G28SYST2LTI

Symbolic calculation to determine the principal planes for two thin lenses at distance a

The matrix (M) as product of the two lenses and the displacement between them

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{(f1 - a)}{f1} & a \\ \frac{-(f1 - a + f2)}{(f2 \cdot f1)} & \frac{-(a - f2)}{f2} \end{bmatrix}$$

Special case a=0, two thin lenses in contact

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-(f1 + f2)}{(f2 \cdot f1)} & 1 \end{bmatrix}$$

Principal planes with h = h, hh = h' (notation in book) and P = (-1/f2)(1-a/f1) -1/f1

$$\begin{pmatrix} 1 & hh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-(-f1 + a)}{f1} & a \\ P & \frac{-(a - f2)}{f2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{(f1 - a + hh \cdot P \cdot f1)}{f1} & \frac{(-h \cdot f2 \cdot f1 + h \cdot f2 \cdot a - h \cdot f2 \cdot hh \cdot P \cdot f1 + f1 \cdot a \cdot f2 - f1 \cdot hh \cdot a + f1 \cdot hh \cdot f2)}{(f1 \cdot f2)} \\ P & \frac{-(P \cdot h \cdot f2 + a - f2)}{f2} \end{bmatrix}$$

If the (1,1) and 2,2 elements are one

we have for hh = a/Pf1 and h=-a/Pf2

P is always -1/f

P = (-1/f2)(1-a/f1) -1/f1

$$P := \left(\frac{-1}{f2}\right)\cdot\left(1 - \frac{a}{f1}\right) - \frac{1}{f1} \qquad hh := \frac{a}{P\cdot f1} \qquad h := \frac{-a}{P\cdot f2}$$

$$M := \begin{bmatrix} \dfrac{(f1 - a + hh\cdot P\cdot f1)}{f1} & \dfrac{(-h\cdot f2\cdot f1 + h\cdot f2\cdot a - h\cdot f2\cdot hh\cdot P\cdot f1 + f1\cdot a\cdot f2 - f1\cdot hh\cdot a + f1\cdot hh\cdot f2)}{(f1\cdot f2)} \\ P & \dfrac{-(P\cdot h\cdot f2 + a - f2)}{f2} \end{bmatrix}$$

$$f1 \equiv 10 \qquad f2 \equiv 10 \qquad a \equiv 100$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix} \qquad f := \frac{-1}{P}$$

$$hh = 12.5 \qquad h = -12.5 \qquad f = -1.25$$