln für die Funktionen selbst (Math.Kap. 4.3.2.2) vorzuziehen.

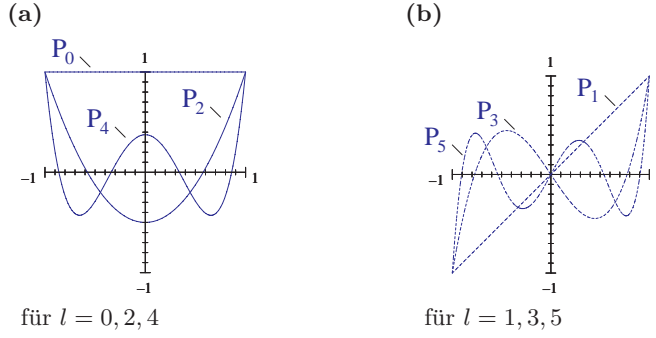


Abb. 4.2. Legendre Polynome als Funktion von $x = \cos \theta$

4.3.2.1 Erzeugende Funktion. Ein Hilfsmittel in der Potentialtheorie ist die Entwicklung der Abstandsfunktion

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-1/2}$$

nach Potenzen von (r/r') bzw. (r'/r) . Charakterisiert man die zwei Punkte durch Kugelkoordinaten, so lautet die Abstandsfunktion

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = [r^2 - 2rr' \cos \alpha + r'^2]^{-1/2},$$

wobei α der von den Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}' eingeschlossene Winkel ist. In Kugelkoordinaten ist

$$x \equiv \cos \alpha = \cos(\varphi - \varphi') \sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta'.$$

Entwickelt man nun, z.B. für $h = (r'/r) < 1$ die Funktion

$$f(r, r', x) = [r^2 - 2rr'x + r'^2]^{-1/2} = \frac{1}{r} [1 - 2hx + h^2]^{-1/2}$$

in eine binomische Reihe

$$f(r, r', x) = \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(h^2 - 2hx) + \frac{3}{8}(h^2 - 2hx)^2 - \frac{5}{16}(h^2 - 2hx)^3 + \dots \right\}$$

und sortiert nach Potenzen von h

$$f(r, r', x) = \frac{1}{r} \left\{ 1 + hx + h^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2 \right) + h^3 \left(-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x^3 \right) + \dots \right\},$$

so erkennt man, dass die Koeffizienten der Potenzen von h den Legendre Polynomen entsprechen. Der Beweis, dass dies für jede Ordnung h^l gilt, kann geführt werden.

Das somit angedeutete Resultat kann in der Form

$$\frac{1}{[1 - 2hx + h^2]^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(x)$$

notiert werden. Es ist offensichtlich, warum die Funktion auf der linken Seite dieser Gleichung als **erzeugende Funktion** für die Legendreschen Polynome bezeichnet wird.

Ist $r' > r$ so verläuft die Diskussion analog. Die übliche kompakte Notation für die Entwicklung der Abstandsfunktion ist

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = \frac{1}{r_{>}} [1 - 2h \cos \alpha + h^2]^{-1/2} ,$$

wobei $r_{>}$ und $r_{<}$ dem größeren bzw. dem kleineren der beiden Abstände und $h = (r_{<}/r_{>})$ entsprechen. Explizit hat man

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(x) & r > r' \\ &= \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l P_l(x) & r' > r . \end{aligned}$$

Die erzeugende Funktion ist nicht nur das Rückgrat der Entwicklung der Abstandsfunktion, sie stellt auch ein nützliches Instrument für die Diskussion verschiedener Eigenschaften der Legendrepolynome dar, so z.B. für die Gewinnung von

4.3.2.2 Rekursionsformeln. Aus der Vielzahl von möglichen Rekursionsformeln wird hier nur eine Auswahl vorgestellt. Differenziert man die erzeugende Funktion nach der Größe h

$$\frac{(x-h)}{[1-2hx+h^2]^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} l h^{l-1} P_l(x) ,$$

arrangiert das Resultat gemäß

$$\frac{(x-h)}{[1-2hx+h^2]^{1/2}} = (1-2hx+h^2) \sum_{l=0}^{\infty} l h^{l-1} P_l(x)$$

und benutzt auf der linken Seite wiederum die erzeugende Funktion, so findet man, sortiert nach den gleichen Potenzen von h ,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \{xP_l - P_{l-1} - (l+1)P_{l+1} + 2lxP_l - (l-1)P_{l-1}\} h^l = 0 .$$

Da der Koeffizient von h^l somit gleich Null ist, gewinnt man die Formel

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x) . \quad (4.3)$$

Diese Formel erlaubt die Berechnung von $P_{l+1}(x)$, falls $P_l(x)$ und $P_{l-1}(x)$ bekannt sind. Diese Rekursionsformel findet weite Anwendung, z.B. auch für die numerische Tabellierung von Legendrepolynomen.

Eine weitere Klasse von Rekursionsformeln erlaubt die Darstellung der Ableitung der Legendrepolynome durch die Polynome selbst. Die Grundformel gewinnt man durch Differentiation der erzeugenden Funktion nach der Variablen x

$$\frac{h}{[1 - 2hx + h^2]^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} h^l \frac{dP_l(x)}{dx}.$$

Man multipliziert dieses Resultat mit $(x-h)$, benutzt die nach h differenzierte erzeugende Funktion aus der vorherigen Betrachtung

$$\sum_{l=0}^{\infty} lh^l P_l(x) = (x-h) \sum_{l=0}^{\infty} h^l \frac{dP_l(x)}{dx}$$

und sortiert wieder nach Potenzen von h

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left\{ lP_l(x) - x \frac{dP_l(x)}{dx} + \frac{dP_{l-1}(x)}{dx} \right\} h^l.$$

Das Endergebnis

$$x \frac{dP_l(x)}{dx} = \frac{dP_{l-1}(x)}{dx} + lP_l(x) \quad (4.4)$$

erlaubt die Berechnung von Ableitungen der Legendrepolynome und erweist sich bei der Auswertung von Integralen mit Legendrepolynomen als nützlich.

Aus den zwei Grundformeln kann man weitere Rekursionsformeln gewinnen, so z.B.

$$\frac{dP_{l+1}(x)}{dx} = \frac{dP_{l-1}(x)}{dx} + (2l+1)P_l(x).$$

Zum Beweis differenziert man (4.3) nach x (benutze abgekürzte Schreibweise)

$$(l+1)P'_{l+1} = (2l+1)P_l + (2l+1)xP'_l - lP'_{l-1},$$

ersetzt xP'_l mit (4.4)

$$(l+1)P'_{l+1} = (2l+1)P_l + (2l+1)P'_{l-1} + (2l+1)lP_l - lP'_{l-1}$$

und sortiert

$$(l+1)P'_{l+1} = (l+1)P'_{l-1} + (l+1)(2l+1)P_l.$$

Weitere Rekursionsformeln erhält man durch Kombination der schon gewonnen Formeln.

4.3.2.3 Die Formel von Rodriguez. Eine kompakte und aus diesem Grund nützliche Darstellung der Legendreschen Polynome ist

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l] .$$

Diese Formel, bekannt unter der Bezeichnung **Formel von Rodriguez**, kann direkt aus der Differentialgleichung der Legendrepolynome gewonnen werden. Man benutzt zur Abkürzung

$$u_l = (x^2 - 1)^l \quad \text{und} \quad v_l = \frac{d^l u_l}{dx^l}$$

und betrachtet die Relation

$$(1 - x^2) \frac{du_l}{dx} + 2lxu_l = 0 .$$

Differenziert man diese Gleichung $(l + 1)$ mal unter Benutzung der Produktregel

$$\frac{d^n}{dx^n} [f(x)g(x)] = \sum_m \binom{n}{m} f^{(n-m)} g^{(m)} ,$$

so findet man unter Benutzung der Definition von v_l

$$(1 - x^2)v_l'' - 2xv_l' + l(l + 1)v_l = 0 .$$

Die Größe v_l erfüllt die Legendresche Differentialgleichung. Da v_l ein Polynom der Ordnung l in x und $P_l(x)$ die einzige Polynomlösung dieser Ordnung ist, sind $v_l(x)$ und $P_l(x)$ proportional zueinander. Den Faktor kann man durch explizite Auswertung von $v_l(1)$ bestimmen. Man berechnet

$$\begin{aligned} v_l(x) &= \frac{d^l}{dx^l} [(x - 1)^l (x + 1)^l] \\ &= \sum_{n=0}^l \binom{l}{n} \left[\frac{d^{(l-n)}}{dx^{(l-n)}} (x + 1)^l \right] \left[\frac{d^n}{dx^n} (x - 1)^n \right] \end{aligned}$$

und findet, dass für $x = 1$ nur der Term mit $n = l$ beiträgt. Es ist also

$$v_l(1) = (x + 1)^l|_{x=1} l! = 2^l l! .$$

4.3.2.4 Integrale mit Legendrepolynomen. In vielen Situationen sind Integrale mit Legendrepolynomen zu berechnen. Ein guter Ausgangspunkt ist eine Umschreibung des Integrals

$$I_l = \int_{-1}^1 dx f(x) P_l(x)$$

mit Hilfe der Formel von Rodriguez, wobei vorausgesetzt wird, dass die Funktion $f(x)$ über dem Grundintervall definiert und l mal stetig differenzierbar ist. Partielle Integration von

$$I_l = \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 dx f(x) \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l]$$

ergibt

$$I_l = \frac{1}{2^l l!} \left\{ f(x) \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l] \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 dx \frac{df(x)}{dx} \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} [(x^2 - 1)^l] \right\} .$$

Die Ableitungen von $(x^2 - 1)^l$

$$\begin{aligned} [(x^2 - 1)^l]' &= 2lx(x^2 - 1)^{l-1} \equiv b_{1,1}(x)(x^2 - 1)^{l-1} \\ [(x^2 - 1)^l]'' &= b_{2,1}(x)(x^2 - 1)^{l-1} + b_{2,2}(x)(x^2 - 1)^{l-2} \\ &\dots = \dots \\ &\dots = \dots \\ [(x^2 - 1)^l]^{(l-1)} &= b_{l-1,1}(x)(x^2 - 1)^{l-1} + \dots b_{l-1,l-1}(x)(x^2 - 1) \end{aligned}$$

enthalten wenigstens einen Faktor $(x^2 - 1)$, so dass

$$\frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^l]_{x=\pm 1} = 0 \quad \text{für } n < l$$

ist. Damit erhält man für eine l mal wiederholte partielle Integration

$$I_l = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \int_{-1}^1 dx \frac{d^l f(x)}{dx^l} (x^2 - 1)^l .$$

- Ist z.B. $f(x) = P_m(x)$, so ist für $m < l$ die Ableitung

$$\frac{d^l P_m(x)}{dx^l} = 0 .$$

Ist $m > l$, so findet man das gleiche Resultat, da die Rolle der Indizes vertauscht werden kann. Für den Fall $m = l$

$$I_{l,l}^{(1)} = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \int_{-1}^1 dx \frac{d^l P_l(x)}{dx^l} (x^2 - 1)^l ,$$

setzt man zur Berechnung der Ableitung noch einmal die Rodriguezformel ein. Es ist

$$\frac{d^l P_l(x)}{dx^l} = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} [(x^2 - 1)^l] = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} [x^{2l} - 2lx^{2l-1} \dots] = \frac{(2l)!}{2^l l!} .$$

Für das verbleibende Integral

$$I_{0,l}^{(1)} = \int_{-1}^1 dx (x^2 - 1)^l$$

kann man durch partielle Integration eine Rekursionsformel gewinnen. Man findet über

$$I_{0,l}^{(1)} = x(x^2 - 1)^l \Big|_{-1}^1 - 2l \int_{-1}^1 dx x^2 (x^2 - 1)^{l-1} = -2l I_{0,l}^{(1)} - 2l I_{0,l-1}^{(1)}$$

die Rekursionsformel

$$I_{0,l}^{(1)} = -\frac{2l}{2l+1} I_{0,l-1}^{(1)} ,$$

deren Auflösung mit $I_{0,0}^{(1)} = 2$ die Aussage

$$I_{0,l}^{(1)} = (-1)^l \frac{2^{2l+1} (l!)^2}{(2l+1)!}$$

ergibt. Setzt man alle Teilergebnisse zusammen, so findet man

$$I_{l,m}^{(1)} = \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_m(x) = \delta_{l,m} \frac{2}{(2l+1)} .$$

Diese Relation wird als **Orthogonalitätsrelation** der Legendreschen Polynome bezeichnet. Deren Bedeutung wird in Math.Kap. 5 weiter ausgeführt.

- Für $f(x) = x^m$ verläuft die Auswertung analog. Gemäß der Grundformel ist zunächst die l -te Ableitung von $f(x)$ zu bestimmen, die man mit

$$\frac{d^l x^m}{dx^l} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-l)!} x^{m-l} & m \geq l \\ 0 & m < l \end{cases}$$

notieren kann. Für $m \geq l$ ist dann das Integral

$$I_{m-l,l}^{(2)} = \int_{-1}^1 dx x^{m-l} (x^2 - 1)^l$$

zu berechnen. Partielle Integration ergibt für

$$I_{\alpha,\beta}^{(2)} = \int_{-1}^1 dx x^\alpha (x^2 - 1)^\beta$$

die Rekursionsformel

$$I_{\alpha,\beta}^{(2)} = -\frac{2\beta}{\alpha+1} I_{\alpha+2,\beta-1}^{(2)} ,$$

die man beginnend mit

$$I_{m+l,0}^{(2)} = \int_{-1}^1 dx x^{m+l} = \begin{cases} 0 & m-l = \text{ungerade} \\ \frac{2}{(m+l+1)} & m-l = \text{gerade} \end{cases}$$

auswertet. Es folgt dann für gerades $m-l$

$$I_{m-l,l}^{(2)} = (-1)^l \frac{2^{l+1} l! (m-l)!!}{(m+l+1)!!} ,$$

so dass das Endresultat in der Form

$$\int_{-1}^1 dx x^m P_l(x) = \begin{cases} 0 & l > m \\ 2 \frac{m!}{(m-l)!} \frac{(m-l)!!}{(m+l+1)!!} & m \geq l, m-l \text{ gerade} \\ 0 & m \geq l, m-l \text{ ungerade} \end{cases}$$

angegeben werden kann. Insbesondere für $l = m$ gewinnt man die oft benutzte Formel

$$\int_{-1}^1 dx x^m P_m(x) = 2^{m+1} \frac{((m)!)^2}{(2m+1)!}.$$

Die Kombination dieser Grundintegrale mit Hilfe der Rekursionsformeln erlaubt die Berechnung einer Vielzahl von weiteren Integralen, so z.B.

$$I_{m,l}^{(3)} = \int_{-1}^1 dx x P_m(x) P_l(x).$$

Benutzt man hier die Rekursionformel (4.3)

$$x P_m = \frac{(m+1)}{(2m+1)} P_{m+1} + \frac{(m)}{(2m+1)} P_{m-1}$$

sowie (4.4), so findet man

$$I_{m,l}^{(3)} = \int_{-1}^1 dx x P_m(x) P_l(x) = \begin{cases} \frac{2(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} & l = m+1 \\ 0 & l \neq m \pm 1 \\ \frac{2m}{(2m+1)(2m-1)} & l = m-1 \end{cases}$$

Auch die erzeugende Funktion kann mit Vorteil eingesetzt werden, so z.B. zur Berechnung des Integrals

$$I_l^{(4)} = \int_0^1 dx P_l(x)$$

über das halbe Grundintervall. Man beginnt mit

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$$

und integriert

$$\int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \int_0^1 dx P_l(x).$$

Das Integral auf der linken Seite kann elementar ausgewertet werden

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= -\frac{1}{2t} \int_0^1 dx \frac{(-2t)}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \int_{1+t^2}^{(1-t)^2} \frac{dz}{\sqrt{z}} \\ &= \frac{1}{t} \left(\sqrt{1+t^2} - (1-t) \right). \end{aligned}$$

Entwickelt man nun die Wurzel, so erhält man auf der linken Seite

$$\frac{1}{t} \left(\sqrt{1+t^2} - (1-t) \right) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} t^3 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} t^{2n-1} + \dots,$$

so dass man durch Vergleich der Faktoren der Potenzen von t die gesuchten Integrale ablesen kann. Man findet

$$I_0^{(4)} = 1 \quad I_1^{(4)} = \frac{1}{2}$$

$$I_l^{(4)} = 0 \quad \text{für } l > 0, \text{ gerade}$$

$$I_l^{(4)} = (-1)^{(l-1)/2} \frac{(l-2)!!}{2^{(l+1)/2} ((l+1)/2)!} \quad \text{für } l > 1, \text{ ungerade}.$$

4.3.2.5 Die Funktionen $Q_l(x)$. Man kann zeigen, dass die Funktionen $Q_l(x)$ die gleichen Rekursionformeln wie die Legendrepolynome $P_l(x)$ erfüllen. Falls benötigt, kann man die linear unabhängigen Partner der Legendrepolynome über

$$(l+1)Q_{l+1}(x) = (2l+1)xQ_l(x) - lQ_{l-1}(x)$$

ausgehend von den ‘normierten’ Funktionen

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 1$$

gewinnen. Eine alternative, wenn auch umständlichere Methode ist, wie in Math.Kap. 4.2.2 erläutert, die explizite Berechnung durch Integrale mit $[P_l(x)]^{-2}$.

4.3.3 Die zugeordneten Legendreschen Funktionen

Ist die Separationskonstante m des Winkelanteils in der Variablen φ nicht gleich Null, so erhält man die Differentialgleichung

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_l^m(x)}{dx^2} - 2x \frac{d P_l^m(x)}{dx} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right) P_l^m(x) = 0,$$

die die **zugeordneten Legendreschen Funktionen** definiert. Anstelle der eigentlichen Separationskonstanten λ_θ kann man von vorne herein $l(l+1)$ benutzen, da die Lösungen dieser Differentialgleichung für $m=0$ in die Legendreschen Polynome übergehen und nur diese an den Stellen $x = \pm 1$ endlich sind.

Um die zugeordneten Legendreschen Funktionen zu bestimmen, macht man den Ansatz

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^\alpha y_{lm}(x)$$

und wählt α so, dass die Singularität in dem zusätzlichen Term der Differentialgleichung aufgefangen wird. Man findet auf diese Weise $\alpha = m/2$. Setzt man den so gewonnenen Ansatz

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} y_{lm}(x)$$

in die Differentialgleichung für diese Funktion ein, so findet man als Bestimmungsgleichung für die Restfunktionen y_{lm}

$$(1 - x^2) y_{lm}'' - 2mx y_{lm}' + [l(l+1) - m(m+1)] y_{lm} = 0.$$

Man stellt eine gewisse Ähnlichkeit mit der einfachen Legendreschen Differentialgleichung

$$(1 - x^2) P_l'' - 2x P_l' + l(l+1) P_l = 0$$

fest. In der Tat führt m -malige Differentiation der Legendreschen Differentialgleichung auf die Gleichung

$$(1 - x^2) \left(\frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \right)'' - 2mx \left(\frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \right)' + [l(l+1) - m(m+1)] \left(\frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \right) = 0,$$

der man die Aussage

$$y_{lm}(x) \propto \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$

entnimmt. Die Lösung der vollständigen Legendreschen Differentialgleichung lautet somit

$$P_l^m(x) \equiv P_l^{(m)}(x) \equiv P_{lm}(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}.$$

Die drei linken Einträge deuten Varianten in der Notation an, die in der Literatur anzutreffen sind. Das zusätzliche Vorzeichen, das infolge der Homogenität der Differentialgleichung möglich ist, entspricht der am meisten benutzten Konvention, doch ist es bei der Übernahme von Formeln aus der Literatur angebracht, die jeweilige Definition zu überprüfen. Die Funktionen sind an den Stellen $x = \pm 1$ endlich, wenn l eine positive ganze Zahl ist $l = 0, 1, 2, \dots$. Für jeden Wert von $l \geq 0$ sind ganzzahlige m -Werte mit $l \geq m \geq 0$ zulässig. Die Ganzzahligkeit entspricht der Lösung der Differentialgleichung in der Variablen φ , die Beschränkung auf positive m -Werte folgt aus der Methode mit der diese Funktionen gewonnen wurden, die obere Grenze $m_{\max} = l$ tritt auf, da die Legendrepolynome P_l Polynome vom Grad l sind, deren $(l+1)$ -te Ableitung verschwindet.

Zu jeder regulären Lösung mit l, m existiert ein linear unabhängiger Partner

$$Q_l^m(x) \equiv Q_l^{(m)}(x) \equiv Q_{lm}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m Q_l(x)}{dx^m},$$

der an den Grenzen des Grundintervalls logarithmisch divergiert.

Auch für die zugeordneten Legendreschen Funktionen, die aus einer Wurzel und einem Polynomanteil bestehen und in der Literatur auch als *zugeordnete Legendresche Polynome* bezeichnet werden, existiert ein umfangreicher Katalog von Eigenschaften. Die einfachsten Funktionen kann man direkt anhand der Definition

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$

berechnen. Neben $P_l^0(x) \equiv P_l(x)$ notiert man

$$\begin{aligned} P_1^1(x) &= -(1-x^2)^{1/2} = -\sin \theta \\ P_2^1(x) &= -3x(1-x^2)^{1/2} = -\frac{3}{2} \sin 2\theta \\ P_2^2(x) &= 3(1-x^2) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta) \\ P_3^1(x) &= -\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2} = -\frac{3}{8}(\sin \theta + 5 \cos 3\theta) \\ P_3^2(x) &= 15x(1-x^2) = \frac{15}{4}(\cos \theta - \cos 3\theta) \\ P_3^3(x) &= -15(1-x^2)^{3/2} = -\frac{15}{4}(3 \sin \theta - \sin 3\theta). \end{aligned}$$

4.3.3.1 Rekursionsformeln. Rekursionsformeln können anhand der Rekursionsformeln der Legendrepolynome durch Differentiation und Einfügung des Wurzelfaktors gewonnen werden. Dabei entstehen Rekursionsformeln in dem Index l bei festem m , in dem Index m bei festem l sowie Formeln, in denen beide Indizes variieren. Differenziert man z.B. die Relation (4.3)

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)x P_l(x) - lP_{l-1}(x)$$

m mal und multipliziert mit $(-1)^m (1-x^2)^{m/2}$, so erhält man

$$(l+1)P_{l+1}^m(x) = (2l+1)[x P_l^m(x) - m\sqrt{1-x^2} P_l^{m-1}(x)] - lP_{l-1}^m(x).$$

Führt man eine entsprechende Prozedur mit (4.4)

$$x \frac{dP_l(x)}{dx} - lP_l(x) = \frac{dP_{l-1}(x)}{dx}$$

(differenziere $(m-1)$ mal) durch, so ist das Resultat

$$xP_l^m(x) = P_{l-1}^m(x) - (l-m+1)\sqrt{1-x^2}P_l^{m-1}(x).$$

Aus den beiden so gewonnenen Gleichungen kann man den Term in der Quadratwurzel eliminieren. Man findet dann eine Rekursionsrelation, in der der Index m festgehalten wird

$$(l - m + 1)P_{l+1}^m(x) - (2l + 1)x P_l^m(x) + (l + m)P_{l-1}^m(x) = 0 .$$

4.3.3.2 Die Formel von Rodriguez. Setzt man in die Definition

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$

die Formel von Rodriguez für die Legendrepolynome ein, so gewinnt man eine Erweiterung

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} ((x^2 - 1)^l) .$$

Man erkennt noch einmal explizit, dass der Index m auf den Bereich mit $m \leq l$ beschränkt ist. Anhand der erweiterten Rodriguezformel wird jedoch auch ein Satz von Funktionen mit negativen m -Werten in dem Bereich $-l \leq m \leq -1$ definiert. Diese Funktionen sind jedoch nicht linear unabhängig von den Funktionen mit positivem m , sondern es gilt die Symmetrierelation

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l - m)!}{(l + m)!} P_l^m(x) \quad m > 0 .$$

Da in der Differentialgleichung m^2 auftritt (und nicht m), ist diese Proportionalität verständlich. Der Nachweis kann explizit geführt werden: Führe die Differentiation in der erweiterten Definition mit der Zerlegung $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ aus, rearrangiere die dabei entstehende Summe über die Potenzen von $(x - 1)$ und $(x + 1)$ und fasse zusammen. Anstelle der etwas länglichen Beweisführung wird die Symmetrierelation hier nur durch ein konkretes Beispiel illustriert. Mit der Rodriguezformel berechnet man

$$P_2^2(x) = \frac{1}{8} (1 - x^2) \frac{d^4}{dx^4} [(x^2 - 1)^2] = 3(1 - x^2)$$

$$P_2^{-2}(x) = \frac{1}{8} (1 - x^2)^{-1} \frac{d^0}{dx^0} [(x^2 - 1)^2] = \frac{1}{8} (1 - x^2)$$

und findet in der Tat

$$P_2^{-2}(x) = \frac{0!}{4!} P_2^2(x) = \frac{3}{3 \cdot 8} (1 - x^2) .$$

4.3.3.3 Integrale mit den P_l^m . Analog zu der Situation bei den einfachen Legendrepolynomen kann man mit Hilfe der Rodriguezformel einen Katalog von Integralen mit den zugeordneten Funktionen berechnen. So ist z.B. für $m \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) &= (-1)^m \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \int_{-1}^1 dx P_l^{-m}(x) P_{l'}^m(x) \\ &= (-1)^m \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \frac{1}{2^l l!} \frac{1}{2^{l'} l'!} \int_{-1}^1 dx \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2 - 1)^l \frac{d^{l'+m}}{dx^{l'+m}} (x^2 - 1)^{l'} . \end{aligned}$$

Integriert man m mal partiell (wobei der erste Term jeweils an den Grenzen ± 1 verschwindet), so findet man

$$= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{1}{2^l l!} \frac{1}{2^{l'} l'!} \int_{-1}^1 dx \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \frac{d^{l'}}{dx^{l'}} (x^2-1)^{l'} .$$

Das verbleibende Integral wurde schon bei der Diskussion der Integrale mit Legendrepolyomen ausgewertet. Benutzt man die Orthogonalitätsrelation der Legendrepolynome, so lautet das Endergebnis

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) \\ &= \delta_{l,l'} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{(2l+1)} . \end{aligned}$$

Das Resultat ist auch für $m < 0$ gültig (benutze die Symmetrierelation zwischen P_l^m und $P_l^{|m|}$ und entsprechend für $P_{l'}^m$), für $m = 0$ entspricht es der Orthogonalitätsrelation der Legendrepolynome.

Zu beachten ist die Tatsache, dass in dieser Gleichung die gleichen m -Werte auftreten. Sind die m -Werte verschieden, so erhält man ein wesentlich komplizierteres Resultat. Das vielleicht erwartete Resultat gilt, wie man der Genese des Integrals entnehmen könnte, *nicht*. Vielmehr findet man

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^{m'}(x) \neq \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} I(l, m) .$$

Für die zugeordneten Legendrefunktionen gilt nur eine eingeschränkte Orthogonalitätsrelation.

4.3.4 Die Kugelflächenfunktionen

Da die Winkelanteile, die bei der Separation des Laplaceoperators in Kugelkoordinaten auftreten, meist gemeinsam weiterverarbeitet werden, ist es von Nutzen die (komplexwertigen) Funktionen

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) \equiv Y_{l,m}(\Omega) = \left[\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

mit

$$l = 0, 1, 2, \dots \quad \text{und} \quad -l \leq m \leq l$$

zu definieren. Der Definitionsbereich ist die Oberfläche einer Kugel

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi .$$

Dies erklärt die Bezeichnung **Kugelflächenfunktionen**. Anstelle der komplexen Form mit $\pm|m|$ kann man auch die reellen Funktionen

$$P_l^m(\cos \theta) \sin m\varphi \quad \text{und} \quad P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \quad m \geq 0$$

benutzen, doch ist die komplexe Form gebräuchlicher. Alle Aussagen über Kugelflächenfunktionen ergeben sich im Wesentlichen aus den Eigenschaften ihrer Bestandteile.

4.3.4.1 Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen. Die folgenden Relationen sollen hervorgehoben werden.

- Ist $m = 0$, so ist die Funktion unabhängig von φ und bis auf einen Faktor identisch mit den Legendrepolyomen

$$Y_{l,0}(\theta, \varphi) = \left[\frac{(2l+1)}{4\pi} \right]^{1/2} P_l(\cos \theta) .$$

Betrachte man Punkte auf der Einheitskugel in der x - y Ebene ($\theta = 0$), so findet man den speziellen Wert

$$Y_{l,m}(0, \varphi) = \left[\frac{(2l+1)}{4\pi} \right]^{1/2} \delta_{m,0} ,$$

der sich aus dem Vorfaktor $(1-x^2)^{m/2}$ der P_l^m ergibt. Nur für $m = 0$ ist dieser Faktor für $x = 1$ ungleich Null.

- Es gilt die Symmetrierelation

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) .$$

Die Kugelflächenfunktionen mit positiven und negativen m -Werten sind miteinander verknüpft. Da die komplexe Konjugation jedoch *keine* lineare Operation ist, bedeutet dies nicht, dass die Funktionen $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ und $Y_{l,-m}(\theta, \varphi)$ linear abhängig sind.

- Das Grundintegral mit Kugelflächenfunktionen ist

$$\begin{aligned} \iint d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) Y_{l',m'}(\theta, \varphi) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) Y_{l',m'}(\theta, \varphi) \\ &= \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} . \end{aligned}$$

Die Funktionen sind auf der Kugelfläche orthogonal. Die Integration über φ liefert die Aussage, dass m gleich m' sein muss, die nachfolgende Integration über θ ergibt dann mit dem Grundintegral für die zugeordneten Legendrefunktionen die Aussage: l muss gleich l' sein. Die Faktoren in der Definition der Kugelflächenfunktionen sind so eingerichtet, dass das Integral den Wert 1 hat.

- Die Kugelflächenfunktionen erfüllen die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{l,m}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{l,m}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \\ + l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \varphi) = 0 , \end{aligned}$$

die dem Winkelanteil des Laplaceoperators entspricht. Die Kugelflächenfunktionen mit

$$l = 0, 1, 2 \dots$$

und den $(2l + 1)$ m -Werten

$$m = -l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l - 1, l$$

sind die einzigen regulären Lösungen dieser Differentialgleichung. Sie sind auf der Kugelfläche stetig, eindeutig und endlich.

- Eine Liste der einfachsten Funktionen ist

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi} \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi} \quad Y_{2,-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad Y_{2,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_{2,2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}.$$

- Sind zwei Punkte auf einer Kugelfläche durch die Winkel (θ, φ) und (θ', φ') gegeben, so gilt für den Kosinus des eingeschlossenen Winkels α (Abb. 4.3)

$$\cos \alpha = \cos(\varphi - \varphi') \sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta'.$$

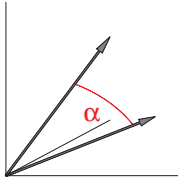


Abb. 4.3. Der Winkel α zwischen zwei Raumrichtungen

Das Legendrepolynom $P_l(\cos \alpha)$ erfüllt dann das **Additionstheorem**

$$P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{(2l+1)} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\theta, \varphi) Y_{l,m}^*(\theta', \varphi').$$

Der Beweis dieses Theorems beinhaltet die Schritte: Man wertet das Greensche Theorem (3.1)

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{G}} dV' \quad (u_1(\mathbf{r}) \Delta' u_2(\mathbf{r}') - u_2(\mathbf{r}') \Delta' u_1(\mathbf{r}')) \\ &= \oint_{\partial(\mathcal{G})} (u_1(\mathbf{r}') \nabla' u_2(\mathbf{r}') - u_2(\mathbf{r}') \nabla' u_1(\mathbf{r}')) \cdot d\mathbf{f}' \end{aligned}$$

mit den Funktionen

$$u_1(\mathbf{r}') = (r')^l Y_{l,m}(\Omega') \quad \text{und} \quad u_2(\mathbf{r}') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r'^k}{(r')^{k+1}} P_k(\cos \alpha)$$

aus, wobei $r \leq r'$ ist. Das Gebiet \mathcal{G} ist eine Kugel mit dem Radius $r' = R'$ und dem Flächenelement $d\mathbf{f}' = R'^2 d\Omega' \mathbf{e}_{r'}$. Da u_1 eine Lösung der Laplacegleichung und u_2 das Potential einer Punktladung ist, gilt

$$\Delta' u_1(\mathbf{r}') = 0 \quad \text{und} \quad \Delta' u_2(\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') .$$

Außerdem berechnet man die benötigte Komponente des Gradienten auf der Kugeloberfläche zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r'} u_1(\mathbf{r}')|_{R'} &= l(R')^{l-1} Y_{l,m}(\Omega') \\ \frac{\partial}{\partial r'} u_2(\mathbf{r}')|_{R'} &= - \sum_k \frac{(k+1)r'^k}{(R')^{k+2}} P_k(\cos \alpha) . \end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke in das Greensche Theorem ein und sortiert, so erhält man

$$4\pi r'^l Y_{l,m}(\Omega) = \sum_k (k+l+1) r'^k \iint d\omega' Y_{l,m}(\Omega') P_k(\cos \alpha) (R')^{l-k} .$$

Mit dem Argument, dass die Koeffizienten der Potenzreihe $\sum_k a_k r'^k = 0$ alle verschwinden müssen, folgt die Aussage

$$\iint d\omega' Y_{l,m}(\Omega') P_k(\cos \alpha) = \delta_{k,l} \frac{4\pi}{(2l+1)} Y_{l,m}(\Omega) .$$

Entwickelt man nun das Legendrepolynom $P_l(\cos \alpha)$ nach Kugelflächenfunktionen

$$P_l(\cos \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n A_{n,k}(\Omega) Y_{n,k}^*(\Omega') ,$$

wobei die Koeffizienten Funktionen der Winkel θ und φ sein müssen, so erhält man mit der Orthogonalitätsrelation der Kugelflächenfunktionen

$$A_{n,k}(\Omega) = \iint d\Omega' Y_{n,k}(\Omega') P_l(\cos \alpha) ,$$

bzw. mit dem bereitgestellten Integral

$$= \delta_{n,l} \frac{4\pi}{(2l+1)} Y_{l,k}(\Omega) .$$

Nach einfacher Umbenennung folgt dann aus der Zerlegung von $P_l(\cos \alpha)$ das Additionstheorem.

Das Legendrepolynom ist eine reelle Funktion des Kosinus des eingeschlossenen Winkels. Die rechte Seite des Additionstheorems ist somit auch reell.

Dies bedeutet einerseits, dass es keine Rolle spielt, welche der zwei Kugel­flächenfunktionen komplex konjugiert ist

$$P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{(2l+1)} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) Y_{l,m}(\theta', \varphi') .$$

Man kann, andererseits, die rechte Seite in einer etwas umständlicheren, doch manchmal benötigten, reellen Form schreiben

$$\begin{aligned} P_l(\cos \alpha) &= P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') \\ &+ 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') \cos[m(\varphi - \varphi')] . \end{aligned}$$

4.4 Die Besselfunktionen

Separiert man die Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten, so stößt man auf die **Besselsche Differentialgleichung**

$$x^2 J''(x) + x J'(x) + (x^2 - \nu^2) J(x) = 0 ,$$

die für verschiedene Formen der Separationskonstanten verschiedene **Bessel-funktionen** definiert. In Math.Kap. 4.2.2 wurde gezeigt, dass der erweiterte Potenzreihenansatz die linear unabhängigen Lösungen

$$J_\nu = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \quad (4.5)$$

$$J_{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! \Gamma(-\nu + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$$

ergibt, falls ν *nicht* ganzzahlig ist. Ist jedoch $\nu = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ so findet man

$$J_{-n} = \sum_{m=n}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(-n + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} .$$

Da die Gammafunktion mit dem Argument Null oder einer negativen ganzen Zahl unendlich wird

$$\lim_{x \rightarrow -|n|} \Gamma(x) \longrightarrow \infty \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots ,$$

beginnt die Summe mit $m = n$. Setzt man nun $m = m' + n$, so folgt weiterhin

$$J_{-n} = \sum_{m'=0}^{\infty} (-1)^{m'+n} \frac{1}{(m' + n)! \Gamma(m' + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m'+n}$$

$$(\text{benutze } \Gamma(n+1) = n!)$$

$$= (-1)^n \sum_{m'=0}^{\infty} (-1)^{m'} \frac{1}{\Gamma(m' + n + 1)m'!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m'+n},$$

also

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Die beiden Funktionen sind linear abhängig und man muss z.B. mit den in Math.Kap. 4.2.2 beschriebenen Methoden eine zweite von $J_n(x)$ linear unabhängige Lösung suchen.

Von Interesse in der theoretischen Physik sind insbesondere die Besselfunktionen mit ganzzahligem Index $\nu = n$ (**die Besselfunktionen erster Art** von der **Ordnung** n) und mit halbzahligem Index $\nu = n + 1/2$, die **sphärischen Besselfunktionen**. Bevor diese Funktionen in einigem Detail diskutiert werden, ist eine Zusammenstellung der Eigenschaften der Besselfunktionen, die nicht von der speziellen Form des Index abhängen, von Interesse.

4.4.1 Generelle Eigenschaften der Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

In dem ersten Teil dieses Abschnitts werden Rekursionsformeln für die Besselfunktionen vorgestellt. Auf die Diskussion der nicht ganz einfachen Orthogonalitätsrelationen wird verzichtet. In dem zweiten Teil dieses Abschnitts werden weitere Lösungen der Besselschen Differentialgleichung definiert und es wird gezeigt, dass sie im Fall $\nu = n$ die gesuchte zweite linear unabhängige Lösung darstellen können. Eine kurze Zusammenstellung der Eigenschaften der zweiten Lösung folgt.

4.4.1.1 Rekursionsrelationen mit J_ν . Wie bei allen speziellen Funktionen dienen Rekursionsformeln dazu, Funktionen mit höherem Index aus denen mit niedrigerem Index zu erzeugen bzw. Ableitungen der Funktionen aus den Funktionen selbst zu berechnen. Die Grundrelationen für die Besselfunktionen J_ν

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2 \frac{dJ_\nu(x)}{dx}$$

können folgendermaßen bewiesen werden: Man berechnet auf der Basis der Reihenentwicklung (4.5) zunächst die Ableitungen

$$\frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2(m+\nu)x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(m+\nu+1)} = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

und

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^{-\nu} J_{\nu}) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+1}}{2^{2m+\nu+1} m! \Gamma(m+\nu+2)} \\ &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) .\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lauten explizit

$$\begin{aligned}\nu x^{\nu-1} J_{\nu} + x^{\nu} \frac{dJ_{\nu}}{dx} &= x^{\nu} J_{\nu-1}(x) \\ -\nu x^{-\nu-1} J_{\nu} + x^{-\nu} \frac{dJ_{\nu}}{dx} &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) ,\end{aligned}$$

so dass man nach Kürzung der Vorfaktoren x^{ν} bzw. $x^{-\nu}$ und anschließender Addition und Subtraktion die Grundrelationen für J_{ν} erhält. Durch Kombination dieser Rekursionsformeln kann man weitere nützliche Relationen gewinnen, eine Aufgabe, die in Andeutung für die Besselfunktionen mit expliziten Indizes betrachtet werden soll.

4.4.1.2 Besselfunktionen zweiter Art: Neumann und Hankelfunktionen. In Math.Kap. 4.2.2 wurde eine Methode diskutiert, mit Hilfe deren man die Lösungen der Besselschen Differentialgleichung, die linear unabhängig von den Funktionen $J_n(x)$ sind, bestimmen kann. So erhält man z.B. für den Fall $\nu = 0$ die zu $J_0(x)$ linear unabhängige Funktion

$$\bar{J}_0(x) = J_0(x) \left(\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \dots \right) .$$

Es ist jedoch nützlich, alternative Wege zur Berechnung von Lösungen zu suchen, die linear unabhängige Partner von $J_n(x)$ sind. Aus den Lösungen J_{ν} und $J_{-\nu}$ kann man die Funktion

$$N_{\nu}(x) = \frac{\cos \nu \pi J_{\nu}(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi} ,$$

die **Neumannfunktion**, konstruieren. Falls ν keine ganze Zahl ist, ist diese Linearkombination von zwei linear unabhängigen Lösungen der Besselschen Differentialgleichung ebenfalls eine Lösung. Ist jedoch ν eine ganze Zahl, so verschwinden Zähler und Nenner, der Ausdruck für die Neumannfunktion ist unbestimmt. In diesem Fall definiert man die Neumannfunktion als den Grenzwert

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} N_{\nu}(x) .$$

Die einfachste Methode, um den Grenzwert zu bestimmen, ist die Anwendung der Regel von L'Hospital. Man findet

$$\begin{aligned}N_n(x) &= \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} \{ \cos \nu \pi J_{\nu}(x) - J_{-\nu}(x) \}}{\frac{\partial}{\partial \nu} \{ \sin \nu \pi \}} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_{\nu}(x)}{\partial \nu} - \frac{1}{\cos \nu \pi} \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} ,\end{aligned}$$

wobei ein Term proportional zu $\sin \nu \pi$, der für $\nu = n$ verschwindet, weggelassen wurde.

Um zu zeigen, dass die Neumannfunktion eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung ist, differenziert man die Besselsche Differentialgleichung partiell nach ν und erhält (benutze weiterhin das gewöhnliche Ableitungssymbol für die Ableitung nach x)

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_{\pm \nu}(x) \right] + x \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_{\pm \nu}(x) \right] + (x^2 - \nu^2) \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_{\pm \nu}(x) \right] - 2\nu J_{\pm \nu}(x) = 0 .$$

Bildet man die geforderte Linearkombination und führt den Grenzübergang $\nu \rightarrow n$ durch, so findet man in der Tat

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} N_n(x) + x \frac{d}{dx} N_n(x) + (x^2 - \nu^2) N_n(x) = 0 ,$$

da der zusätzliche Term in dem Grenzfall mit der Symmetrierelation

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \left(J_\nu(x) - \frac{1}{\cos \nu \pi} J_{-\nu}(x) \right) = J_n(x) - (-1)^n J_{-n} = 0$$

ergibt. Die Neumannfunktion ist für $\nu = n$ eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung.

Um die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $J_n(x)$ und $N_n(x)$ nachzuweisen, muss man die Wronskideterminante berechnen. Die einigermaßen aufwendige Rechnung (Ableitungen der Γ -Funktion sind gefragt) ergibt für kleine x -Werte

$$W[J_n(x), N_n(x)] = \frac{2}{\pi x} \quad (x \rightarrow 0)$$

und weist somit die lineare Unabhängigkeit der Neumannfunktionen nach.

Anstelle der Bessel- und der Neumannfunktionen benutzt man in vielen physikalischen Problemen die **Hankelfunktionen**, die durch

$$H_\nu^{(+)}(x) = J_\nu(x) + i J_{-\nu}(x)$$

$$H_\nu^{(-)}(x) = J_\nu(x) - i J_{-\nu}(x)$$

definiert sind. Diese Funktionen sind, als Linearkombination von zwei linear unabhängigen Lösungen der Besselschen Differentialgleichung, ebenfalls ein Satz von zwei linear unabhängigen Lösungen.

Alle benannten Funktionen erfüllen die gleichen Rekursionsformeln wie die Besselfunktionen $J_\nu(x)$. So zeigt man z.B., dass

$$N_{\nu-1}(x) + N_{\nu+1}(x) = \frac{\cos(\nu-1)\pi J_{\nu-1}(x) - J_{-\nu+1}(x)}{\sin(\nu-1)\pi} + \frac{\cos(\nu+1)\pi J_{\nu+1}(x) - J_{-\nu-1}(x)}{\sin(\nu+1)\pi}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sin \nu \pi} \{ \cos \nu \pi [J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)] \\
&\quad - [J_{\nu+1}(x) + J_{-\nu-1}(x)] \} \\
&= \frac{2\nu}{x \sin \nu \pi} [\cos \nu \pi J_{\nu}(x) - J_{-\nu}(x)] = \frac{2\nu}{x} N_{\nu}(x)
\end{aligned}$$

ist. Von Interesse ist auch, das Verhalten der Funktionen in den Grenzfällen $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow \infty$. Mit der Reihenentwicklung (4.5) findet man für die Besselfunktionen für $x \rightarrow 0$

$$J_{\nu}(x) \rightarrow \frac{x^{\nu}}{2^{\nu} \Gamma(\nu+1)} \quad J_{-\nu}(x) \rightarrow \frac{x^{-\nu}}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} .$$

Durch Berechnung der Ableitung nach ν und Bildung des Grenzwertes $\nu \rightarrow n$ in der Definition der Neumannfunktion kann man aus dieser Vorgabe und der logarithmischen Ableitung der Γ -Funktion (der Digammafunktion) das Verhalten der Neumannfunktionen mit ganzzahligem Index gewinnen. Es ist

$$\begin{aligned}
N_0(x) &\rightarrow \frac{2}{\pi} (\ln x + \gamma - \ln 2) \\
N_n(x) &\rightarrow -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n \quad n \geq 1 .
\end{aligned}$$

Die asymptotische Form der Besselfunktionen wird in Math.Kap. 4.4.2 und 4.4.3 für die speziellen Indizes angegeben.

4.4.2 Die Funktionen $J_n(x)$

Die Funktionen

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

sind die Koeffizienten in der Entwicklung der **erzeugenden Funktion**

$$g(x, t) = \exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \quad t \neq 0 .$$

Zum Nachweis dieser Aussage entwickelt man

$$g(x, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{n_1!} \left(\frac{xt}{2}\right)^{n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_2} \frac{1}{n_2!} \left(\frac{x}{2t}\right)^{n_2}$$

und sammelt die Potenzen von n mit der Ersetzung $n_1 = n + n_2$. Mit der erzeugenden Funktion kann man die Grundrelationen für J_{ν} noch einmal herleiten. Außerdem ist man in der Lage, eine große Anzahl von Eigenschaften der Besselfunktionen $J_n(x)$ bereit zu stellen. Einige Beispiele folgen.

- Ersetzt man in der erzeugenden Funktion x durch $x + y$, so folgt aus

$$\exp \left[\frac{(x+y)}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] \exp \left[\frac{y}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right]$$

durch Entwicklung nach t und Vergleich der Koeffizienten von t auf beiden Seiten der Gleichung das **Additionstheorem**

$$J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{n-m}(y) .$$

Dieses Ergebnis kann man durch Aufspaltung der Summe in die Teilsommen

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} = \sum_{m=-\infty}^{-1} + \sum_{m=0}^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} ,$$

den Umbenennungen der Summationsindizes

$$\text{erster Term : } m \rightarrow -m'$$

$$\text{letzter Term : } m \rightarrow n + m'$$

und der Nutzung der Symmetrierelation in eine Form gebracht werden, die nur Besselfunktionen mit positiver Ordnung enthält

$$\begin{aligned} J_n(x+y) &= \sum_{m=0}^n J_m(x) J_{n-m}(y) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (J_m(x) J_{n+m}(y) + J_m(y) J_{n+m}(x)) . \end{aligned}$$

- In der erzeugenden Funktion benutzt man

$$t = i \quad \text{bzw.} \quad \left(t - \frac{1}{t} \right) = 2i .$$

Aus der Aussage

$$e^{ix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(x)$$

erhält man (benutze wiederum die Symmetrierelation z.B. für den Realteil

$$\cos x = J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(x) .$$

Mit $x = 0$ ergibt die erzeugende Funktion

$$1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(0) t^m ,$$

woraus man die Werte

$$J_0(0) = 1 \quad \text{und} \quad J_n(0) = 0 \quad (n \geq 1)$$

ablesen kann. Alle Besselfunktionen $J_n(x)$ außer $J_0(x)$ haben am Ursprung den Wert Null.

- Mit der Ersetzung $t = e^{i\theta}$ entspricht die erzeugende Funktion

$$\exp(ix \sin \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) e^{im\theta} ,$$

bzw. bei Trennung von Real- und Imaginärteil

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta)$$

$$\sin(x \sin \theta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x) \sin((2n+1)\theta) .$$

Derartige Relationen dienten 1824 F.W. Bessel zur Beschreibung der Differenz zwischen mittlerer und exzentrischer Anomalie von Planeten.

Multipliziert man diese Relationen mit $\cos m\theta$ bzw. mit $\sin m\theta$ und integriert unter Benutzung der Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^\pi d\theta \cos m\theta \cos n\theta = \int_0^\pi d\theta \sin m\theta \sin n\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m} ,$$

so gewinnt man die Integraldarstellungen ($n = 0, 1, \dots$ in beiden Fällen, die Formel mit $J_0(x)$ gewinnt man explizit)

$$J_{2n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(x \sin \theta) \cos(2n\theta)$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \sin(x \sin \theta) \sin(2n+1)\theta .$$

Betrachtet man anstelle der ersten Gleichung ein entsprechendes Integral mit $\cos(2n+1)\theta$, in der zweiten mit $\sin(2n)\theta$, so findet man infolge der Periodizität der trigonometrischen Funktionen jeweils den Wert Null. Man kann somit für alle Werte von n das Resultat zu

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \{ \cos(x \sin \theta) \cos n\theta + \sin(x \sin \theta) \sin n\theta \}$$

zusammenfassen.

Im Gegensatz zu den kompakten Ausdrücken für die Winkelfunktionen in Math.Kap. 4.3 sind die Besselfunktionen essentiell nur über die Reihendarstellung oder daraus abgeleiteten Relationen gegeben. Eine derartige Relation ist z.B.

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m (x^{-n} J_n(x)) = (-1)^m x^{-n-m} J_{n+m}(x) ,$$

die man aus den Rekursionsformeln für die Ableitung der Besselfunktionen herleiten kann. Insbesondere findet man

$$J_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n J_0(x) ,$$

eine Relation, die es erlaubt $J_n(x)$ aus $J_0(x)$ zu gewinnen. Die Schaubilder von $J_n(x)$ in Abb. 4.4 sind aus diesem Grund numerisch erzeugt.

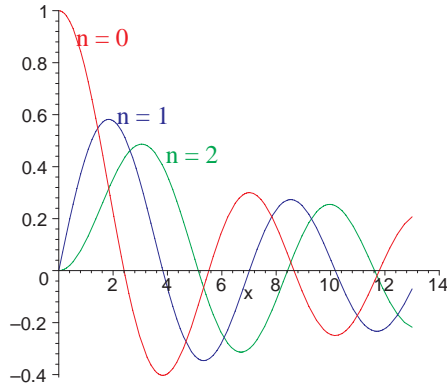


Abb. 4.4. Die Besselfunktionen J_0 , J_1 und J_2

Man kann erahnen, dass diese Funktionen eine unendliche Anzahl von Nullstellen besitzen. Die Bestimmung einzelner Nullstellen ist letztendlich auch nur numerisch möglich.

4.4.3 Die sphärischen Besselfunktionen

Die sphärischen Bessel- und Neumannfunktionen, auch Bessel-Riccati und Neumann-Riccati Funktionen genannt, sind durch

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x)$$

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x)$$

definiert, wobei l die Werte $0, 1, 2, \dots$ annimmt. Substituiert man in der Besselschen Differentialgleichung mit $\nu = l + 1/2$

$$y(x) = \sqrt{x} R(x) ,$$

so findet man als bestimmende Differentialgleichung für die sphärischen Besselfunktionen

$$x^2 R''(x) + 2x R'(x) + (x^2 - l(l+1)) R(x) = 0 .$$

Der zusätzliche Zahlenfaktor $\sqrt{\pi/2}$ entspricht der üblichen Konvention.

Die Reihe (4.5) kann für die Funktion $J_{1/2}(x)$ in der Form

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

geschrieben werden, so dass man leicht erkennt, dass

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad \text{und} \quad j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ist. Die Reihe für $J_{-1/2}(x)$ kann man entsprechend resumieren. Es ist

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x .$$

Damit findet man für die zugehörige Neumannfunktion

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x} .$$

Die weiteren Funktionen bestimmt man am geschicktesten über die Rekursionsrelation ($R_l \rightarrow j_l, n_l$)

$$R_{l+1}(x) = \frac{(2l+1)}{x} R_l(x) - R_{l-1}(x) , \quad (4.6)$$

die man durch direkte Umschreibung Grundrelationen für die Besselfunktionen gewinnt. Eine Rekursionsformel zur Berechnung der ersten Ableitungen kann man aus der zweiten Rekursion der Grundrelationen für J_ν herleiten. Man findet

$$(2l+1) \frac{dR_l(x)}{dx} = lR_{l-1}(x) - (l+1)R_{l+1}(x) .$$

Um die Rekursion (4.6) auszuwerten, benötigt man noch $j_{-1}(x)$. Diese Funktion gewinnt man, ebenso wie Funktionen mit höherem l , aus der umgeschriebenen Symmetrierelation, die für die sphärischen Funktionen

$$n_l(x) = (-1)^{l+1} j_{-l-1}(x)$$

ergibt. Daraus folgt

$$j_{-1}(x) = -n_0(x) \quad \text{und} \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} .$$

Weitere Auswertung der Rekursion (4.6) und der Symmetrie liefert die nächsten Funktionen

$$\begin{aligned} j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x \\ n_1(x) &= j_{-2}(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \\ n_2(x) &= -j_{-3}(x) = \left(-\frac{3}{x^3} + \frac{1}{x} \right) \cos x - \frac{3}{x^2} \sin x . \end{aligned}$$

Etwas allgemeiner ergibt sich die Aussage, dass die Funktionen $j_l(x)$ die Form

$$j_l(x) = f_l(x) \sin x + (-1)^{l+1} f_{-l-1}(x) \cos x$$

haben, wobei die $f_l(x)$ Polynome in $1/x$ sind, die durch die Rekursion (4.6)

$$f_{l+1}(x) = \frac{(2l+1)}{x} f_l(x) - f_{l-1}(x)$$

gegeben sind. Die sphärischen Bessel- und Neumannfunktionen sind in Abb. 4.5a und Abb. 4.5b für $l = 0, 1, 2$ dargestellt. Aus dem Verhalten der Besselfunk-

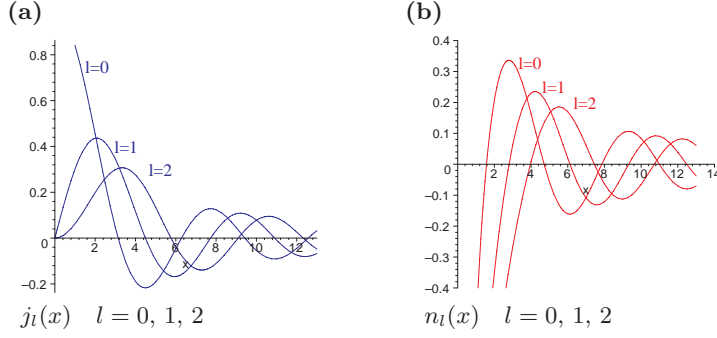


Abb. 4.5. Sphärische Besselfunktionen

tionen für $x \rightarrow 0$, das ist

$$J_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu,$$

und der Auflösung der Γ -Funktion

$$\Gamma(l+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^l} (2l-1)!!$$

findet man für das Verhalten der sphärischen Funktionen an der Stelle $x = 0$

$$j_l(x) \rightarrow \frac{x^l}{(2l+1)!!}$$

$$n_l(x) \rightarrow \frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}.$$

Die sphärische Besselfunktion ist an der Stelle $x = 0$ regulär, die sphärische Neumannfunktion divergiert.

Die asymptotische Form, die man über eine Konturintegration in der komplexen Ebene gewinnen kann, wird hier nur angegeben:

$$j_l(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin\left(x - l\frac{\pi}{2}\right)$$

$$n_l(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \cos\left(x - l\frac{\pi}{2}\right)$$

Vor allem bei der Diskussion von Streu- und Abstrahlungsproblemen sind die sphärischen Hankelfunktionen, die durch

$$h_l^{(+)} = j_l(x) + i n_l(x) \quad \text{und} \quad h_l^{(-)} = j_l(x) - i n_l(x)$$

definiert sind, gefragt. Der Grund ist das asymptotische Verhalten in der Form von ein- und auslaufenden Kugelwellen

$$\begin{aligned} h_l^{(+)}(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{(-i)^{l+1}}{x} e^{ix} \\ h_l^{(-)}(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{(i)^{l+1}}{x} e^{-ix} . \end{aligned}$$

Die folgenden zwei speziellen Funktionen zeichnen sich durch besondere Flexibilität aus. Viele elementare und nicht so elementare Funktionen können durch diese Funktionen dargestellt werden. Die benötigten Eigenschaften werden ohne Beweisführung zusammengestellt, eine eingehendere Darstellung wird in Band 3 dieser Reihe folgen. Sie können mit den gleichen Mitteln wie im Fall der ausführlicher diskutierten Legendre- und Besselfunktionen gewonnen werden.

4.5 Die hypergeometrische Funktion

Die Lösungen der Differentialgleichung

$$x(1-x) \frac{d^2 F}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{dF}{dx} - abF = 0$$

werden als **hypergeometrische Funktionen** bezeichnet. Die Lösung, die bei $x = 0$ regulär ist, wird durch die (Gaußsche) hypergeometrische Reihe

$$\begin{aligned} F(a, b; c; x) &= 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_0^\infty \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

dargestellt. Die Reihe bricht ab, wenn a oder b eine negative ganze Zahl ist, sie ist nicht definiert, wenn $c = -n$ ist, es sei denn a oder b ist eine negative ganze Zahl $-m$ mit $m < n$. Der Konvergenzradius der Reihe ist $|x| = 1$ mit den detaillierten Konvergenzaussagen (a, b, c werden als reell vorausgesetzt)

- $(a+b-c) < 0$: absolute Konvergenz auf dem gesamten Einheitskreis.
- $0 \leq (a+b-c) < 1$: Konvergenz auf dem Einheitskreis mit der Ausnahme von $x = 1$.
- $1 \leq (a+b-c)$: Divergenz auf dem gesamten Einheitskreis.

Die Ableitungsformeln für die hypergeometrische Reihe

$$\begin{aligned}\frac{dF(a, b; c; x)}{dx} &= \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; x) \\ \frac{d^2 F(a, b; c; x)}{dx^2} &= \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} F(a+2, b+2; c+2; x)\end{aligned}$$

etc. ergeben sich direkt aus der Definition, ebenso eine größere Anzahl von Rekursionsformeln wie z.B.

$$\begin{aligned}cF(a, b; c; x) - (c-b)F(a, b; c+1; x) - bF(a, b+1; c+1; x) &= 0 \\ cF(a, b; c; x) - (c-a)F(a, b; c+1; x) - aF(a+1, b; c+1; x) &= 0.\end{aligned}$$

Anhand der Integraldarstellung

$$F(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a}$$

kann man verschiedene Transformationsformeln herleiten, so z.B.

$$\begin{aligned}F(a, b; c; x) &= (1-x)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{x}{x-1}\right) \\ F(a, b; c; x) &= (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; x).\end{aligned}$$

In der Liste von Funktionen, die durch die hypergeometrische Reihe dargestellt werden können, findet man unter anderem

- die elementaren Funktionen

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= xF(1, 1; 2; -x) \\ \arcsin x &= xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right),\end{aligned}$$

- sowie die vollständigen elliptischen Integrale

$$\begin{aligned}K(k) &= \int_0^{\pi/2} d\varphi (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right) \\ E(k) &= \int_0^{\pi/2} d\varphi (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)\end{aligned}$$

und die Legendre Polynome

$$P_l(x) = F(-l, l+1; 1; \frac{1-x}{2}).$$

4.6 Die konfluente hypergeometrische Funktion

Die Differentialgleichung der **konfluenten hypergeometrischen Funktionen**

$$x \frac{d^2 F}{dx^2} + [c - x] \frac{dF}{dx} - aF = 0$$

hat eine reguläre Singularität bei $x = 0$ und eine irreguläre Singularität bei $x = \infty$. Die Ähnlichkeit mit der Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktionen zeigt, dass beide Differentialgleichungen Spezialfälle einer übergeordneten Differentialgleichung, der Riemannschen Differentialgleichung, sind.

Die bei $x = 0$ reguläre Lösung

$$\begin{aligned} F(a, c; x) &= 1 + \frac{a}{c}x + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_0^\infty \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

heißt **Kummersche Funktion** oder konfluente hypergeometrische Reihe. Das Konvergenzverhalten richtet sich nach Form der Parameter a und c . Es gilt (m und n sind positive ganze Zahlen)

- $c \neq -m, a \neq -n$: Die Reihe konvergiert für alle Werte von x .
- $c \neq -m, a = -n$: Die Lösung ist ein Polynom vom Grad m .
- $c = -m, a \neq -n$ oder $c = -m, a = -n$ mit $n \leq m$: Es existiert ein einfacher Pol bei dem Parameterwert $c = -m$.

Auch für diese Funktion gibt es Ableitungs- und Rekursionsformeln, sowie Integraldarstellungen. Beispiele sind

$$\frac{dF(a, c; x)}{dx} = \frac{a}{c} F(a+1, c+1; x)$$

und

$$cF(a, c; x) - (c-a)F(a, c+1; x) - aF(a+1, c+1; x) = 0,$$

sowie die Integraldarstellungen

$$F(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 dt e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1}.$$

Von Interesse in der Anwendung ist auch das asymptotische Verhalten

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-c}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-x)^{-a}.$$

Mit Hilfe der konfluenten hypergeometrischen Reihe kann man ebenfalls eine gute Zahl von Funktionen darstellen, so z.B. die Exponentialfunktion

$$e^x = F(a, a; x),$$

die trigonometrischen Funktionen wie

$$\sin x = x e^{ix} F(1, 2; -2ix)$$

und Besselfunktionen

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu e^{-ix}}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} F\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1; 2ix\right)$$

$$j_l(x) = \frac{\sqrt{\pi} x^l e^{-ix}}{2^{l+1} \Gamma(l + 3/2)} F(l + 1, 2l + 2; 2ix) .$$

Weitere Verwendung dieser Funktion wird sich im Rahmen der Diskussion der Quantenmechanik (Band 3 dieser Reihe) ergeben.

5 Lineare Räume und Koordinaten

In einem kurzen Abschnitt wurde in Band 1 Math.Kap. 3.1.3 das Konzept des abstrakten, n -dimensionalen Vektorraums vorgestellt. Diese Betrachtungen werden in diesem Kapitel für endlich dimensionale euklidische und unitäre Räume formaler gefasst und erweitert (Math.Kap. 5.1). In das somit vorgegebene Muster kann man die Diskussion von orthogonalen, krummlinigen Koordinaten (in drei Raumdimensionen) einordnen. Die lokale Abhängigkeit der Basis führt in diesem Fall zu einem aufwendigeren Formelapparat, der, nach einer allgemeinen Diskussion in Math.Kap. 5.2, für Zylinder- und Kugelkoordinaten detailliert wird.

Eine Erweiterung, die vor allem in der Quantenmechanik eine Rolle spielt, beschäftigt sich mit unendlich dimensionalen (unitären) Räumen, vor allem dem Hilbertraum. Dieses Thema wird hier (Math.Kap. 5.3) nur angeschnitten, es wird in Band 3 ausführlich behandelt.

Ein weiterer Punkt, der ebenfalls in Band 1 angesprochen wurde (in Math.Kap. 3.1.4), ist das Thema schiefwinklige Koordinatensysteme. Eine Weiterführung dieser Thematik spielt in der Relativitätstheorie eine Rolle. Als Ergänzung der Darstellung der Relativitätstheorie und ihrer Konsequenzen im Rahmen einer pseudoeuklidischen Fassung, die in dem Haupttext nahezu ausschließlich benutzt wurde, wird hier (Math.Kap. 5.4) die ko-/kontravariante Fassung des Minkowskiraumes näher ausgeführt. Es folgt eine Zusammenfassung der wichtigsten Formeln der relativistischen Mechanik und Elektrodynamik auf dieser Grundlage.

5.1 Euklidische und unitäre Vektorräume endlicher Dimension

Die formale Definition eines abstrakten, linearen Vektorraumes lautet:

Eine Menge $\mathcal{V} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots\}$ von Elementen (Vektoren) wird als linearer Vektorraum bezeichnet, wenn

- für je zwei Elemente \mathbf{a}, \mathbf{b} eine Summe $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ definiert ist, die zu \mathcal{V} gehört und
- zu jedem Element \mathbf{a} und zu jeder Zahl (Skalar) r ein Produkt $r\mathbf{a}$ definiert ist, das zu \mathcal{V} gehört und wenn die Rechenregeln

- Assoziativ- und Kommutativgesetz der Addition,
- Assoziativgesetz für die Multiplikation mit einem Skalar,
- Distributivgesetze für die Multiplikation einer Summe mit einem Skalar und für die Multiplikation eines Vektors mit einer Summe von Skalaren,

gelten. Zusätzlich muss eine Basis des Raumes existieren, die durch

- Es gibt Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_r$, so dass für jeden Vektor \mathbf{a} die Darstellung

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_r \mathbf{e}_r \quad (5.1)$$

mit (reellen) Zahlen a_1, a_2, \dots, a_r existiert.

axiomatisch festgelegt ist. Anhand dieser Definitionen kann man die Differenz zweier Vektoren und den Nullvektor ($\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$) einführen.

Ein zentraler Begriff ist der Begriff der linearen Abhängigkeit bzw. der linearen Unabhängigkeit. Diese Begriffe werden folgendermaßen definiert:

Die Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ sind linear unabhängig, falls die Linearkombination

$$\mathbf{0} = r_1 \mathbf{a}_1 + r_2 \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \mathbf{a}_k$$

nur mit $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 0$ erfüllt werden kann. Sie sind linear abhängig, wenn in der Linearkombination wenigstens eine der Zahlen r_1, \dots, r_k von Null verschieden ist. Die Tatsache, dass die erste Definition nicht unbedingt einen praktischen Weg zur Überprüfung der linearen Unabhängigkeit eines Satzes von Vektoren darstellt, tut der Präzision dieser Definition keinen Abbruch.

An den benannten Satz von r Basisvektoren wurden keinerlei Voraussetzungen bezüglich linearer Abhängigkeit gemacht. Stellt man nun fest, dass die Maximalzahl von linear unabhängigen Vektoren in diesem Satz n ($\leq r$) ist, so bezeichnet man einen solchen Satz von n linear unabhängigen Vektoren (in der Mathematik formal) als Minimalbasis und n als die Dimension des Vektorraumes. Im folgenden wird vorausgesetzt, dass die vorgegebene Basis eine Minimalbasis ist. Die Zahlen a_i in (5.1) sind dann die (eindeutigen) Koordinaten oder Komponenten des Vektors \mathbf{a} (vergleiche Band 1 Math.Kap. 3).

Durch die Definition eines Skalarproduktes von zwei Vektoren

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

wird in dem Vektorraum eine Metrik eingeführt. Bei der Klassifizierung von **metrischen Vektorräumen** unterscheidet man euklidische und unitäre Vektorräume:

- Sind die Koordinaten reell (ist \mathcal{V} ein Vektorraum über dem reellen Zahlkörper) und ist das Skalarprodukt zweier Vektoren symmetrisch sowie das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst positiv definit

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0 \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{0}),$$

so bezeichnet man den Vektorraum als **euklidisch**.

In derartigen Räumen ist es möglich, Längen und Winkel zu definieren. Die Länge eines Vektors \mathbf{a} ist

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a^2}$$

und es gelten die (leicht zu beweisenden) Ungleichungen:

- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$,
- Dreiecksungleichung: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

Der Kosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ist

$$\cos(\alpha_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Benutzt man eine Darstellung der Vektoren in einer (Minimal-) Basis $\bar{\mathbf{e}}_k$ der Dimension n , so lautet das Skalarprodukt

$$\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = \sum_{k, k'=1}^n \bar{a}_k \bar{b}_{k'} \bar{\mathbf{e}}_k \cdot \bar{\mathbf{e}}_{k'}.$$

Im Allgemeinen gilt in einem euklidischen Raum für das Skalarprodukt der Basisvektoren

$$\bar{\mathbf{e}}_k \cdot \bar{\mathbf{e}}_{k'} = g_{kk'},$$

mit einem (siehe oben) symmetrischen, positiv definiten **metrischen Tensor** $g_{kk'}$. In einem euklidischen Raum ist es jedoch immer möglich, eine Basistransformation

$$\bar{\mathbf{e}}_k = \sum_{l=1}^n (S^{-1})_{k,l} \mathbf{e}_l$$

zu bestimmen, so dass in der neuen Basis für das Skalarprodukt der Basisvektoren

$$\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_{l'} = \delta_{l,l'}$$

ist. Ein solches System von Basisvektoren, in dem das Skalarprodukt von zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} die Form

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_l^n a_l b_l$$

hat, wird als ein **Orthonormalsystem** bezeichnet. Die Koordinaten der Vektoren in der Basis \mathbf{e}_l sind mit den Koordinaten in dem System $\bar{\mathbf{e}}_k$ durch

$$a_l = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k (S^{-1})_{k,l} \quad b_l = \sum_{k=1}^n \bar{b}_k (S^{-1})_{k,l},$$

verknüpft. Die übliche Bezeichnung für einen durch eine Orthonormalbasis der Dimension n aufgespannten euklidischen Raum im Reellen ist \mathcal{R}_n .

Letztlich ist noch die Frage zu beantworten, unter welchen Basistransformationen das Skalarprodukt invariant ist. In Matrixschreibweise $\bar{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{a}$ lautet die Antwort: Die Forderung (T bedeutet Transposition)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{a}^T \mathbf{b} = (\hat{\mathbf{A}} \mathbf{a})^T (\hat{\mathbf{A}} \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T (\hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{A}}) \mathbf{b}$$

ergibt

$$\hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{E}}.$$

Transformationsmatrizen $\hat{\mathbf{A}}$, die diese Forderung erfüllen, nennt man orthogonale Matrizen, die durch sie induzierte Transformationen orthogonale Basistransformationen.

- Sind die Koordinaten komplex (ist \mathcal{V} ein Vektorraum über dem komplexen Zahlkörper) und ist das Skalarprodukt eine **hermitesche** Form, charakterisiert durch

$$\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b}^* \cdot \mathbf{a})^* \quad \text{und} \quad \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a})^* > 0 \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{0}),$$

so bezeichnet man den Vektorraum als **unitär**. Die Forderung einer hermiteschen Form bedingt die Basisdarstellung des Skalarprodukts

$$\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} = \sum_{k,k'=1}^n a_k^* b_{k'} \quad \mathbf{e}_k^* \cdot \mathbf{e}_{k'},$$

der Betrag eines Vektors ist

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a}},$$

wobei auch in diesem Fall die genannten Ungleichungen gelten. Es liegt eine orthonormale Basis, die immer bestimmt werden kann, vor, wenn

$$\mathbf{e}_k^* \cdot \mathbf{e}_{k'} = \delta_{k,k'}$$

gilt. Das Skalarprodukt in einer orthonormalen Basis

$$\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} = \sum_{k=1}^n a_k^* b_k$$

ist invariant gegenüber unitären Basistransformationen, die durch eine Matrix $\hat{\mathbf{A}}$ mit komplexen Koeffizienten, die die Bedingung

$$(\hat{\mathbf{A}}^*)^T \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{E}}$$

erfüllt, vermittelt wird. Unitäre Vektorräume (im Komplexen) mit der Basisdimension n bezeichnet man mit \mathcal{C}_n .

Der folgende Abschnitt über orthogonale krummlinige Koordinaten in drei Raumdimensionen stellt eine Variation der obigen Diskussion im Euklidischen Raum dar. Da die Betrachtung von Differentialformen erforderlich ist, betrachtet man den vektoriellen Abstand von zwei infinitesimal benachbarten Punkten $d\mathbf{s} = \sum_k ds_k \mathbf{e}_k$ und bildet daraus das Wegelement

$$d^2 s = \mathbf{ds} \cdot \mathbf{ds} = \sum_{i,k} g_{ik} ds_i ds_k ,$$

im Fall einer orthonormalen Basis ist

$$d^2 s = \sum_k d^2 s_k .$$

Orthogonale krummlinige Koordinaten werden dadurch charakterisiert, dass der metrischen Tensor in Bezug auf die zugehörigen Basisvektoren positiv definit ist, nur diagonale Elemente besitzt, die diagonalen Elemente jedoch von den Koordinaten abhängen

$$g_{ik} \longrightarrow \delta_{ik} g_{kk}(\text{Koordinaten}) .$$

Diese Koordinatenabhängigkeit hat natürlich weitreichende Konsequenzen.

5.2 Vektoranalysis in orthogonalen krummlinigen Koordinaten

Bei der Diskussion von vielen Problemen der theoretischen Physik ist der Übergang zu krummlinigen Koordinaten nützlich. Dazu ist es notwendig, alle auftretenden Größen (wie z.B. das Volumenelement) und alle Differentialoperatoren (wie z.B. den Gradientenvektor) in diesen Koordinaten darzustellen.

Der Ausgangspunkt ist die (umkehrbare) Transformation zwischen den kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) und einem beliebigen Satz von krummlinigen Koordinaten (u_1, u_2, u_3)

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(u_1, u_2, u_3) & i &= 1, 2, 3 \\ u_k &= u_k(x_1, x_2, x_3) & k &= 1, 2, 3 . \end{aligned}$$

Basisvektoren in den krummlinigen Koordinaten können durch Differentiation von

$$\mathbf{r} = \sum_i x_i(u_1, u_2, u_3) \mathbf{e}_i$$

nach den krummlinigen Koordinaten gewonnen werden

$$\tilde{\mathbf{E}}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_k} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \mathbf{e}_i .$$

Diese Relation stellt bei bekannter Transformation der Koordinaten die Verknüpfung der Basisvektoren $\tilde{\mathbf{E}}_k$ in dem System von krummlinigen Koordinaten mit den kartesischen Einheitsvektoren dar. Die krummlinigen Koordinaten werden als **orthogonal** bezeichnet, falls das Skalarprodukt von zwei verschiedenen Basisvektoren verschwindet

$$\tilde{\mathbf{E}}_k \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{k'} = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_k} \right) \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_{k'}} \right) = 0 \quad \text{für } k \neq k' .$$

Die Skalarprodukte von Basisvektoren mit sich selbst, die Diagonalelemente des metrischen Tensors,

$$\tilde{\mathbf{E}}_k \cdot \tilde{\mathbf{E}}_k = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_k} \right)^2$$

werden als **metrische Koeffizienten** bezeichnet, in der Standardnomenklatur

$$g_{kk} = g_{kk}(u_1, u_2, u_3) = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_k} \right)^2 \equiv h_k^2.$$

Es bietet sich natürlich an, mit normierten Basisvektoren zu arbeiten. Diese Einheitsvektoren in den krummlinigen Koordinaten

$$\mathbf{E}_k = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \tilde{\mathbf{E}}_k$$

erfüllen die üblichen Relationen

$$\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k'} = \delta_{kk'}.$$

Für die Diskussion des Längenelementes, der Flächenelemente und des Volumenelements in den krummlinigen Koordinaten benötigt man die totalen Differentiale der Funktionen $x_i = x_i(u_1, u_2, u_3)$

$$dx_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial u_k} du_k.$$

Damit folgt für den infinitesimalen Abstand von zwei Punkten bzw. dessen Quadrat

$$ds^2 = \sum_i (dx_i)^2 = \sum_{ikk'} \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \frac{\partial x_i}{\partial u_{k'}} du_k du_{k'}$$

die Aussage

$$ds^2 = \sum_k g_{kk} (du_k)^2.$$

Diese Relation zeigt, dass infinitesimale Abstände entlang der krummlinigen Koordinatenachsen die Form

$$(g_{11})^{1/2} du_1 \quad (g_{22})^{1/2} du_2 \quad (g_{33})^{1/2} du_3$$

haben. Die koordinatenabhängigen Vorfaktoren tragen der Tatsache Rechnung, dass die krummlinigen Koordinaten nur lokal definiert sind. Die Basisvektoren ändern ihre Richtung von Raumpunkt zu Raumpunkt (siehe Band 1, Kap. 2.4).

Mit diesen Vorgaben findet man für ein Flächenelement auf der $u_k - u_{k'}$ Fläche

$$dA_{kk'} = (g_{kk} g_{k'k'})^{1/2} du_k du_{k'}$$

und für ein Volumenelement in den krummlinigen Koordinaten

$$dV = (g_{11} g_{22} g_{33})^{1/2} du_1 du_2 du_3 .$$

Zu beachten ist, dass dV einer eigenständigen Zerlegung eines Raumbereichs entspricht und nicht volumengleich mit einem kartesischen Volumenelement

$$dV_{\text{kart.}} = dx_1 dx_2 dx_3$$

ist. Entsprechendes gilt für die infinitesimalen Oberflächenelemente.

Das infinitesimale Volumenelement stellt ein (lokales) Spatprodukt (Abb. 5.1)

$$dV = d\mathbf{v}_1 \cdot (d\mathbf{v}_2 \times d\mathbf{v}_3)$$

der drei Vektoren

$$d\mathbf{v}_k = \sqrt{g_{kk}} \mathbf{E}_k du_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

dar.

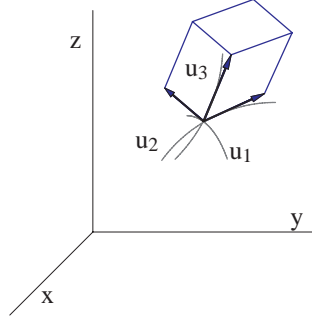


Abb. 5.1. Lokales infinitesimales Volumenelement in krummlinigen Koordinaten

Der Gradient einer Funktion $f(u_1, u_2, u_3)$ in den orthogonalen krummlinigen Koordinaten kann in der folgenden Weise gewonnen werden. Man betrachtet das totale Differential des Vektors \mathbf{r}

$$d\mathbf{r} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_k} du_k = \sum_k h_k du_k \mathbf{E}_k .$$

Mit dem Ansatz

$$\nabla f = \sum_k F_k \mathbf{E}_k$$

für den Gradienten bildet man das totale Differential der Funktion f mittels

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \sum_{kk'} F_k du_{k'} h_{k'} \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k'} = \sum_k h_k F_k du_k .$$

Auf der anderen Seite gilt für das totale Differential

$$df = \sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} du_k .$$

Vergleich der beiden Aussagen liefert

$$F_k = \frac{1}{h_k} \frac{\partial f}{\partial u_k} .$$

Es ist also in formaler Notation

$$\nabla = \sum_k \mathbf{E}_k \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \frac{\partial}{\partial u_k}$$

mit der Verabredung, dass dieser Vektoroperator auf eine skalare Funktion $f(u_1, u_2, u_3)$ einwirkt.

Die Divergenz einer Vektorfunktion der krummlinigen Koordinaten entspricht dem Skalarprodukt des Gradientenoperators mit dieser Funktion

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(u_1, u_2, u_3) = \nabla \cdot \sum_k A_k(u_1, u_2, u_3) \mathbf{E}_k .$$

In der Anwendung des Gradienten tritt die Ableitung der Einheitsvektoren nach den Koordinaten auf

$$\frac{\partial}{\partial u_{k'}} \mathbf{E}_k ,$$

die aufgrund des nichtlokalen Charakters des krummlinigen Koordinatensystems nicht trivial auszuwerten sind. Aus diesem Grund ist es zweckmäßig, auf die ursprüngliche Definition des Divergenzbegriffes zurückzugreifen (siehe Band 1, Math.Kap. 5.3.3): Der Nettofluss durch die Oberfläche S eines infinitesimalen Volumens dV geteilt durch das Volumen

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{1}{dV} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F} .$$

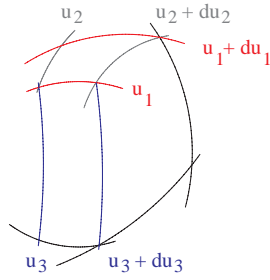


Abb. 5.2. Zur Berechnung des Divergenzoperators in krummlinigen Koordinaten

Das infinitesimale Volumen wird von 6 Flächen begrenzt, auf denen jeweils u_1 , u_2 und u_3 konstant ist, z.B. u_1 und $u_1 + du_1$ (Abb. 5.2). Der Nettofluss

durch das Volumen setzt sich aus dem Fluss durch gegenüberliegende Flächen zusammen. So ist der Nettofluss durch die Flächen auf denen u_1 konstant ist

$$d\phi_1 = \phi_1(u_1 + du_1) - \phi_1(u_1) .$$

Benutzt man für den ersten Term die Definition der partiellen Ableitung (Band 1, Math.Kap. 4.2.2), so erhält man

$$\begin{aligned} d\phi_1 &= \phi_1(u_1) + \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} du_1 - \phi_1(u_1) \\ &= \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 du_2 h_3 du_3) du_1 = \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3) du_1 du_2 du_3 . \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der Klammer ist der infinitesimale Fluss in der Form ‘Komponente der Vektorfunktion mal Fläche’. Entsprechende Aussagen gelten für die zwei anderen Flächenpaare, so dass man

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} &= \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 du_2 h_3 du_3) du_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} (A_2 h_3 du_3 h_1 du_1) du_2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_3} (A_3 h_1 du_1 h_2 du_2) du_3 \end{aligned}$$

für den Nettofluss durch das Volumen erhält. Berücksichtigt man noch das Volumen

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 ,$$

so findet man

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(u_1, u_2, u_3) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (A_2 h_3 h_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u_3} (A_3 h_1 h_2) \right] . \end{aligned}$$

Eine andere, oft benutzte Schreibweise mit

$$g = g_{11} g_{22} g_{33}$$

ist

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = g^{-1/2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\left[\frac{g}{g_{kk}} \right]^{1/2} A_k \right) .$$

Für die Rotation einer Vektorfunktion benutzt man entsprechend die Definition

$$(\nabla \times \mathbf{A})_k = \lim_{dS_k \rightarrow 0} \frac{1}{dS_k} \oint_{K_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} .$$

Die k -te Komponente der Rotation entspricht dem Kurvenintegral über den Rand K_k einer infinitesimalen Fläche S_k geteilt durch diese Fläche. Die Kurve K_k , die in die Definition der k -ten Komponente der Rotation eingeht,

liegt in einer Fläche mit $u_k = \text{const.}$ Sie wird aus 4 Kurvenstücken gebildet (Abb. 5.3). Es ist dann z.B. der Beitrag der zwei Kurvenstücke zu $(\text{rot } \mathbf{A})_3$,

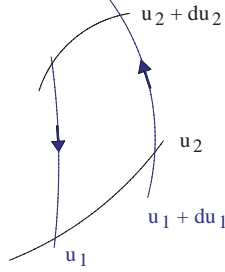


Abb. 5.3. Zur Berechnung des Rotationsoperators in krummlinigen Koordinaten

auf denen jeweils u_2 konstant ist

$$\begin{aligned} (ds_2)_3 &= (s_2(u_2))_3 - (s_2(u_2 + du_2))_3 = -\frac{\partial(s_2)_3}{\partial u_2} du_2 \\ &= -\frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_1 du_1) du_2, \end{aligned}$$

wobei die infinitesimale Strecke zu den Punkten mit wachsendem u_2 positiv gerechnet wird. Der Beitrag der restlichen zwei Kurvenstücke ist

$$(ds_1)_3 = (s_1(u_1 + du_1))_3 - (s_1(u_1))_3 = \frac{\partial}{\partial u_1} (A_2 h_2 du_2) du_1.$$

Für die 3-Komponente der Rotation erhält man somit mit $dS_3 = u_1 du_1 u_2 du_2$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_1) \right].$$

Die Herleitung der restlichen Komponenten von $\nabla \times \mathbf{A}$ folgt dem gleichen Muster. Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (A_2 h_2) \right] \mathbf{E}_1 \\ &\quad + \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_3} (A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (A_3 h_3) \right] \mathbf{E}_2 \\ &\quad + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_1) \right] \mathbf{E}_3 \end{aligned}$$

bzw. in der alternativen Notation

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{g_{11}}{g} \right)^{1/2} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (\sqrt{g_{33}} A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (\sqrt{g_{22}} A_2) \right] \mathbf{E}_1$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{g_{22}}{g} \right)^{1/2} \left[\frac{\partial}{\partial u_3} (\sqrt{g_{11}} A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (\sqrt{g_{33}} A_3) \right] \mathbf{E}_2 \\
& + \left(\frac{g_{33}}{g} \right)^{1/2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (\sqrt{g_{22}} A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (\sqrt{g_{11}} A_1) \right] \mathbf{E}_3 .
\end{aligned}$$

Eine nützliche Merkregel für die Auswertung der Rotation einer Vektorfunktion ist auch hier die Determinantenform

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \left(\frac{g_{11}}{g} \right)^{1/2} \mathbf{E}_1 & \left(\frac{g_{22}}{g} \right)^{1/2} \mathbf{E}_2 & \left(\frac{g_{33}}{g} \right)^{1/2} \mathbf{E}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ \sqrt{g_{11}} A_1 & \sqrt{g_{22}} A_2 & \sqrt{g_{33}} A_3 \end{vmatrix} .$$

Eine Darstellung des Laplaceoperators folgt dann durch Kombination der Gradienten- und Divergenzbildung

$$\begin{aligned}
\Delta f(u_1, u_2, u_3) &= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} f) \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right]
\end{aligned}$$

bzw. in kompakter Form

$$\Delta f = g^{-1/2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_k} \left[\left(\frac{g}{g_{kk}} \right)^{1/2} \frac{\partial f}{\partial u_k} \right] .$$

Es ist noch anzumerken, dass diese Betrachtungen verallgemeinert werden können.

- (i) Anstelle der oben angegebenen Basisvektoren $\tilde{\mathbf{E}}_k$ kann man die Basisvektoren

$$(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3) = (\boldsymbol{\nabla} u_1, \boldsymbol{\nabla} u_2, \boldsymbol{\nabla} u_3)$$

benutzen, die senkrecht auf den Koordinatenflächen $u_k = \text{const.}$ stehen. Im Fall von orthogonalen Koordinaten gilt (siehe Diskussion des Gradienten)

$$\mathbf{E}_k = h_k \mathbf{B}_k = h_k \boldsymbol{\nabla} u_k \longrightarrow (\boldsymbol{\nabla} u_k)^2 = \frac{1}{g_{kk}} .$$

Die Basis unterscheidet sich (für orthogonale, krummlinige Koordinaten) nur in der Normierung.

- (ii) Anhand der zwei möglichen Basissätze kann man auch im Fall von orthogonalen krummlinigen Koordinaten eine ko-/kontravariante Beschreibung benutzen (Band 1 Math.Kap. 3.1.4 und Math.Kap. 5.4). Die Koeffizienten bei der Darstellung eines Vektors durch die Basis $\tilde{\mathbf{E}}_k$

$$\mathbf{A} = \sum_k a^k \tilde{\mathbf{E}}_k$$

sind die kontravarianten Komponenten, die Koeffizienten bei der Darstellung nach der Basis \mathbf{B}_k sind die kovarianten Komponenten

$$\mathbf{A} = \sum_k a_k \mathbf{B}_k .$$

Es ist dann z.B.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \sum_{kk'} a^k a_{k'} \tilde{\mathbf{E}}_k \cdot \mathbf{B}_{k'} = \sum_{kk'} a^k a_{k'} (h_k \mathbf{E}_{k'}) \cdot \left(\frac{\mathbf{E}_k}{h_k} \right) = \sum_k a^k a_k .$$

Für die zwei wichtigsten Sätze von krummlinigen Koordinaten, Zylinder- und Kugelkoordinaten, erhält man die folgenden Detailsaussagen

5.2.1 Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x_1 = x &= \rho \cos \varphi & u_1 = \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ x_2 = y &= \rho \sin \varphi & u_2 = \varphi &= \arctan(y/x) \\ x_3 = z & & u_3 &= z . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$h_1 = 1 \quad h_2 = \rho \quad h_3 = 1$$

und somit (benutze \mathbf{e}_{u_k} anstatt \mathbf{E}_k)

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

$$\nabla f(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A}(\rho, \varphi, z) &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\Delta f(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

5.2.2 Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x_1 = x &= r \cos \varphi \sin \theta & u_1 = r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ x_2 = y &= r \sin \varphi \sin \theta & u_2 = \theta &= \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \\ x_3 = z &= r \cos \theta & u_3 = \varphi &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r \sin \theta$$

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \sin \theta \mathbf{e}_x + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \varphi \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y$$

$$\nabla f(r, \varphi, \theta) = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A}(r, \varphi, \theta) &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\Delta f(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

5.3 Euklidische und unitäre Räume mit der Dimension unendlich

In euklidischen und unitären Vektorräumen mit einer endlichen Dimension n kann man eine Basis anhand des Begriffes der linearen Abhängigkeit definieren:

Gilt für *jeden* Vektor \mathbf{x} in einem Vektorraum: Die Vektoren $\{\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ sind linear abhängig, so ist $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ eine Basis des Raumes.

Die Betonung liegt auf dem Wort 'jeder'. Ist die Basis eine Orthonormalbasis, in einheitlicher (der Quantenmechanik entlehnter) Notation

$$\left. \begin{array}{l} \text{euklidisch : } \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k \\ \text{unitär : } (\mathbf{e}_i)^* \cdot \mathbf{e}_k \end{array} \right\} = \langle i | k \rangle = \delta_{i,k} ,$$

so werden die Vektoren durch ihre Projektion auf die Basis dargestellt

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \langle i | \mathbf{x} \rangle \mathbf{e}_i .$$

Bei dem Versuch, den Grenzfall unendlicher Dimension (genauer gesagt abzählbar unendlicher Dimension) $n \rightarrow \infty$ zu diskutieren, stellt es sich heraus, dass der Begriff der linearen Abhängigkeit nicht mehr greift. Man benötigt, den Begriff der **Vollständigkeit** eines Vektorraumes, der durch die folgenden Aussagen charakterisiert wird:

- Jeder Vektor des Raumes lässt sich als Linearkombination der Basisvektoren darstellen.
- Jede Linearkombination der Basisvektoren ist ein Vektor aus dem Raum.

Ist z.B. ein Satz von Vektoren des \mathcal{R}_n eine (Minimal)-Basis, so ist diese trivialerweise vollständig. Ist jedoch die Dimension des Raumes unendlich, so macht das Argument

Die ∞ vielen Vektoren $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots\}$ sind linear unabhängig, die $(\infty + 1)$ Vektoren $\{\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots\}$ sind linear abhängig, also ist $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots\}$ eine Basis des Raumes.

keinen Sinn (was ist der Unterschied zwischen ∞ und $\infty + 1$?). Die einzige Möglichkeit, das Konzept einer vollständigen Basis in den Griff zu bekommen, ist eine explizite Grenzbetrachtung, die ein Kriterium für die Vollständigkeit der Basis liefert.

5.3.1 Der Hilbertraum

Man betrachtet eine Folge von Teilräumen

$$\begin{aligned} T_1 &: \{\mathbf{e}_1\} \\ T_2 &: \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \\ &\vdots \\ T_n &: \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \langle i|k \rangle = \delta_{ik}$ ist. Für einen Vektor \mathbf{x} in einem Raum mit der Dimension unendlich, kann man in den n -dimensionalen Teilräumen eine entsprechende Folge von ‘Näherungen’ betrachten

$$\mathbf{x}^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad x_i = \langle i|\mathbf{x} \rangle .$$

Der Vektor \mathbf{x} wird auf den jeweiligen Teilraum projiziert. Für die Angabe des ‘Fehlers’ der n -ten Näherung benutzt man das Betragsquadrat der Differenz von Vektor und Näherung. Es ist explizit

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)}|^2 &= \sum_{k,k'=1}^{\infty} \sum_{i,i'=1}^n (x_k^* \mathbf{e}_k^* - x_i^* \mathbf{e}_i^*) \cdot (x_{k'} \mathbf{e}_{k'} - x_{i'} \mathbf{e}_{i'}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* x_k - \sum_{i=1}^n x_i^* x_i - \sum_{i=1}^n x_i^* x_i + \sum_{i=1}^n x_i^* x_i \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* x_k - \sum_{i=1}^n x_i^* x_i , \end{aligned}$$

bzw. in der Klammernotation

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)}|^2 &= \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)} | \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x} | \mathbf{x}^{(n)} \rangle - \langle \mathbf{x}^{(n)} | \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}^{(n)} | \mathbf{x}^{(n)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x} | i \rangle \langle i | \mathbf{x} \rangle . \end{aligned}$$

Das Resultat ergibt sich infolge der Gültigkeit des Distributivgesetzes für das Skalarprodukt und der Tatsache, dass drei der Terme den gleichen Beitrag liefern. Der Fehler (per Definition das Quadrat eines Abstandes) ist immer positiv. Es gilt also

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x} | i \rangle \langle i | \mathbf{x} \rangle \geq 0 ,$$

mit der Interpretation, dass der Vektor, der sich durch Projektion auf die Teilräume ergibt, immer kürzer ist als der Vektor selbst. Diese Aussage gilt auch in den Grenzfall $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{x} | i \rangle \langle i | \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle .$$

Diese Ungleichung, die Besselsche Ungleichung, ist die Basis für eine umsetzbare Definition des Begriffes der Vollständigkeit

Man bezeichnet einen Satz von orthonormalen Basisvektoren

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots\}$$

des \mathcal{R}_n oder \mathcal{C}_n , einschließlich des Falles $n \rightarrow \infty$, als vollständig, falls die Gleichung

$$\lim_{k \rightarrow n} \left\{ \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{x} | i \rangle \langle i | \mathbf{x} \rangle \right\} = \lim_{k \rightarrow n} \left\{ \sum_{i=1}^k |\langle \mathbf{x} | i \rangle|^2 \right\} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle ,$$

die Parsevalsche Gleichung, für jede Folge von Teilräumen $\{T_1, \dots, T_k, \dots\}$ gilt.

Diese Aussage ist für endlich dimensionale Räume mit der ursprünglichen Fassung der Vollständigkeit identisch. Da man mit dem Längenbegriff argumentiert, ist sie, im Gegensatz zu dem Begriff der linearen Unabhängigkeit, auch in dem Grenzfall $n \rightarrow \infty$ anwendbar. Man definiert im Anschluss

Jeder Vektorraum der Dimension abzählbar unendlich, in dem die Parsevalsche Bedingung gilt, nennt man einen **Hilbertraum**.

Hilberträume sind also unendlich dimensionale Vektorräume, die per Definition eine vollständige Orthonormalbasis besitzen. Die Beschränkung auf die Formulierung ‘abzählbar unendlich’ ergibt sich aus der Forderung, eine entsprechende, abzählbare Folge von Teilräumen in Betracht zu ziehen.

Die abstrakte Diskussion des Hilbertraumes lässt sich z.B. in eine reale umsetzen (man spricht dann von einer Realisierung eines Hilbertraumes), wenn man anstelle von Basisvektoren \mathbf{e}_l einen entsprechenden Satz von (reellen oder komplexen) Funktionen $u_l(x)$ benutzt

$$\text{Basis: } u_l(x) \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Des weiteren ist die Umschreibung notwendig

$$\text{Skalarprodukt der Basis: } \langle l | m \rangle = \int_a^b dx u_l^*(x) u_m(x) = \delta_{lm} .$$

Falls diese Basis vollständig ist, spannen die Funktionen einen Hilbertraum auf. Der Nachweis der Vollständigkeit ist in der Praxis nicht einfach. Er ergibt sich jedoch für viele Sätze von Funktionen aus dem Sturm-Liouville Theorem, das in dem Band 3 besprochen werden soll.

Ist ein Basissystem von Funktionen $\{u_l(x)\}$ vollständig, so ist die folgende Anwendung möglich: Jede Funktion $f(x)$, die über dem gleichen Grundintervall $[a, b]$ wie die Basisfunktionen definiert sind, kann in einer Funktionenreihe

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l u_l(x)$$

entwickelt werden. Die Entwicklungskoeffizienten A_l sind für eine Orthonormalbasis die Skalarprodukte

$$A_l = \langle l | f \rangle = \int_a^b dx u_l^*(x) f(x) .$$

Beispiele mit Funktionen einer Veränderlichen sind die Fourierreihen mit der Basis

$$u_l(x) = \frac{1}{2\pi} e^{il\varphi} \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{in dem Intervall } 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

und die Legendrereihen mit

$$u_l(x) = P_l(x) \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad \text{in dem Intervall } -1 \leq x \leq 1.$$

Diese einführende Diskussion wird im Rahmen der Diskussion der Quantenmechanik (Band 3) vertieft.

5.4 Lineare Räume mit nichteuklidischer Metrik

Euklidische (und unitäre) Vektorräume sind dadurch ausgezeichnet, dass das Skalarprodukt eines Vektors, insbesondere eines Basisvektors, mit sich selbst positiv definit ist. Besteht man nicht auf dieser Eigenschaft, sondern lässt eine allgemeinere **Metrik** des Raumes zu, so ist es möglich, dass das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst, negativ oder gleich Null sein kann

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \longrightarrow \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}.$$

Man spricht dann von einer **nichteuklidischen** Metrik. In einem solchen Raum muss man zwischen einer **kovarianten** und einer **kontravarianten** Zerlegung eines Vektors bzw. Basis unterscheiden. So definiert man z.B. den Satz von Basisvektoren

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$$

mit dem (per Definition symmetrischen) metrischen Tensor

$$\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\mu = g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$$

als die Basis der kontravarianten Zerlegung eines Vektors \mathbf{a}

$$\mathbf{a} = \sum_{\mu=1}^n a^\mu \mathbf{e}_\mu.$$

Entsprechend setzt man für die kovariante Zerlegung mit der Basis

$$\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$$

und dem metrischen Tensor

$$\mathbf{e}^\nu \cdot \mathbf{e}^\mu = g^{\nu\mu} = g^{\mu\nu}$$

die Darstellung

$$\mathbf{a} = \sum_{\mu=1}^n a_\mu \mathbf{e}^\mu$$

an. Die Basisvektoren der beiden Zerlegungen sind durch

$$\mathbf{e}_\nu = \sum_{\mu=1}^n g_{\nu\mu} \mathbf{e}^\mu$$

bzw.

$$\mathbf{e}^\mu = \sum_{\nu=1}^n g^{\mu\nu} \mathbf{e}_\nu$$

verknüpft. Der Tensor $[(g^{\mu\nu})]$ ist der zu $[(g_{\mu\nu})]$ inverse metrische Tensor, denn es gilt dann

$$\mathbf{e}^\mu = \sum_{\nu=1}^n g^{\mu\nu} \mathbf{e}_\nu = \sum_{\nu,\kappa=1}^n g^{\mu\nu} g_{\nu\kappa} \mathbf{e}^\kappa = \sum_{\kappa=1}^n \delta_\kappa^\mu \mathbf{e}^\kappa = \mathbf{e}^\mu ,$$

wobei das Kroneckersymbol trotz der Hochstellung eines der Indizes die übliche Bedeutung hat. Die Konsistenz der Transformationen der Basisvektoren wird z.B. durch die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mu'} \cdot \mathbf{e}^\mu &= \sum_{\nu,\nu'=1}^n g^{\mu'\nu'} g^{\mu\nu} \mathbf{e}_{\nu'} \cdot \mathbf{e}_\nu = \sum_{\nu,\nu'=1}^n g^{\mu'\nu'} g^{\mu\nu} g_{\nu'\nu} \\ &= \sum_{\nu}^n g^{\mu\nu} \delta_{\mu'}^\nu = g^{\mu'\mu} \end{aligned}$$

bestätigt. Man findet auch

$$\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \sum_{\kappa=1}^n g^{\mu\kappa} \mathbf{e}_\kappa \cdot \mathbf{e}_\nu = \sum_{\kappa=1}^n g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (5.2)$$

für das Skalarprodukt der kovarianten Basisvektoren mit den kontravarianten und

$$\mathbf{a} = \sum_{\mu,\nu=1}^n a^\mu g_{\mu\nu} \mathbf{e}^\nu = \sum_{\nu=1}^n a_\nu \mathbf{e}^\nu \quad \text{mit} \quad a_\nu = \sum_{\mu=1}^n a^\mu g_{\mu\nu}$$

für die Transformation zwischen den Sätzen von Koeffizienten.

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren kann entweder in der kontra- oder der kovarianten Basis ausgewertet werden

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \sum_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \sum_{\mu\nu} a^\mu b^\nu g_{\mu\nu} = \sum_{\mu} a^\mu b_\mu = \sum_{\nu} a_\nu b^\nu \\ &= \sum_{\mu\nu} a_\mu b_\nu \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = \sum_{\mu\nu} a_\mu b_\nu g^{\mu\nu} = \sum_{\mu} a_\mu b^\mu = \sum_{\nu} a^\nu b_\nu . \end{aligned}$$

In beiden Fällen erhält man im Endeffekt das gleiche Ergebnis in der Form einer speziellen **Kontraktion**, einer Summe über Produkte von gleich indizierten kovarianten mit kontravarianten Komponenten. (Das allgemeine Konzept der Kontraktion wird im nächsten Abschnitt vorgestellt).

Ein direktes Beispiel, dessen Metrik auch als pseudoeuklidisch bezeichnet wird, ist ein vierdimensionaler Minkowskiraum mit

$$g_{\mu,\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu \quad \text{und} \quad g_{0,0} = -1, \quad g_{1,1} = g_{2,2} = g_{3,3} = 1.$$

Es ist jedoch zu bemerken, dass weder die Durchzählung der Koordinaten des Minkowskiraumes noch die Vorgabe der Metrik in der Literatur eindeutig gehandhabt wird. Man findet z.B. eine Durchzählung von 1 bis 4, wobei die Zeitkoordinate meist mit 4 indiziert wird, und die Sequenz $1, -1, -1, -1$ anstatt $-1, 1, 1, 1$, für die Metrik.

Die formale Fassung des Minkowskiraumes ist der Inhalt des nächsten Abschnitts. Das Kapitel wird durch eine kurze Zusammenfassung der Grundaussagen der relativistischen Mechanik und der Elektrodynamik in der formalen (ko- und kontravarianten) Schreibweise abgerundet.

5.4.1 Der Minkowskiraum

Den vier kontravarianten Basisvektoren des Minkowskiraums, die hier mit

$$\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$$

bezeichnet werden, entspricht der metrische Tensor

$$(g_{\mu\nu}) = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die kontravariante Zerlegung eines **Vierervektors**, mit der Notation \mathbf{V} , ist

$$\mathbf{V} = v^0 \mathbf{e}_0 + v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{\mu=0}^3 v^\mu \mathbf{e}_\mu.$$

Auf die Benutzung der (durchaus praktischen) Summenkonvention

$$\sum_{\mu=0}^3 v^\mu \mathbf{e}_\mu \equiv v^\mu \mathbf{e}_\mu,$$

mit der Regel: ‘Summiere über alle Paare von gleichen hoch- und tiefgestellten Indizes’ wird verzichtet.

Infolge der einfacheren Struktur der Metrik ist der inverse metrische Tensor mit dem metrischen Tensor identisch

$$g^{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}.$$

Der physikalische Hintergrund kann mit den folgenden Aussagen skizziert werden: Man interpretiert die Zeitkoordinate (aus Dimensionsgründen multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit c) und die Ortskoordinaten

$$x_0 = ct \quad x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z$$

als die kovarianten Komponenten eines Vierervektors, des **Ereignisvektors**,

$$\mathbf{R} = x_0 \mathbf{e}^0 + x_1 \mathbf{e}^1 + x_2 \mathbf{e}^2 + x_3 \mathbf{e}^3 .$$

Wie in der normalen Vektorrechnung bietet sich die Kurzform

$$\mathbf{R} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{ct, x, y, z\}$$

an, wobei zur Unterscheidung von Dreiervektoren (im Ortsraum) geschweifte Klammern benutzt werden. Die kontravarianten Komponenten des Ereignisvektors sind dann

$$x^0 = -ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z .$$

Die Michelson-Morley Bedingung

$$-c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2 t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 ,$$

wobei sich die Koordinaten auf zwei verschiedene Inertialsysteme (S) (ungestrichene Koordinaten) und (S') (gestrichene Koordinaten) beziehen, kann durch das Skalarprodukt eines Ereignisvektors mit sich selbst dargestellt werden. Es ist

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \sum_{\mu=0}^3 x_{\mu} x^{\mu} = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 ,$$

so dass die Michelson-Morley Relation

$$\sum_{\mu=0}^3 x'_{\mu} x'^{\mu} = \sum_{\mu=0}^3 x_{\mu} x^{\mu}$$

der Forderung nach der Invarianz eines Skalarproduktes, der Länge des Ereignisvektors, bei dem Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen entspricht.

Eine allgemeine, lineare Transformation im Minkowskiraum, die die Koordinaten eines Inertialsystems S mit den Koordinaten in einem Inertialsystem S' verknüpft, wird als **Lorentztransformation** bezeichnet. Die Michelson-Morley Relation ist das Werkzeug mit dem man die Frage beantwortet, welche Bedingungen die Lorentztransformationen erfüllen müssen. Der Ansatz für eine homogene Transformation, in der z.B. die kontravarianten Komponenten in dem System S in die kovarianten Komponenten in den System S' übergeführt werden, lautet

$$x'_{\mu} = \sum_{\lambda=0}^3 L_{\mu\lambda} x^{\lambda} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) . \quad (5.3)$$

Alternative Ansätze, wie

$$x'^{\mu} = \sum_{\lambda=0}^3 L^{\mu\lambda} x_{\lambda} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) , \quad (5.4)$$

gehen daraus durch Matrixmultiplikation mit dem metrischen Tensor hervor. Diese Gleichungen für die Transformation zwischen den kovarianten Komponenten in dem System S und den kontravarianten Komponenten in S' gewinnt man mit den Schritten

$$\sum_{\nu} g^{\mu\nu} x'_{\nu} = x'^{\mu} = \sum_{\lambda\nu\rho} g^{\mu\nu} L_{\nu\rho} g^{\rho\lambda} x_{\lambda} = \sum_{\lambda} L^{\mu\lambda} x_{\lambda} .$$

Die Transformationsmatrix mit hochgestellten Indizes ist

$$L^{\mu\lambda} = \sum_{\nu\rho} g^{\mu\nu} L_{\nu\rho} g^{\rho\lambda} . \quad (5.5)$$

Fällt der Koordinatenursprung der beiden Inertialsysteme zu der Anfangszeit $t_0 = t'_0 = 0$ nicht zusammen, so muss man die inhomogene Transformation

$$x'_{\mu} = \sum_{\lambda=0}^3 L_{\mu\lambda} x^{\lambda} + b_{\mu}$$

in Betracht ziehen. Der Vierervektor $\mathbf{B} = \{b_0, b_1, b_2, b_3\} = \{b^0, b^1, b^2, b^3\}$ beschreibt die Position des vierdimensionalen Koordinatenursprungs des Systems S aus der Sicht des Systems S' . Man bezeichnet eine derartige Transformation im Minkowskiraum als **Poincarétransformation**.

Setzt man die Transformationsgleichungen (5.3) und (5.4) für die homogene Transformation ($b_{\mu} = b^{\mu} = 0$ für alle μ) in die Michelson-Morley Bedingung ein, so erhält man

$$\sum_{\mu\lambda\rho} L_{\mu\lambda} L^{\mu\rho} x^{\lambda} x_{\rho} = \sum_{\lambda} x^{\lambda} x_{\lambda} .$$

Koeffizientenvergleich liefert die Aussage

$$\sum_{\mu} L_{\mu\lambda} L^{\mu\rho} = \delta_{\lambda}^{\rho} ,$$

ein Ergebnis, das man als die Orthogonalitätsrelation der Lorentztransformation bezeichnet. Eine alternative Form der Orthogonalitätsrelation gewinnt man mit den folgenden Schritten: Ersetze $L^{\mu\rho}$ durch (5.5)

$$\sum_{\mu\nu\kappa} L_{\mu\lambda} g^{\mu\nu} L_{\nu\kappa} g^{\kappa\rho} = \delta_{\lambda}^{\rho} ,$$

multipliziere mit $g_{\rho\sigma}$, summiere über ρ unter Benutzung der Orthogonalitätsrelation (5.2) des metrischen Tensors und erhalte

$$\sum_{\mu\nu} L_{\mu\lambda} g^{\mu\nu} L_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma} .$$

Jede Lorentztransformation muss die Orthogonalitätsrelation erfüllen. Diese Bedingung weist die Lorentztransformationen als ‘orthogonale’ Transformationen im Minkowskiraum aus, die somit vierdimensionale Drehungen

und Spiegelungen beinhalten. Bei den Drehungen kann es sich um reine Raumdrehungen ebenso wie ‘Drehungen’, in denen Raum- und Zeitkoordinaten gemeinsam transformiert werden, handeln. Spiegelungen im Minkowskiraum umfassen Zeitumkehr und Spiegelungen am räumlichen Koordinatenursprung. Die Tatsache, dass Lorentztransformationen geometrischen Operationen in dem Minkowskiraum entsprechen, ist der Ausgangspunkt für eine Diskussion der Lorentz- (und Poincaré)transformationen aus der Sicht der Gruppentheorie. (Interessenten finden Details und weitere Referenzen in W.I. Fushchich and A.F. Nikitin, ‘Symmetries of Maxwell’s Equations’, D. Reidel Publishing, Dordrecht, 1987. Eine kompaktere, wenn auch vielleicht für den Anfänger nicht gerade zugängliche Darstellung, findet man in den Lehrbüchern der Quantenfeldtheorie, wie z.B. L.H. Ryder, ‘Quantum Field Theory’ Cambridge University Press, Cambridge, 1991.)

Die einfache Lorentztransformation, die eine uniforme Relativbewegung gleich orientierter Inertialsysteme in der x -Richtung beschreibt, wird durch die Transformationsmatrix

$$(L_{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} -\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vermittelt, die Transformationen der Zeitumkehr und der Raumspiegelung durch Transformationsmatrizen mit

$$L_{\mu\lambda} = \delta_{\mu\lambda} \quad \text{bzw.} \quad L_{\mu\lambda} = -\delta_{\mu\lambda} .$$

Die Lorentztransformation für beliebig gegeneinander orientierte Inertialsysteme und eine beliebige Richtung der Relativgeschwindigkeit kann man in der folgenden Weise konstruieren:

- Drehe das ungestrichene Koordinatensystem so, dass die x_1 -Achse parallel zu \mathbf{v}_{rel} ist (Abb. 5.4)

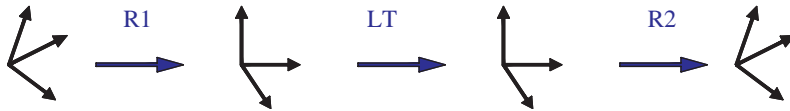


Abb. 5.4. Illustration der Operationen zur Gewinnung einer allgemeinen Lorentztransformation

$$y_\mu = \sum_{\lambda} D_{\mu\lambda}(\Omega) x^\lambda .$$

Die Drehmatrix für eine Raumdrehung hat im Minkowskiraum die Form

$$(D_{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ 0 & & d^{(3)} & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Die Drehmatrix $d^{(3)}$ im R_3 in der Darstellung durch die Eulerwinkel wurde in Band 1 Kap. 6.3.5 eingeführt.

- Es ist nun eine einfache Lorentztransformation von dem gedrehten System zu einem gestrichenen System durchzuführen

$$y'_\sigma = \sum_\mu L_{\sigma\mu}(v_{\text{rel}}/c) y^\mu.$$

- Das System mit den Koordinaten y'_σ hat noch nicht die korrekte Orientierung. Es muss noch so gedreht werden, dass die y'_1 -Achse mit der x'_1 -Achse zusammenfällt

$$x'_\rho = \sum D_{\rho\sigma}(\Omega') y'^\sigma.$$

- Setzt man die Transformationen zusammen, so erhält man (in Matrixform)

$$\mathbf{R}' = \mathbf{D}(\Omega') \mathbf{L}(v_{\text{rel}}/c) \mathbf{D}(\Omega) \mathbf{R}.$$

Eine allgemeine Lorentztransformation setzt sich aus zwei Raumdrehungen und einer einfachen Raum-Zeit-Drehung (in der angegebenen Reihenfolge) zusammen.

Die Angelegenheit ist etwas übersichtlicher, wenn die beiden Inertialsysteme gleich orientiert sind, aber eine beliebige Relativgeschwindigkeit vorliegt. In diesem Fall ist die zweite Drehung die Inverse zu der ersten. In Kap. 8.3 wird gezeigt, dass man für die drei kartesischen Raumkoordinaten und die Zeitkoordinate in den beiden Inertialsystemen die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}})}{v_{\text{rel}}^2} \mathbf{v}_{\text{rel}} - \gamma \mathbf{v}_{\text{rel}} t \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}})}{c^2} \right) \end{aligned}$$

erhält. In diesem Zusammenhang ist zu erwähnen, dass das Hintereinanderausführen von Lorentztransformationen keine vertauschbaren Operationen sind, es sei denn die Relativgeschwindigkeiten der zwei Transformationen sind parallel.

Bei der Diskussion der Elektrodynamik aus der Sicht der Relativitätstheorie spielen die Ableitungen nach den Minkowskikoordinaten in der Form des Vierergradienten eine besondere Rolle. Zu beantworten ist die Frage, ob der Vierergradient, der z.B. durch die Ableitungen nach den kovarianten Koordinaten angegeben wird

$$\bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right),$$

ein Vierervektor ist. In diesem Fall müssen sich die Komponenten des Vierergradienten genau wie die entsprechenden Komponenten des Ereignisvektors transformieren.

Um die Transformationseigenschaften des Vierergradienten zu bestimmen, betrachtet man die Wirkung dieses Operators auf ein Skalarfeld f im Minkowskiraum. Ein solches Feld ist dadurch charakterisiert, dass es für Punkte des Minkowskiraumes, die durch eine Lorentztransformation verknüpft sind, den gleichen Wert hat.

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3).$$

Für die Ableitung eines Skalarfeldes f in Bezug auf die gestrichenen (kovarianten) Koordinaten erhält man mit der Kettenregel

$$\frac{\partial f(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial x'_\mu} = \sum_\lambda \frac{\partial f(x_0, x_1, x_2, x_3)}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'_\mu}.$$

Zur Auswertung der rechten Seite dieser Gleichung benötigt man die Ableitung der kontravarianten Koordinate in S nach der kovarianten Koordinate in S' . Man multipliziert zu diesem Zweck die Transformationsgleichung (5.3) mit $L^{\lambda\nu}$ und summiert über ν

$$\sum_\nu L^{\lambda\nu} x'_\nu = \sum_{\mu\nu} L^{\lambda\nu} L_{\nu\mu} x^\mu = \sum_{\mu\nu} L^{\nu\lambda} L_{\nu\mu} x^\mu,$$

benutzt die Orthogonalitätsrelation der Lorentztransformation und erhält als Umkehrung von (5.3)

$$x^\lambda = \sum_\nu L^{\lambda\nu} x'_\nu = \sum_\nu L^{\nu\lambda} x'_\nu.$$

Diese Relation liefert direkt die gewünschte partielle Ableitung. Die resultierende Transformationsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x'_\mu} = \sum_\lambda L^{\mu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$$

besagt, dass sich die Ableitungen nach einer kovarianten Minkowskikoordinate wie eine kontravariante Koordinate (und umgekehrt) transformieren. Eine vielbenutzte Schreibweise ist deswegen

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial^\mu \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$$

mit den Transformationsgleichungen

$$\partial'^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 L^{\mu\lambda} \partial_\lambda \quad \text{bzw.} \quad \partial'_\mu = \sum_{\lambda=0}^3 L_{\mu\lambda} \partial^\lambda.$$

Der Vierergradient ist in der Tat ein Vierervektor, in kontravarianter Zerlegung

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} &= \{\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}\end{aligned}$$

und in kovarianter Zerlegung

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} &= \{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}.\end{aligned}$$

Die elektromagnetischen Felder werden durch Größen dargestellt, die ein komplexeres Transformationsverhalten aufweisen als Vierervektoren. Derartige Größen bezeichnet man als Tensoren (zweiter und höherer) Stufe. Tensoren zweiter Stufe, die in Matrixschreibweise in der Form $[\hat{A}] = [(A_{\mu\nu})]$ geschrieben werden, sind dadurch charakterisiert, dass sich deren Elemente bei dem Übergang zwischen zwei Inertialsystemen wie

$$A'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda\sigma} L_{\mu\lambda} L_{\nu\sigma} A^{\lambda\sigma}$$

transformieren. Eine Matrix $\hat{A} = (A_{\mu\nu})$, für die dieses Transformationsgesetz *nicht* gilt, ist kein Tensor im Minkowskiraum. Ein Produkt mit den Elementen $x^\lambda y^\sigma$ erfüllt wegen (5.3) die Transformationsgleichung

$$x'_\mu y'_\nu = \sum_{\lambda\sigma} L_{\mu\lambda} L_{\nu\sigma} x^\lambda y^\sigma.$$

Tensoren, die durch die Multiplikation der Komponenten von zwei Vektoren (Tensoren erster Stufe) konstruiert werden, stellen eine häufig auftretende, doch nicht die alleinige Form von Tensoren zweiter Stufe dar. Kontravariante oder teilweise kontravariante Tensorelemente können mit dem metrischen Tensor oder durch eine entsprechende Kombination von Vierervektoren erzeugt werden, so z.B.

$$A^{\mu\nu} = \sum_{\lambda\sigma} g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} A_{\lambda\sigma} \quad A_\mu{}^\nu = \sum_\lambda g^{\nu\lambda} A_{\mu\lambda} \quad B_\mu{}^\nu = x_\mu y^\nu.$$

Tensoren dritter Stufe sind dreifach indiziert und transformieren sich z.B. gemäß

$$A'_{\lambda\mu\nu} = \sum_{\lambda'\mu'\nu'} L_{\lambda\lambda'} L_{\mu\mu'} L_{\nu\nu'} A^{\lambda'\mu'\nu'}.$$

Durch die mathematische Operation der **Kontraktion** ist es möglich, den Tensorrang zu erniedrigen. Die Kontraktion ist sozusagen eine Erweiterung

des Konzeptes des Skalarproduktes. Ein Vektor (Tensor erster Stufe) ergibt in der Kontraktion mit einem Vektor einen Skalar (Tensor nullter Stufe). Die Begründung folgt aus den Orthogonalitätsrelationen für die Lorentztransformation und für den metrischen Tensor, denn es gilt

$$\sum_{\mu} x'_{\mu} y'^{\mu} = \sum_{\mu\lambda\sigma} L_{\mu\lambda} L^{\mu\sigma} x^{\lambda} y_{\sigma} = \sum_{\lambda} x^{\lambda} y_{\lambda} = \sum_{\mu\lambda\sigma} g^{\lambda\mu} g_{\lambda\sigma} x_{\mu} y^{\sigma} = \sum_{\mu} x_{\mu} y^{\mu} .$$

Diese Kontraktion transformiert sich wie eine Zahl. Mit der ko-/kontravarianten Schreibweise erkennt man dann in einer Relation wie

$$\sum_{\mu} A_{\nu\mu} x^{\mu} = y_{\nu}$$

direkt die Kontraktion eines Tensors zweiter Stufe mit einem Vektor zu einem Vektor, etc.

Der Nachweis, dass die metrische Matrix $(g_{\mu\nu})$ in der Tat ein Tensor ist, führt man in der folgenden Weise. Ausgehend von der Invarianzbedingung in differentieller Form

$$d^2 s' = d^2 s ,$$

erhält man mit der allgemeinen Form des Wegelementes

$$d^2 s = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

die Aussage

$$\begin{aligned} d^2 s' &= \sum_{\mu'\nu'} g'^{\mu'\nu'} dx'_{\mu'} dx'_{\nu'} = \sum_{\mu'\nu'\mu\nu} g'^{\mu'\nu'} L_{\mu'\mu} L_{\nu'\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \\ &\stackrel{!}{=} \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} . \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\mu'\nu'} g'^{\mu'\nu'} L_{\mu'\mu} L_{\nu'\nu} .$$

Diese Relation weist die metrische Matrix als Tensor aus.

5.4.2 Zusammenfassung der relativistischen Mechanik und Elektrodynamik in ko-/kontravarianter Schreibweise

In diesem Abschnitt werden die Grundgleichungen der relativistischen Mechanik und Elektrodynamik, die in Kap. 8 in etwas einfacherer Form erarbeitet wurden, noch einmal kurz in der formalen Sprache der Minkowskiewelt zusammengestellt.

5.4.2.1 Relativistische Mechanik. Die relativistische Verallgemeinerung der Geschwindigkeit ist die Vierergeschwindigkeit, die Ableitung des Ereignisvektors nach einer invarianten Zeit, der Eigenzeit $d\tau$. Die kontravarianten Komponenten dieses Vierervektors sind

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \longrightarrow \{v^0, v^1, v^2, v^3\} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \{-c, \mathbf{v}\}$$

und es gilt

$$\sum_{\mu} v_{\mu} v^{\mu} = -c^2 .$$

Der Viererimpuls ergibt sich aus der Vierergeschwindigkeit durch Multiplikation mit der Ruhemasse m_0

$$\begin{aligned} p^\mu = m_0 v^\mu &\longrightarrow \{p^0, p^1, p^2, p^3\} = \left\{-\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \{-m_0 c, m_0 \mathbf{v}\} . \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt des Vierimpulses mit sich selbst

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \sum_{\mu} p_{\mu} p^{\mu} = -m_0^2 c^2$$

liefert die Energie-Impuls-Relation

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2 .$$

Die relativistischen Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{dv^\mu}{d\tau} = m_0 b^\mu = K^\mu .$$

Der Vektor der Viererbeschleunigung steht senkrecht auf dem Vektor der Vierergeschwindigkeit

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = \sum_{\mu} v_{\mu} b^{\mu} = 0 ,$$

so dass aus den Raumkomponenten (notiert in kontravarianter Form)

$$(b^1, b^2, b^3) = \left(\frac{b_x}{(1 - v^2/c^2)} + \frac{1}{c^2} \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) v_x}{(1 - v^2/c^2)^2}, \dots, \dots \right)$$

und dem Vierervektor der Geschwindigkeit die Nullkomponente der Viererbeschleunigung berechnet werden könnte. Die Minkowskikraft \mathbf{K} hat die Komponenten

$$\{K^0, K^1, K^2, K^3\} = \left\{ -\frac{1}{c} \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \mathbf{F} \right\} .$$

5.4.2.2 Elektrodynamik (in **CGS-Einheiten**). Die Viererstromdichte mit den kovarianten Komponenten

$$\{j_0, j_1, j_2, j_3\} = \{c\rho, \mathbf{j}\}$$

erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu} j^{\mu} = \sum_{\mu} \partial_{\mu} j^{\mu} = 0 .$$

Wählt man für das Viererpotential mit den Komponenten

$$\{A_0, A_1, A_2, A_3\} = \{V, \mathbf{A}\}$$

die Lorentzgleichung

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu} A^{\mu} = 0 ,$$

so lauten die entkoppelten inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\square A^{\mu} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu} .$$

Die elektromagnetischen Felder werden durch den antisymmetrischen Tensor, den Feldstärketensor $[\mathbf{F}]$, mit den Elementen

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

bzw.

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$$

dargestellt. Im Detail ergibt dies (μ ist der Zeilenindex)

$$[(F_{\mu\nu})] = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$[(F^{\mu\nu})] = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} .$$

Die Elemente des Tensors $[(F^{\mu\nu})]$ gewinnt man aus den Elementen des Tensors $[(F_{\mu\nu})]$ durch

$$F^{\mu\nu} = \sum_{\kappa, \rho} g^{\mu\kappa} F_{\kappa\rho} g^{\rho\nu} .$$

Die inhomogenen Maxwellgleichungen lauten

$$\sum_{\nu} \partial_{\nu} F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^{\mu} ,$$

die homogenen können in der Form

$$\sum_{\alpha\lambda\mu\nu} \epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu} \partial_{\lambda} F_{\mu\nu} = 0$$

geschrieben werden, wobei das vierfach indizierte Levi-Civita Symbol die Eigenschaften

$$\epsilon_{\alpha\lambda\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{falls zwei Indizes gleich sind} \\ +1 & \text{für gerade Permutationen von (0123)} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen von (0123)} \end{cases}$$

hat. Die Maxwellgleichungen sind forminvariant. Sie haben in jedem Inertialsystem die gleiche Form. Invarianten aus den Feldkomponenten sind

$$I(1) = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} F_{\nu\mu} F^{\nu\mu} = \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$$

$$I(2) = \frac{1}{8} \sum_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) .$$

Zur Diskussion der Bewegung einer Ladung in einem elektromagnetischen Feld führt man den symmetrischen (elektromagnetischen) Energie-Impuls-Tensor ein

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\mu\nu} \left(F^{\alpha\rho} F^{\beta\nu} g_{\rho\nu} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) ,$$

dessen 00-Komponente die Energiedichte

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$$

und dessen 0*k*-Komponente den Poyntingvektor ergeben

$$\mathbf{S} = c \sum_{k=1}^3 T^{0k} \mathbf{e}_k = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) .$$

Die *i k*-Komponenten, die hier nicht noch einmal aufgeführt werden, entsprechen dem Maxwellschen Spannungstensor. Die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors ergibt die Minkowskikraftdichte

$$k^{\alpha} = \sum_{\mu} \partial_{\mu} T^{\mu\alpha} = \frac{1}{c} \sum_{\mu} j_{\mu} F^{\mu\alpha} .$$

Letztlich ist noch, sozusagen als Alternative, die Lagrangefunktion für eine relativistische Punktladung q in einem elektromagnetischen Feld zu notieren

$$L = -m_0 c^2 [1 - v^2/c^2]^{1/2} + \frac{q}{m_0 c} \sum_{\mu} p_{\mu} A^{\mu} .$$

A Literaturverzeichnis

Das folgende Verzeichnis enthält eine Liste der im Handel oder in den Bibliotheken verfügbaren Lehrbücher der Mathematischen Themen, die in den ‘Ergänzungen’ angesprochen werden. Die Lehrbücher sind, getrennt nach Themenbereichen, in alphabetischer Reihenfolge aufgeführt, die Reihenfolge nimmt also keinen Bezug auf das Niveau oder die Schwierigkeit der Darstellung. Werke, die (soweit den Internet-Seiten der Verlage entnehmbar) nicht mehr im Handel erhältlich sind, sind durch (*) markiert.

Distributionen

- E. Berz: ‘Verallgemeinerte Funktionen und Operatoren’ (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967)
- F. Constantinescu: ‘Distributionen und ihre Anwendungen in der Physik’ (Teubner Verlag, Stuttgart, 1974)
- M.J. Lighthill: ‘Einführung in die Theorie der Fourier-Analyse und der verallgemeinerten Funktionen’ (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1966)
- (*) L. Schwartz: ‘Théorie des Distributions’ Band I, II (Paris, 1950)

Funktionentheorie

- H. Behnke und F. Sommer: ‘Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen’ (Springer Verlag, Heidelberg, 2004)
- L. Bieberbach: ‘Einführung in die konforme Abbildung’ (de Gruyter, Berlin, 1956)
- W. Fischer, I. Lieb : ‘Funktionentheorie’ (Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2002)
- K. Jänisch: ‘Funktionentheorie’ (Springer Verlag, Heidelberg, 1999)
- (*) K. Knopp: ‘Elemente der Funktionentheorie’, ‘Funktionentheorie I’, ‘Funktionentheorie II’ (de Gruyter, Berlin, 1981)
- A. Kyrala: ‘Applied Functions of a Complex Variable’ (Wiley Interscience, New York, 1972)
- G. Moretti: ‘Functions of a Complex Variable’ (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964)
- T. Needham: ‘Anschauliche Funktionentheorie’ (Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2001)

Gewöhnliche Differentialgleichungen

- V.I. Arnold: ‘Gewöhnliche Differentialgleichungen’ (Springer Verlag, Heidelberg, 2001)
- L. Collatz: ‘Differentialgleichungen’ (Teubner Verlag, Wiesbaden, 1990)
- W. Walter: ‘Gewöhnliche Differentialgleichungen’ (Springer Verlag, Heidelberg, 2000)
- A.D. Poljanin, V.F. Sajzew: ‘Sammlung gewöhnlicher Differentialgleichungen’ (Verlag H. Deutsch, Frankfurt/M, 1996)

Partielle Differentialgleichungen

- V.I. Arnold: ‘Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen’ (Springer Verlag, Heidelberg, 2004)
- R. Courant, D. Hilbert: ‘Methoden der mathematischen Physik’ Band I und II (Springer Verlag, Berlin, 1993)
- A. Sommerfeld: ‘Partielle Differentialgleichungen in der Physik’ (Verlag H. Deutsch, Frankfurt/M, 1992)
- A. Tveito und R. Winther: ‘Einführung in partielle Differentialgleichungen’ (Springer Verlag, Heidelberg, 2002)

Spezielle Funktionen

- M. Abramovitz, I. Stegun: ‘Handbook of Mathematical Functions’ (Dover Publications, New York, 1974)
- F. Lösch ed.: ‘Jahnke, Emde, Lösch, Tafeln Höherer Funktionen’ (Teubner, Stuttgart, 1966)
- (*) W. Magnus, F. Oberhettinger: ‘Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik’ (Springer Verlag, Heidelberg, 1948)
- N. Sieber, H.J. Sebastian: ‘Spezielle Funktionen’ (Teubner Verlag, Wiesbaden, 1988)
- (*) I.N. Sneddon: ‘Spezielle Funktionen der Mathematischen Physik’ (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1963)

Lineare Räume

- H. Lenz: ‘Nichteuklidische Geometrie’ (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967)
- (*) W. Schmiedler: ‘Lineare Operatoren in Hilbertschen Räumen’ (Teubner Verlag, Wiesbaden, 1954)

Koordinatensysteme

- (*) P. Moon, D. Eberle: 'Field Theory Handbook' (Springer Verlag, Heidelberg, 1961)

Allgemeine Lehrbücher

- (*) P.K. Chattopadhyay: 'Mathematical Physics' (Wiley Publications, New York, 1990)
- P.M. Morse and H. Feshbach: 'Methods of Theoretical Physics' (2 Bde), (McGraw Hill, New York, 1953)

Weitere Literaturangaben, siehe Liste in Band 2.