

R.M. Dreizler und C.S. Lüdde

Mathematische Ergänzungen I

14. Februar 2008

Springer

Berlin Heidelberg New York
Barcelona Hong Kong
London Milan Paris
Singapore Tokyo

Vorwort

Die Bezeichnung ‘Mathematische Ergänzungen’ weist darauf hin, dass hier kein vollblütiges Lehrbuch der Mathematik vorliegt. Die Notwendigkeit, in einem Grundkurs ‘Theoretische Physik’ solche Ergänzungen einzustreuen, ergab sich aus dem ‘Frankfurter Modell’. Die Vorlesungen in Theoretischer Physik beginnen mit dem ersten Semester und erfordern somit eine gewisse Einführung in die benötigten mathematischen Hilfsmittel. Einer der Vorteile, der daraus folgt, ist eine engere Verknüpfung der beiden Grundpfeiler der exakten Naturwissenschaften und die Motivation sowohl der Studenten der Physik als auch der Mathematik, sich mit dem jeweiligen ‘Nebenfach’ eingehender auseinanderzusetzen.

Der auf diese Weise entstandene Auszug aus der Mathematik hat sich als recht hilfreich erwiesen, da er die etwas mehr praxisorientierten Aspekte der Mathematik zusammenfasst. Dieser rote Faden durch die verschiedenen Klippen der Mathematik hatte das Ziel, den Studenten der Physik einen fachbezogenen Einstieg in die Mathematik zu ermöglichen. Auf der Hoffnung, dass ein derartiger Zugang zu der Mathematik von Nutzen ist, basiert der Entschluss, die ‘Ergänzungen’ neben dem eigentlichen physikalischen Text auf einer CD anzubieten.

Im Zusammenhang mit der ‘Theoretischen Mechanik’ sind es die Gebiete Analysis (die Lehre von Funktionen von reellen Veränderlichen), Lineare Algebra (die mathematische Fassung des dreidimensionalen Raumes, mathematischer Operationen in diesem Raum und die Abstraktion auf mehrdimensionale Gebilde), Vektoranalysis (sozusagen die Verheiratung dieser ersten Gebiete), gewöhnliche Differentialgleichung (die ‘Definition’ von Funktionen durch Relationen, die die Ableitungen dieser Funktionen enthalten, eine der Grundsäulen der theoretischen Physik) und eine Miniexkursion in die Welt der komplexen Zahlen und Funktionen. Gerade das letztgenannte Thema kann als warnendes Beispiel dienen: Offensichtlich sind die ca. 15 Seiten zu diesem Thema nicht ausreichend, um auch nur die Anfänge dieses reichhaltigen Gebietes zu erfassen. Auch wenn die Darstellung der vier anderen Themen um einiges ausführlicher ist, beinhaltet diese Darstellung in jedem Fall die Aufforderung, sich eingehender mit der mathematischen Literatur zu beschäftigen.

Die mathematischen Ergänzungen werden in den folgenden Bänden 2-5 mit weiteren Themen und gegebenenfalls mit einer Vertiefung der jetzigen Ausführungen fortgesetzt.

Inhaltsverzeichnis

1	Analysis I:	
	Funktionen von einer Veränderlichen	1
1.1	Der Funktionsbegriff	1
1.2	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	3
1.2.1	Naive Betrachtung	3
1.2.2	Folgen	4
1.2.3	Konvergenz von Folgen	5
1.2.4	Grenzwert einer Funktion	6
1.2.5	Stetigkeit von Funktionen	8
1.2.6	Differenzierbare Funktionen	10
1.3	Reihenentwicklungen	12
1.3.1	Taylorreihen	12
1.3.2	Numerische Reihen oder Zahlenreihen	17
1.3.3	Konvergenzkriterien	20
1.3.4	Fourierreihen	26
1.4	Integration	30
1.4.1	Uneigentliche Integrale	30
2	Differentialgleichungen I	35
2.1	Orientierung	35
2.2	Lösungsmethoden	41
2.2.1	Trennung der Variablen	41
2.2.2	Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung	47
3	Lineare Algebra	53
3.1	Vektoren	53
3.1.1	Anschauliche Vektorrechnung	53
3.1.2	Quantitative Fassung der Vektorrechnung	60
3.1.3	Ergänzungen I: n -dimensionale Vektorräume	69
3.1.4	Ergänzungen II: Schiefwinklige Koordinatensysteme und Verallgemeinerung	71
3.2	Lineare Koordinatentransformationen, Matrizen und Determinanten	75
3.2.1	Lineare Koordinatentransformationen I	75
3.2.2	Matrizen	79

3.2.3	Lineare Koordinatentransformationen II	89
3.2.4	Determinanten	100
4	Analysis II: Funktionen von mehreren Veränderlichen	109
4.1	Funktionen	109
4.1.1	Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen . . .	109
4.1.2	Funktionen von drei und mehreren unabhängigen Veränderlichen	113
4.2	Grenzwerte und Differentiation	115
4.2.1	Grenzwerte	115
4.2.2	Differentiation	117
4.2.3	Richtungsableitung und Gradient	122
4.2.4	Das totale Differential	129
4.2.5	Die Kettenregel	131
4.3	Integration	136
4.3.1	Einfache Integrale von $f(x, y)$	136
4.3.2	Doppel- und Bereichsintegrale von $f(x, y)$	142
4.3.3	Integrale mit $f(x, y, z)$	157
4.3.4	Ergänzung: Elliptische Integrale	166
5	Grundbegriffe der Vektoranalysis.	171
5.1	Vektorfelder	171
5.2	Differentiation von Vektorfeldern	173
5.2.1	Gradient, Divergenz und Rotation	174
5.3	Integration von Vektorfunktionen	177
5.3.1	Kurvenintegrale	177
5.3.2	Oberflächenintegrale mit Vektorfunktionen	183
5.3.3	Die Integralsätze von Gauß und Stokes	190
6	Differentialgleichungen II	213
6.1	Weitere Orientierung	213
6.2	Differentialgleichungen erster Ordnung	216
6.2.1	Variablentrennung und Variablentransformation	217
6.2.2	Die totale Differentialgleichung	218
6.2.3	Der integrierende Faktor	222
6.2.4	Lineare Differentialgleichung	223
6.2.5	Differentialgleichungen höheren Grades	225
6.3	Differentialgleichungen zweiter Ordnung	226
6.3.1	Lösbare implizite Differentialgleichungen	226
6.3.2	Lineare Differentialgleichungen	229
6.3.3	Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typ	231
6.4	Ergänzung: Numerische Lösungsmethoden	235

7 Komplexe Zahlen und Funktionen	243
7.1 Definitionen	243
7.2 Grundrechenarten	243
7.3 Elementare Funktionen	249
Literaturverzeichnis	255
Index	259

1 Analysis I:

Funktionen von einer Veränderlichen

Dieses Kapitel soll einen ersten Überblick über die Aspekte der Analysis von Funktionen mit einer Veränderlichen vermitteln, die für die Diskussion der Theoretischen Mechanik von Interesse sind. Zu diesen Themen gehören insbesondere Differentiation, Integration und Reihenentwicklungen von Funktionen einer reellen Variablen. Als Erstes steht jedoch eine kurze Erläuterung des Funktionsbegriffes an, der in der Mathematik recht allgemein gefasst ist.

1.1 Der Funktionsbegriff

Die Definition einer Funktion einer Veränderlichen umfasst die Aussagen:

1. Gegeben ist ein **Definitionsbereich** (Abb. 1.1). Dies ist normalerweise ein Intervall der unabhängigen Variablen, die (in Anlehnung an die Betrachtungen in der theoretischen Mechanik) mit t bezeichnet werden soll. Der Definitionsbereich kann jedoch auch aus einer Menge von isolierten Punkten bestehen.

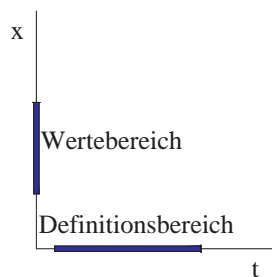


Abb. 1.1. Definitions- und Wertebereich

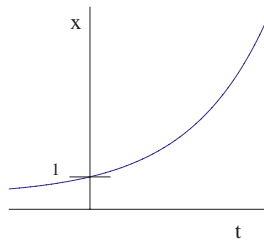
2. Als eine **Funktion** einer reellen Variablen bezeichnet man eine Vorschrift, die jeder Zahl aus dem Definitionsbereich in eindeutiger Weise eine reelle Zahl $x(t)$ zuordnet:

Funktion \implies eindeutige Zuordnungsvorschrift $x(t)$
zu jedem $t \in \text{Definitionsbereich}$.

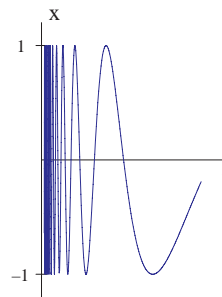
3. Die Menge der x -Werte, die man mit Hilfe der Vorschrift erhält, bezeichnet man als den **Wertebereich** der Funktion (Abb. 1.1). Die Struktur der Zuordnungsvorschrift ist dabei in keiner Weise festgelegt. Einige ausgewählte Beispiele sollen die Vielfalt der Möglichkeiten andeuten:

- (i) Der Definitionsbereich ist das Intervall $[-\infty, \infty]$, die Vorschrift lautet $x(t) = e^t$. In diesem Beispiel ist die Funktion durch eine explizite Formel vorgegeben. Die Funktion kann in einem Schaubild durch eine ‘glatte Kurve’ dargestellt werden. Der Wertebereich ist $[0, \infty]$. (Abb. 1.2a).
- (ii) In dem Definitionsbereich $(0, \infty]$ wird die Funktion $x(t) = \sin(1/t)$ betrachtet. Auch in diesem Fall besteht eine Zuordnung durch eine Formel. Der Wertebereich ist $[-1, 1]$. Diese Funktion kann jedoch nicht durch eine ‘glatte Kurve’ dargestellt werden. Je näher man an den (ausgeschlossenen) Punkt $t = 0$ kommt, desto stärker oszilliert der Funktionswert (Abb. 1.2b).

(a)

Die Funktion $x = e^t$

(b)

Die Funktion $\sin(1/t)$ **Abb. 1.2.** Schaubilder der Beispiele für Funktionen $x(t)$

- (iii) In dem Definitionsbereich $[-\infty, \infty]$ lautet die Vorschrift

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}.$$

Diese Sprungfunktion wird durch die Kurzfassung einer verbalen Erklärung definiert. Eine graphische Darstellung ist möglich. Man benötigt jedoch eine Verabredung, um die Aussagen definiert für kleiner und größer gleich zu verdeutlichen (Abb. 1.3). Ein ausgemalter ‘Punkt’ gehört zu dem jeweiligen Bereich, ein offener ‘Punkt’ nicht.

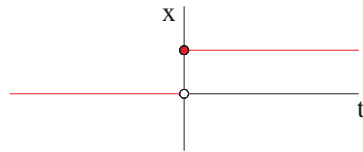


Abb. 1.3. Schaubild der Sprungfunktion

- (iv) In dem Definitionsbereich $[0, 1]$ ist eine Funktion durch die eindeutige, semiverbale Zuordnungsvorschrift

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{für rationale } t \\ 0 & \text{für irrationale } t \end{cases}.$$

gegeben. Eine graphische Darstellung in einem $x - t$ Diagramm ist nicht möglich.

Der Funktionsbegriff, der in der Mathematik eingeführt wird, deckt eine Vielfalt von Möglichkeiten ab, ist aber für den Bedarf der Physik etwas zu allgemein angelegt. In der Physik interessiert (bis auf Ausnahmefälle) eine deutlich eingeschränkte Klasse von Funktionen. Die Einschränkung orientiert sich an den Begriffen **Stetigkeit** und **Differenzierbarkeit**.

1.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Es ist immer nützlich, von abstrakten Begriffen eine anschauliche Vorstellung zu haben, auch wenn man im Endeffekt auf die streng mathematische Definition zurückgreift.

1.2.1 Naive Betrachtung

Zu dem Begriff stetige Funktionen kann man, in diesem Sinn, zunächst sagen: Stetige Funktionen kann man ‘in einem Zug’ zeichnen.

Demnach wären Funktionen wie $x = t^2$, $x = \sin t$ etc. stetige Funktionen, aber auch Funktionen, die in zwei (oder mehreren) zusammenhängenden Stücken definiert sind, wie z.B. (Abb. 1.4)

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{3-t} & \text{für } t < 1 \\ \frac{1}{1+t} & \text{für } t \geq 1 \end{cases}$$

sind stetig. Auf der anderen Seite sind die in den Beispielen 3 und 4 oben angegebenen Funktionen nicht stetig. Im Fall 3 hat die Funktion eine Sprungstelle, im Fall 4 ist sie völlig unzusammenhängend. Das Beispiel 2 ist mit der

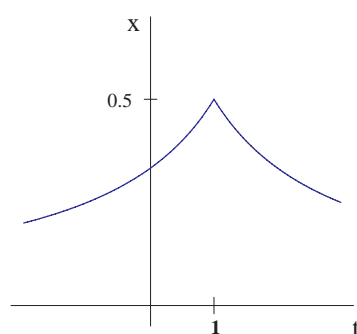


Abb. 1.4. Eine ‘stetige’ Funktion

naiven Definition nicht so ganz fassbar. Man kann den Funktionsverlauf bis in eine beliebige Nähe der Stelle $t = 0$ verfolgen. Der Aufwand wird jedoch umso größer, je näher man an diese Stellen herankommt.

Diese naive Definition ist mathematisch nicht vertretbar. Ob man eine Kurve ‘in einem Stück zeichnen’ kann, ist zum Teil eine Frage des Geschicks. Die Aufgabe ist es somit, die naive, provisorische Definition in eine streng mathematisch vertretbare umzumünzen. Man stellt bei der Erfüllung dieser Aufgabe fest, dass man zu diesem Zweck eine beachtliche Kette von Begriffen einführen und erläutern muss.

1.2.2 Folgen

Der erste Begriff, den man benötigt, ist der Begriff einer **Zahlenfolge**. Eine Zahlenfolge liegt vor, wenn man *jeder* natürlichen Zahl $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ eine bestimmte Zahl $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ zuordnet.

Einige konkrete Beispiele sind:

Die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ mit dem Bildungsgesetz $a_n = \frac{1}{n}$.

Die Folge $1, 4, 9, \dots$ mit dem Bildungsgesetz $a_n = n^2$.

Die Folge $1, 2, 1, \dots$ mit dem Bildungsgesetz $a_{2n} = 2, a_{2n-1} = 1$.

Diese Beispiele deuten auch die möglichen Verhaltensweisen von Folgen an. In dem ersten Beispiel nähern sich die Terme der Folge einem endlichen **Grenzwert** A (in dem konkreten Fall $A = 0$). In dem zweiten Beispiel wachsen die Terme mit fortschreitendem n über alle Grenzen, im dritten Beispiel oszillieren aufeinanderfolgende Terme zwischen zwei Werten. Folgen mit einem endlichen Grenzwert bezeichnet man als **konvergent**, alle Folgen, die nicht konvergent sind, als **divergent**.

Der nächste Schritt ist eine präzise Fassung der Begriffe Konvergenz und Grenzwert. Die Sprache, die man dazu benötigt, ist die sogenannte (und manchmal gefürchtete) Epsilontik.

1.2.3 Konvergenz von Folgen

Die formale Definition hört sich folgendermaßen an:

Eine Folge $\{a_n\}$ ist konvergent und hat den Grenzwert

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (A \text{ endlich}),$$

wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ angegeben werden kann, so dass $|a_\nu - A| < \varepsilon$ für alle $\nu > N(\varepsilon)$ ist.

Trotz der etwas formalen Ausdruckweise ist dieses Konvergenzkriterium eine rechentechnische Vorschrift, mit der man die Konvergenz einer Folge logisch einwandfrei überprüfen kann. Die Anschauung, die man damit verknüpfen könnte, ist die folgende: Betrachte eine naive, explizite Darstellung einer (konvergenten) Folge auf dem Zahlenstrahl. Die Forderung des Kriteriums lautet: Wenn man ein beliebiges Intervall der Größe ε um den Grenzwert A vorgibt, (die Zielsetzung ist ein beliebig kleines Intervall), so dass der Term a_N in dem Intervall liegt, so muss man nachweisen können, dass alle Terme der Folge mit $\nu > N$ auch in diesem Intervall liegen. Dies bedeutet: Man muss eine Rechenvorschrift finden, die es erlaubt, aus der Vorgabe von ε das N zu bestimmen, für das dies der Fall ist.

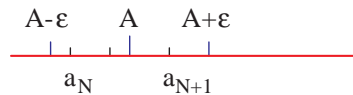


Abb. 1.5. Zur Konvergenz von Zahlenfolgen

Um die Anwendung des Kriteriums zu erläutern, kann man das folgende explizite Beispiel, eine Folge mit dem Bildungsgesetz

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

betrachten. Es ist

$$a_1 = 2 \quad a_2 = \frac{3}{2} \quad a_3 = \frac{4}{3} \quad \dots \quad a_{10} = \frac{11}{10} \quad \dots \quad a_{100} = \frac{101}{100} \quad \dots$$

Dies legt die Vermutung nahe, dass der Grenzwert der Folge 1 ist. Die Anwendung des Kriteriums beinhaltet die Schritte:

1. Betrachte die Konvergenzbedingung, in der der vermutete Grenzwert eingesetzt ist

$$\left| \frac{\nu+1}{\nu} - 1 \right| = \frac{1}{\nu} < \varepsilon .$$

2. Aus der Forderung $\nu > N$ folgt $1/N > 1/\nu$.
3. Man kann beide Aussagen unter einen Hut bringen, wenn man

$$\varepsilon \geq \frac{1}{N} > \frac{1}{\nu}$$

wählt. Diese Ungleichung ist die gesuchte Rechenvorschrift. Ganz konkret: Gibt man z.B. $\varepsilon = 1.01 \cdot 10^{-6}$ vor, so ist $N = 10^6$ gemäß der obigen Ungleichung eine mögliche Wahl und es ist sichergestellt, dass alle Terme der Folge ab $a_{1\,000\,000}$ innerhalb des gewählten Intervalles liegen. Eine entsprechende Aussage gilt für $\varepsilon = 1.01 \cdot 10^{-8}$ oder was immer man wählt.

Eine Warnung soll noch einmal ausgesprochen werden: Für eingefleischte Praktiker mag es genügen, die Terme mit $n = 10, 100, \dots$ zu berechnen und den Grenzwert abzuschätzen. Logisch einwandfrei ist jedoch ein solches Verfahren nicht. Man muss die Abschätzung in eine explizite Vorschrift der Form $N = N(\varepsilon)$ umsetzen können.

Über Konvergenz und insbesondere über Varianten von Konvergenzkriterien ließe sich noch einiges sagen (so kann man z.B. Kriterien formulieren, die es erlauben, die Konvergenz einer Folge nachzuweisen, ohne dass man den Grenzwert kennt oder vermutet), doch soll auf der Basis der Definition des Grenzwertes einer Folge zielstrebig das Konzept des Grenzwertes einer Funktion erläutert werden.

1.2.4 Grenzwert einer Funktion

Die strenge Definition lautet:

Gegeben ist eine Funktion $x(t)$ mit einem Definitionsbereich. Man betrachtet einen Punkt t_a , der als Grenzwert einer ganz im Definitionsbereich gelegenen Zahlenfolge erhalten werden kann. Die Funktion $x(t)$ hat an der Stelle t_a den Grenzwert x_a , geschrieben

$$\lim_{t \rightarrow t_a} x(t) = x_a ,$$

wenn gilt:

Für *jede* in dem Definitionsbereich liegende Zahlenfolge $t_1, t_2 \dots t_n \dots$ mit dem Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_a \quad \text{ist auch} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = x_a .$$

Auch diese etwas umständlich erscheinende Definition ist verdaulicher als sie zunächst aussieht, ein konkretes Beispiel kann helfen. Betrachte die Funktion

$$x(t) = \frac{\sin t}{t} \quad \text{für } 0 < t \leq 1,$$

die für $t \neq 0$ wohldefiniert ist. Das Schaubild der Funktion in der Nähe der Stelle $t = 0$ ist in Abb. 1.6 gezeigt.

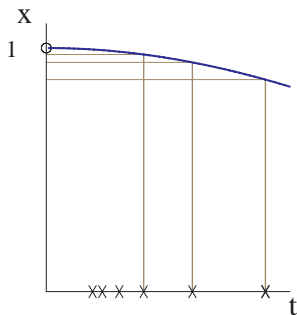


Abb. 1.6. Grenzwertbetrachtung für die Funktion $(\sin t)/t$

Die Aufgabe soll sein, den Grenzwert dieser Funktion an der Stelle $t = 0$ zu bestimmen. Man würde zu diesem Zweck folgendermaßen vorgehen:

1. Betrachte Folgen $\{t_n\}$ mit dem Grenzwert $t_a = 0$, so zum Beispiel eine Folge mit $t_n = 1/n$.
2. Betrachte die entsprechende Folge $\{x(t_n)\}$, in dem vorliegenden Beispiel also $x(t_n) = n \sin(1/n)$. Es ist dann das obige Kriterium zu benutzen, um zu zeigen, dass der Grenzwert 1 ist.
3. Der springende Punkt der Definition ist jedoch: Für *jede* ... Folge Da dies nicht so einfach durchzuführen ist, geht man die Angelegenheit in der Praxis auf andere Weise, zum Beispiel durch Vergleich mit Folgen, deren Konvergenzverhalten bekannt ist, an (siehe unten Math.Kap. 1.3.3). Es ist dann nur für die zum Vergleich benutzten Folgen (mit einem einfacheren Bildungsgesetz) die vollständige Grenzwertbetrachtung durchzuführen. Eine andere Möglichkeit ist die Formulierung einer äquivalenten Definition des Grenzwertes einer Funktion im Rahmen der Epsilonantik.

Setzt man voraus, dass derartiges geschehen ist, so hätte man festgestellt, dass für das Beispiel die Aussage

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

gilt. Eine weiterer Punkt ist jedoch zu beachten: Der Punkt $t = 0$ gehört nicht zu dem ursprünglichen Definitionsbereich. Die Funktion ist für $t = 0$

nicht definiert. Der Wert $t = 0$ ist aber der Grenzwert von ganz in dem Definitionsbereich liegenden Zahlenfolgen. Den Anforderungen der Definition ist also Genüge getan und der Grenzwert der Funktion an der Stelle $t = 0$ wurde bestimmt.

1.2.5 Stetigkeit von Funktionen

Mit Hilfe der bereitgestellten Begriffe kann man das Konzept der **Stetigkeit** präzise definieren.

Eine Funktion $x(t)$ ist an der Stelle t_a stetig, wenn der Grenzwert der Funktion an der Stelle t_a mit dem Funktionswert übereinstimmt (und beide endlich sind).

Zur Erläuterung dieser Definition kann man ein weiteres naives Beispiel betrachten. Definiere die folgende Funktion

$$x(t) = \begin{cases} \sin t & \text{für } t < 0 \\ 1.5 & \text{für } t = 0 \\ \sin t & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$

Gegen diese Definition ist formaljuristisch nichts einzuwenden. Die graphische Darstellung in der Nähe von $t = 0$ ist in Abb. 1.7 gezeigt. Man stellt fest:

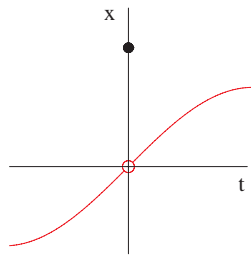


Abb. 1.7. Eine offensichtlich unstetige Funktion

Der Grenzwert der Funktion an der Stelle $t = 0$ ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0$$

(unabhängig davon, ob man von links oder von rechts an den Grenzpunkt herankommt). Der Funktionswert ist aber $x(0) = 1.5$ (siehe Definition). Funktionswert und Grenzwert stimmen also nicht überein. Die Funktion ist an der Stelle $t = 0$ nicht stetig.

1.2.5.1 Unstetigkeitsstellen. Es ist vielleicht nützlich, mögliche Unstetigkeitsstellen noch einmal in direkter Weise aufzuzählen. An einer Stelle t_0 kann es folgende Unstetigkeitsstellen geben:

a) Isolierte Sprungstellen. In dem in Abb. 1.8a abgebildeten Beispiel sind

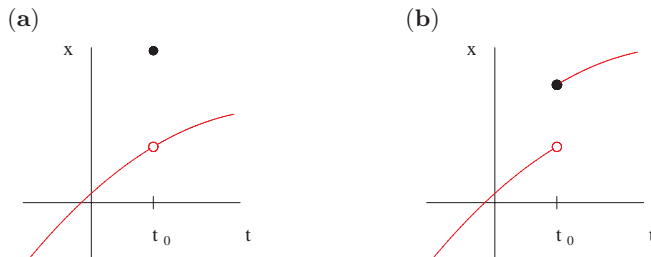


Abb. 1.8. Isolierte Sprungstellen

(wie in Abb. 1.7) Funktionswert und Grenzwerte verschieden, in Abb. 1.8b stimmt der linksseitige Grenzwert nicht mit dem (rechtsseitigen) Funktionswert überein.

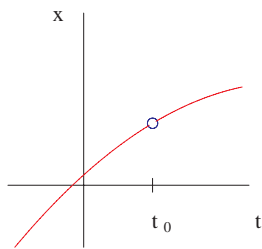


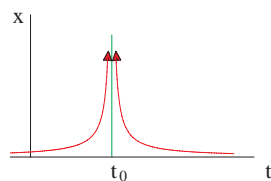
Abb. 1.9. Funktion mit einer Punktlücke im Definitionsbereich

- b) Die Funktion ist, wie in Abb. 1.9 angedeutet, für $t = t_0$ nicht definiert.
- c) $x(t_0)$ ist $\pm\infty$. Da ein Grenzwert endlich sein soll (siehe Definition), liegt Divergenz (in anderen Worten kein Grenzwert) vor (Abb. 1.10a).
- d) Eine besondere Variante sind unendliche Sprungstellen (Abb. 1.10b).

Von Interesse ist auch der Begriff 'stetig in einem Intervall'. Dies bedeutet, dass die Funktion in jedem Punkt eines Intervalles stetig sein soll.

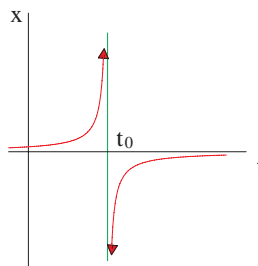
Die obigen Ausführungen deuten an, welcher konzeptuelle Aufwand erforderlich ist, um einen anschaulich einfachen Begriff wie 'eine zusammenhängende Kurve' logisch einwandfrei und mathematisch streng zu fassen. In der Physik ist oft eine anschaulichere Betrachtungsweise durchaus üblich. Es ist

(a)



Unendlichkeitsstelle

(b)



unendliche Sprungstelle

Abb. 1.10. Funktionen mit Unendlichkeitsstellen

aber in jedem Fall notwendig, dass man die vorsichtigeren Betrachtungsweise im Auge behält.

1.2.6 Differenzierbare Funktionen

Die Festlegung dieses Begriffes ist nunmehr einfacher, da es ebenfalls die Diskussion von Grenzwerten betrifft. Die formale Definition lautet

Eine Funktion $x(t)$ ist an der Stelle t differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

existiert und eindeutig ist.

In Worten bedeutet dies, dass eine Funktion $x(t)$ an der Stelle t differenzierbar ist, wenn ein eindeutiger Differentialquotient gebildet werden kann. In ganz anschaulicher Weise könnte man auch sagen: Wenn man an der Stelle t eine eindeutige Tangente an die Kurve, die die Funktion darstellt, zeichnen kann.

Eine Funktion kann stetig sein, muss aber nicht notwendigerweise differenzierbar sein. Zur Erläuterung dieser Aussage genügt ein Beispiel. Die oben definierte Funktion

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{3-t} & \text{für } t < 1 \\ \frac{1}{1+t} & \text{für } t \geq 1, \end{cases}$$

ist an der Stelle $t = 1$ stetig. Die Ableitungen für die beiden Funktionsäste sind

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{links}} = \frac{1}{(3-t)^2} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{rechts}} = -\frac{1}{(1+t)^2}.$$

In dem Punkt $t = 1$ ist (wie man auch ohne Rechnung der graphischen Darstellung (Abb. 1.11) entnimmt) die Ableitung nicht eindeutig.

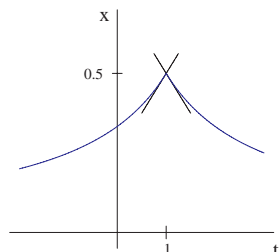


Abb. 1.11. Eine stetige, an der Stelle $t = 1$ nicht differenzierbare Funktion

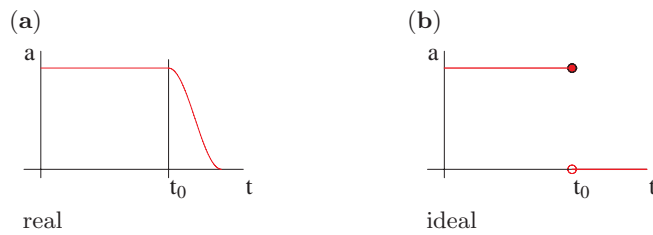
Die Umkehrung der obigen Aussage lautet jedoch: Ist eine Funktion an einer Stelle t_0 differenzierbar, so ist sie an dieser Stelle auch stetig. Der Grund ist: Bei der Bildung des Grenzwertes des Differenzenquotienten setzt man voraus, dass

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} x(t_0 + \Delta t) = x(t_0)$$

ist, d.h. dass Grenzwert und Funktionswert übereinstimmen. Wäre dies nicht der Fall, so wäre der Differentialquotient nicht definiert.

Eine mögliche Klassifikation von Funktionen kann man demnach folgendermaßen zum Ausdruck bringen: Die stetigen Funktionen sind eine Untermenge aller möglichen Funktionen. Differenzierbare Funktionen sind eine Untermenge der stetigen Funktionen.

Der Bezug zu den kinematischen Fragestellungen, die in Buch.Kap. 2 diskutiert werden, ist offensichtlich: Funktionen, die die Position $x(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Massenpunktes beschreiben sollen, müssen differenzierbar sein. Man wäre sonst nicht in der Lage, eine Beschleunigung zu definieren. Funktionen, die die Beschleunigung $a(t)$ darstellen, müssen wenigstens stetig sein. Sollten trotz dieser Aussage unstetige Funktionen zur Charakterisierung der Beschleunigung herangezogen werden, ist dies immer eine Idealisierung. Wenn man zum Beispiel einen Massenpunkt für eine bestimmte Zeit einer konstanten Beschleunigung aussetzt, nach dem Zeitpunkt t_0 die Beschleunigung in irgendeiner Form recht plötzlich abschaltet, so würde der Abschaltprozess, unabhängig von Details (wie in Abb. 1.12a angedeutet), durch eine stetige Funktion beschrieben. In vielen Fällen ist es jedoch

**Abb. 1.12.** Abschaltprozesse

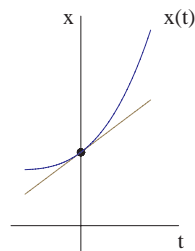
(rechentechnisch) einfacher und keine schlechte Näherung an die Realität, einen schnellen Abschaltprozess durch eine Sprungfunktion zu beschreiben (Abb. 1.12b).

1.3 Reihenentwicklungen

Das nächste Thema, Reihenentwicklungen, ist in der mathematischen und der physikalischen Praxis von großer Bedeutung. Einige Funktionen werden im Endeffekt durch ihre Reihenentwicklung definiert. Oft gewinnt man bei der Diskussion von physikalischen Problemen detailliertere Einblicke, wenn man auf die Reihenentwicklung der dabei auftretenden Funktionen zurückgreift. Der Standardtyp von Reihenentwicklungen von Funktionen ist unter der Bezeichnung Taylor- oder Potenzreihen bekannt.

1.3.1 Taylorreihen

Zur Motivation dieses Themas kann man sich vorstellen, dass man eine Funktion $x(t)$ (siehe Abb. 1.13) in der Umgebung der Stelle $t = 0$ näherungsweise angeben möchte. Die einfachste Näherung ist die Näherung durch eine Gera-

**Abb. 1.13.** Einfache Näherung von $x(t)$ an der Stelle $t = 0$

de. Man ersetzt die Kurve durch die Tangente an die Kurve¹ in dem Punkt $t = 0$

$$x(t) \approx x(0) + \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} t = x(0) + x'(0)t .$$

Der Achsenabschnitt der Geraden ist $x(0)$, $x'(0)$ ist deren Steigung. Diese Näherung ist im Allgemeinen umso schlechter, je weiter man von dem Punkt $t = 0$ entfernt ist. Eine Möglichkeit, die Näherung zu verbessern, besteht darin Kurven höherer und höherer Ordnung heranzuziehen

$$x(t) \approx a_0 + a_1 t \quad + a_2 t^2 \quad + a_3 t^3 \quad + \dots + a_N t^N .$$

Gerade Parabel kub. Parabel

In Abkürzung schreibt man dies

$$x(t) \approx \sum_{n=0}^N a_n t^n .$$

Dies wäre die Näherung der Funktion durch ein Polynom N -ten Grades. In der Hoffnung, dass die Funktion immer besser dargestellt wird, wenn man immer weitere Terme hinzunimmt, gelangt man in dem Grenzfall $N \rightarrow \infty$ zu dem **Potenzreihenansatz**

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + a_N t^N + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n . \end{aligned}$$

Dieser Ansatz wirft einige Fragen auf:

- (i) Wie bestimmt man die Koeffizienten a_n der Potenzreihe für eine vorgegebene Funktion $x(t)$?

Neben dieser mehr praktischen Frage muss man jedoch auch die prinzipiellere Frage im Auge behalten:

- (ii) Beinhaltet der Grenzfall $N \rightarrow \infty$ irgendwelche Tücken? (Wird die Näherung wirklich besser, so dass im Endeffekt das Gleichheitszeichen gerechtfertigt ist?)

Die praktische Frage lässt sich relativ einfach beantworten: Wenn man voraussetzt, dass die Funktion $x(t)$ beliebig oft differenzierbar ist, kann man die Frage (i) wie folgt angehen. Setze in dem Ansatz $t = 0$ und erhalte $a_0 = x(0)$. Differenziere den Ansatz einmal

$$x'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots + n a_n t^{n-1} + \dots ,$$

setze in diesem Ausdruck $t = 0$ und erhalte $a_1 = x'(0)$. Differenziere den Ansatz zweimal

¹ Ableitungen werden mit $\frac{dx}{dt} = x'(t)$, bzw. $\frac{d^n x}{dt^n} = x^{(n)}(t)$ bezeichnet.

$$x''(t) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3t + \dots + n(n-1)a_nt^{n-2} + \dots$$

und erhalte

$$2a_2 = x''(0) .$$

Wiederholt man den Prozess noch einmal

$$x'''(t) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4t + \dots + n(n-1)(n-2)a_nt^{n-3} + \dots$$

mit dem Resultat

$$3!a_3 = x'''(0) ,$$

so übersieht man (spätestens) an dieser Stelle das allgemeine Ergebnis

$$a_n = \frac{1}{n!} x^{(n)}(0) .$$

Man kann dieses Ergebnis auch mit einem strengen Induktionsschluss untermauern, doch soll auf diese Feinheit verzichtet werden. Die Potenzreihe lautet somit

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{1}{2}x''(0)t^2 + \dots$$

oder in der üblichen Summenschreibweise

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(0)}{n!} t^n .$$

Eine solche Reihe bezeichnet man als die **Taylorentwicklung** der Funktion $x(t)$ um die Stelle $t = 0$.

Die obige Betrachtung hat leider einen kleinen Haken. Der Reihenansatz wurde bedenkenlos gliedweise differenziert. Für ein Polynom ist dies ohne Zweifel erlaubt. Ob dies auch für eine unendliche Reihe erlaubt ist, ist genau der Inhalt der zweiten Frage, die oben gestellt wurde. Man kann diese Frage etwas umformulieren: Geht man von der Taylorentwicklung aus, so stellt sich die Frage, inwieweit das Gleichheitszeichen gerechtfertigt werden kann. Zumindest aber sollte man fragen: Für welchen Bereich von t -Werten kann man das Gleichheitszeichen garantieren?

Die Antwort auf diese Frage wird noch einige Zeit zurückgestellt. Zunächst sollen, ohne Rücksicht auf eventuelle Feinheiten, einige Beispiele für solche Taylorreihen betrachtet werden.

1.3.1.1 Die wichtigsten Taylorreihen.

Beispiel 1: Für die Taylorreihe der Exponentialfunktion $x(t) = e^t$ erhält man wegen

$$x^{(n)}(t) = e^t \quad \text{und} \quad x^{(n)}(0) = 1$$

die Entwicklung

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}t^n.$$

Die Reihe, die bei der Diskussion des freien Falls mit Reibung benutzt wurde (Buch.Kap. 2), erhält man durch die Ersetzung $t \rightarrow -kt$

$$e^{-kt} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^n}{n!} t^n.$$

Beispiel 2: Für $x(t) = \sin t$ erhält man die Ableitungen

$$x(t) = \sin t \quad x'(t) = \cos t \quad x''(t) = -\sin t$$

$$x'''(t) = -\cos t \quad x^{(4)}(t) = \sin t \quad \dots$$

bzw.

$$x(0) = 0 \quad x'(0) = 1 \quad x''(0) = 0 \quad x'''(0) = -1 \quad x^{(4)}(0) = 0 \quad \dots$$

Alle geraden Potenzen der Reihenentwicklung verschwinden. Dies ist ein Ausdruck der Tatsache, dass $\sin t$ eine ungerade Funktion ist. Es bleibt

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \dots$$

Diese Andeutung der Reihe kann man in der Form

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

zusammenfassen.

Beispiel 3: Es folgt ein Beispiel, das aufzeigt, dass die Berechnung der geforderten Ableitungen sehr mühselig sein kann. Für die Funktion $x(t) = \tan t$ findet man die Ableitungen

$$x(t) = \tan t \quad x(0) = 0$$

$$x'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} \quad x'(0) = 1$$

$$x''(t) = \frac{2 \sin t}{\cos^3 t} \quad x''(0) = 0$$

$$x'''(t) = \frac{2(1 + 3 \sin^2 t)}{\cos^4 t} \quad x'''(0) = 2.$$

Von dieser Stelle an wird die Rechnung immer unübersichtlicher (man versuche es!). Die weiteren Terme in der Entwicklung des Tangens

$$\tan t = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 + \dots$$

werden auch aus den Entwicklungen von $\sin t$ und $\cos t$ gewonnen, wobei jedoch eine Reihe von Regeln zu beachten ist. In vielen Fällen dieser Art

gewinnt man die gesuchte Taylorreihe nicht über die direkte Auswertung der höheren Ableitungen, sondern man versucht, eine Sammlung von Rechenregeln für Reihen zu entwickeln, um die Reihen für komplizierte Funktionen aus den Reihen für einfachere Funktionen zu konstruieren.

Beispiel 4: Oft benutzt wird die sogenannte binomische Reihe. Sie entspricht der Taylorreihe der Funktion

$$x(t) = [1 + t]^\alpha \quad \alpha \text{ beliebig, reell.}$$

Die Berechnung der Koeffizienten ist elementar, erfordert aber etwas Schreibarbeit

$$\begin{aligned} x(t) &= [1 + t]^\alpha & x(0) &= 1 \\ x'(t) &= \alpha [1 + t]^{\alpha-1} & x'(0) &= \alpha \\ x''(t) &= \alpha(\alpha-1)[1 + t]^{\alpha-2} & x''(0) &= \alpha(\alpha-1) \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

Die n -te Ableitung ist

$$x^{(n)}(t) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) [1 + t]^{\alpha-n},$$

so dass sich für $t = 0$ der Wert $x^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)$ ergibt. Man erhält somit

$$\begin{aligned} (1+t)^\alpha &= 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} t^n. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten werden in dem binomischen Symbol zusammengefasst

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!}.$$

Mit Hilfe dieser Reihe kann man viele, nützliche Formeln der Physik gewinnen, so zum Beispiel für den typischen, relativistischen Ausdruck

$$\left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Für kleine Werte von v/c kann man sich auf die Betrachtung der ersten Terme der Reihe beschränken. Mit den Ersetzungen $\alpha \rightarrow -1/2$, $t \rightarrow -(v/c)^2$ erhält man

$$\begin{aligned} \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} &\approx 1 + (-)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + (-)^4 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \left(\left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^2 + \dots \\ &\approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c} \right)^4 + \dots \end{aligned}$$

Derartige Näherungsformeln werden (in der Physik) an vielen Stellen eingesetzt.

Ein vielbenutzter Spezialfall der binomischen Reihe ist die **geometrische Reihe**. Sie entspricht $\alpha = -1$ und $t = -z$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n .$$

Falls α eine positive ganze Zahl ist ($\alpha = m$), bricht die binomische Reihe ab und man erhält die bekannte **binomische Formel**

$$(1+t)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} t^n .$$

Für ganze Zahlen $\alpha = m$ kann man die Binomialkoeffizienten auch durch Fakultäten ausdrücken

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \quad m \geq n \quad (0! = 1) .$$

Anstatt nach Approximationen einer Funktion $x(t)$ in der Nähe der Stelle $t = 0$ kann man auch nach Approximationen in der Nähe einer beliebigen Stelle t_0 fragen. Die Taylorentwicklung einer Funktion um die Stelle t_0 lautet

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t - t_0)^n .$$

Differenziert man diesen Ansatz beliebig oft (unter der Voraussetzung, dass dies möglich ist), so erhält man (bei gleicher Einschränkung wie in dem Spezialfall $t_0 = 0$)

$$b_n = \frac{1}{n!} x^{(n)}(t_0) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right|_{t=t_0} .$$

Die Beantwortung der Frage, ob die angegebenen Potenzreihen die jeweiligen Funktionen *wirklich* darstellen, ist eine etwas langwierigere Angelegenheit. Sie wird erst unter der Überschrift ‘Konvergenzkriterien’ (wenigstens andeutungsweise) beantwortet werden. Der nächste Schritt ist die Betrachtung von numerischen Reihen, ein Typ von Reihen, der in der Physik und der Mathematik auch in eigener Sache von Interesse ist.

1.3.2 Numerische Reihen oder Zahlenreihen

Diese werden hier generisch mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

bezeichnet. Die einzelnen Terme bestehen aus Zahlen. Man erhält numerische Reihen auf der einen Seite, indem man in einer Potenzreihe einen bestimmten Zahlenwert für die Variable t einsetzt, so etwa

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

Numerische Reihen können jedoch auch auf andere Weise gewonnen werden.

Einige Standardbeispiele für numerische Reihen sind die folgenden Reihen:

Die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots,$$

die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

und die Leibnizsche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

1.3.2.1 Zur Berechnung der Summenwerte. Man kann versuchen, den Summenwert einer numerischen Reihe in direkter Weise oder mit Geschick zu berechnen. Tritt dabei ein eindeutiger, endlicher Summenwert auf, so bezeichnet man die Reihe als konvergent. Hat man keinen eindeutigen, endlichen Summenwert, so ist die Reihe divergent. Direkte Summation ist nicht unbedingt die beste Methode, die Konvergenz einer numerischen Reihe abzuschätzen. Zur Untersuchung der Konvergenz von Zahlenreihen definiert man die folgenden Größen

$$S_0 = u_0$$

$$S_1 = u_0 + u_1$$

$$\vdots$$

$$S_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k = \sum_{n=0}^k u_n.$$

Diese Größen bezeichnet man als Partial- oder Teilsummen. Die Partialsummen bilden eine Folge

$$S_0, S_1, S_2, \dots, S_k, \dots$$

Man stellt fest, dass die Reihe einen eindeutigen, endlichen Summenwert hat, wenn die Folge der Partialsummen gegen einen endlichen Grenzwert

$S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ konvergiert. Durch diesen einfachen Kunstgriff wird die Betrachtung der Konvergenz von numerischen Reihen auf die Betrachtung der Konvergenz von Folgen (siehe Math.Kap. 1.2.3) zurückgeführt. Gelingt es, einen geschlossenen Ausdruck für die Partialsummen S_k anzugeben, so ist die Konvergenzuntersuchung relativ einfach. Leider ist dies nur in wenigen Fällen möglich.

Zur Illustration der direkten Auswertung von Partialsummen folgen einige Rechenbeispiele.

Beispiel 1: Die Reihe für die Zahl $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

k	2	4	6	8	10
S_k	2.5	2.708...	2.71806...	2.71828...	2.7182818...

Die Partialsummen dieser Reihe konvergieren recht schnell. Die Partialsumme S_{10} gibt den exakten Summenwert $S = e = 2.718281828...$ bis auf 9 Stellen hinter dem Komma wieder.

Beispiel 2: Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

k	2	4	6	10	20	30
S_k	0.5	0.58333...	0.61666...	0.64563...	0.66877...	0.67675...

Diese Reihe konvergiert sehr langsam. Der Summenwert ist bekannt:

$$S = \ln 2 = 0.693147 \dots$$

Beispiel 3: Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

k	2	10	20	30	40
S_k	1.5	2.929	3.598	3.995	4.279

(gerundete Werte).

Es sieht so aus, als ob die Folge der Partialsummen konvergiert, wenn auch recht langsam. Diese Vermutung ist jedoch falsch. Der Summenwert der harmonischen Reihe ist ∞ . Die Reihe ist divergent. Zum Beweis dieser Aussage vergleicht man die Reihe

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} v_n = & 1 + \frac{1}{2} & + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ & + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}_{8 \text{ Terme}} + \underbrace{\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32}}_{16 \text{ Terme}} + \dots \end{aligned}$$

mit der harmonischen Reihe

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = & 1 + \frac{1}{2} & + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} & + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\ & + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32} + \dots \end{aligned}$$

Es gilt $v_n \leq u_n$. Jeder Term der harmonischen Reihe ist größer oder gleich dem entsprechenden Term der Vergleichsreihe. Die Vergleichsreihe kann man jedoch in einfacher Weise zusammenfassen

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} v_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Da $\sum v_n < \sum u_n$ ist, divergiert auch die harmonische Reihe.

Die Lehre, die man aus diesem Beispiel ziehen kann, lautet: Hat man keinen geschlossenen Ausdruck für die Partialsummen zur Verfügung, so ist die Abschätzung der Konvergenz auf der Basis der direkten Berechnung von Partialsummen mit Vorsicht zu betrachten. Es ist notwendig, allgemeinere Kriterien zur Überprüfung der Konvergenz aufzustellen.

1.3.3 Konvergenzkriterien

1.3.3.1 Konvergenzkriterien für Zahlenreihen. Der Ausgangspunkt für die Diskussion von **Konvergenzkriterien** für Zahlenreihen, ist das **Majorantenkriterium**. Dieses entspricht der Umkehrung der Argumentation, die soeben zur Diskussion der harmonischen Reihe eingesetzt wurde. Das Kriterium lautet

Falls $\sum v_n$ konvergiert und $0 \leq u_n \leq v_n$ für alle $n > N$ ist, so ist $\sum u_n$ konvergent.

Der formale Beweis, der hier nicht ausgeführt wird, ergibt sich, wenn man die allgemeinen Konvergenzkriterien für Folgen auf die Betrachtung der Folge von Partialsummen überträgt.

Die komplementäre Aussage, die zuvor benutzt wurde, lautet

Ist $\sum v_n$ divergent und $0 \leq u_n \leq v_n$ für alle $n > N$, so ist $\sum u_n$ divergent.

Betonen sollte man noch die Bedingung *für alle $n > N$* : Eine beliebige, aber endliche Anzahl von Termen der Reihe $\sum u_n$ darf größer (im ersten Fall) bzw. kleiner (im zweiten Fall) sein als die entsprechenden Terme der Vergleichsreihe.

Es ist nun möglich, für jede vorgegebene Reihe $\sum u_n$ eine geeignete Vergleichsreihe zu suchen, deren Konvergenz/Divergenz bekannt ist. Ökonomischer ist es jedoch, zum Vergleich einige Standardreihen heranzuziehen, mit

deren Hilfe man handlichere Kriterien gewinnen kann. Eine geeignete Vergleichsreihe ist die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1 + t + t^2 + \dots,$$

da man für diese Reihe einen expliziten Ausdruck für die Partialsummen angeben kann. Diesen Ausdruck gewinnt man wie folgt. Es ist

$$\begin{aligned} S_k &= 1 + t + \dots + t^k \\ tS_k &= t + \dots + t^k + t^{k+1}. \end{aligned}$$

Subtraktion ergibt

$$S_k(1 - t) = 1 - t^{k+1}$$

oder

$$S_k = \frac{1 - t^{k+1}}{1 - t} \quad \text{falls } (1 - t) \neq 0.$$

Für $|t| \geq 1$ ist die Reihe divergent, für $|t| < 1$ folgt jedoch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - t^{k+1})}{1 - t} = \frac{1}{1 - t}.$$

Durch Vergleich mit der geometrischen Reihe erhält man das (für die weitere Diskussion nützliche) **Wurzelkriterium**. Es lautet

Die Reihe $\sum u_n$ ist konvergent, wenn es eine Zahl q mit $0 < q < 1$ gibt, so dass für alle $n > N$ gilt

$$\sqrt[n]{|u_n|} \leq q < 1.$$

Der Beweis des Kriteriums wird folgendermaßen geführt: Man schreibt die Bedingung des Theorems in der Form

$$|u_n| \leq q^n \quad \text{für } n > N.$$

Die Partialsumme

$$S_{N+p} = S_N + u_{N+1} + \dots + u_{N+p}$$

kann durch die Beträge majorisiert werden

$$|S_{N+p}| \leq |S_N| + |u_{N+1}| + \dots + |u_{N+p}|.$$

Man benutzt dann die Voraussetzung des Theorems zur weiteren Majorisierung

$$|S_{N+p}| \leq |S_N| + q^{N+1}(1 + \dots + q^p)$$

und fasst den Zusatzterm zusammen

$$|S_{N+p}| = |S_N| + q^{N+1} \left[\frac{1 - q^{p+1}}{1 - q} \right] .$$

Im Grenzfall $p \rightarrow \infty$ folgt dann, falls $q < 1$ ist

$$|S| \leq |S_N| + \frac{q^{N+1}}{1 - q} .$$

Dieser Ausdruck ist endlich.

Auch in diesem Fall lautet der Kommentar: Wieder ist nur verlangt, dass alle Terme mit $n > N$ (N eine endliche Zahl) die Bedingung erfüllen. Voraussetzung ist natürlich auch, dass alle Terme mit $n \leq N$ endlich sind.

In ähnlicher Weise kann man das verwandte **Quotientenkriterium** beweisen. Die Formulierung ist analog, nur ist die Bedingung durch

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq q < 1 \quad \text{für alle } n > N$$

zu ersetzen.

Die komplementäre Aussage zu dem Majorantenkriterium erlaubt es, entsprechende Kriterien für Divergenz anzugeben

$$\text{Ist } \sqrt[n]{|u_n|} > 1 \text{ bzw. } \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1, \text{ so ist die Reihe divergent.}$$

Die Anwendung dieser Kriterien führt jedoch nicht immer zum Ziel. Sie sind unter Umständen nicht ‘fein’ genug.

Für den Fall der Reihe für die Zahl e findet man mit dem Quotientenkriterium

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{1}{n+1} \right| < 1 \quad (\text{für } n > 0) .$$

Die Reihe konvergiert also. Insbesondere gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \longrightarrow 0 < 1 .$$

Im Fall der harmonischen Reihe (ob alternierend oder nicht) ergibt das Kriterium

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{n}{n+1} \right| .$$

Dies ist kleiner als 1 für n endlich, im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ gilt jedoch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) = 1.$$

Es liegt genau der in den Kriterien ausgeschlossene Fall, dass der Quotient weder kleiner noch größer als 1 ist, vor. Mit dem Quotientenkriterium kann man also nicht schließen, ob die Reihe konvergent (wie die alternierende) oder divergent (wie die direkte harmonische Reihe) ist.

Die Kriterien ergeben somit notwendige Bedingungen für Konvergenz oder Divergenz. Sie stellen jedoch keine hinreichende Bedingung dar. Zu bemerken ist noch:

1. Es existieren Varianten und Verfeinerungen der Konvergenzkriterien, für die jedoch auf die Mathematikvorlesungen verwiesen werden muss.
2. Die Konvergenzkriterien stellen kein Mittel zur Berechnung der Summenwerte dar. Dies ist unter Umständen nach wie vor harte Arbeit. Die Kriterien ergeben jedoch einen Hinweis, ob sich die Mühe lohnt.

1.3.3.2 Konvergenzkriterien für Taylorreihen. Im Rahmen der Diskussion von Potenzreihen ist noch die Frage offen, unter welchen Bedingungen eine Taylorreihe die zugehörige Funktion wirklich darstellt. Die Antwort auf diese Frage ergibt sich über die Betrachtung der Konvergenz von Potenzreihen. Die Grundaussage zu der Konvergenz von Potenzreihen lautet:

Man nennt eine Potenzreihe $\sum_n a_n t^n$ in einem Intervall $|t| < r$ konvergent, falls sie für jeden t -Wert aus dem Intervall konvergiert.

Damit ist die Betrachtung der Konvergenz von Potenzreihen auf die Betrachtung der Konvergenz von numerischen Reihen (für jeden t -Wert aus dem Intervall) zurückgeführt. Das größte Intervall um die Stelle $t = 0$, in dem die Potenzreihe noch konvergiert, sei durch $|t| < R$ gegeben. Die Zahl R bezeichnet man als den **Konvergenzradius** (siehe Abb. 1.14).

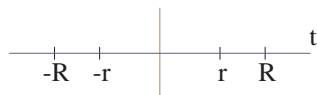


Abb. 1.14. Illustration des Konvergenzradius

Zur Bestimmung des Konvergenzradius von Potenzreihen kann man sich entweder auf das Wurzel- oder das Quotientenkriterium stützen. Im Fall des Wurzelkriteriums folgt aus der Bedingung

$$\sqrt[n]{|a_n t^n|} < 1$$

die Aussage

$$|t| < \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \quad \text{und insbesondere} \quad |t| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = R.$$

Im Fall des Quotientenkriterium ergibt

$$\left| \frac{a_{n+1} t^{n+1}}{a_n t^n} \right| < 1 \quad \text{die Aussage} \quad |t| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = R.$$

Es gelten also, unter Einbeziehung der komplementären Divergenzkriterien, die Aussagen:

Ist $|t| < R$, so konvergiert die Potenzreihe. Ist $|t| > R$, so liegt Divergenz vor. Für $|t| = R$ kann man keine Aussage machen.

Für die Potenzreihen aus Math.Kap. 1.3.1 kann man die folgenden Konvergenzaussagen festhalten: Für die Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \quad \text{ist der Konvergenzradius} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} |n+1| = \infty.$$

Die Reihe ergibt für jeden (noch so großen) t -Wert mit $t < \infty$ einen endlichen Summenwert. Dies mag etwas erstaunlich erscheinen, wenn man z.B. die Exponentialreihe mit $t = 100$ betrachtet. Die Reihe beginnt mit

$$e^{100} = 1 + 10^2 + \frac{10^4}{2} + \frac{10^6}{6} + \frac{10^8}{24} + \frac{10^{10}}{120} + \dots$$

Trotz allem Anschein nehmen die einzelnen Beiträge wieder ab. Der größte Beitrag ist von der Größenordnung $10^{200}/100! \approx 10^{42}$ und der Summenwert ist $e^{100} \approx 3 \cdot 10^{43}$.

Für die Sinusreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} \quad \text{gilt entsprechend} \quad R = \infty,$$

während sich für die binomische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n \quad \text{der Konvergenzradius zu} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1$$

ergibt (vergleiche die Diskussion der Konvergenz der geometrischen Reihe).

1.3.3.3 Begründung der Taylorformel. Die Frage nach der Gültigkeit des Gleichheitszeichens bei der Potenzreihenentwicklung kann nun folgendermaßen beantwortet werden. Die obigen Ausführungen besagen, dass eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ für jedes t innerhalb des Konvergenzintervalls einen endlichen Summenwert ergibt, die Summenfunktion $x(t)$. Diese Aussage ist unabhängig von der Weise, in der die Koeffizienten gewonnen wurden. Der springende Punkt ist dann das Theorem (etwas abgekürzt formuliert)

Eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion darf innerhalb des Konvergenzradius gliedweise differenziert werden.

Der etwas längliche Beweis besteht in den Schritten²

- (i) Zeige, dass die Reihe $\varphi(t) = \sum_n n a_n t^{n-1}$ den gleichen Konvergenzradius hat wie die Reihe $x(t) = \sum a_n t^n$.
- (ii) Zeige, dass $\varphi(t)$ die Ableitung von $x(t)$ ist, d.h. $\varphi(t) = dx/dt$.

Dieses Theorem liefert die Begründung der Taylorformel

$$a_n = \frac{1}{n!} x^{(n)}(0) .$$

Da diese auf gliedweiser Differentiation beruht, ist gemäß dem Theorem sichergestellt, dass für alle $|t|$ innerhalb des Konvergenzradius R die Funktion x durch die Reihe dargestellt wird.

Zum Abschluss dieser komprimierten Diskussion der Reihenentwicklungen folgen noch drei Bemerkungen:

1. Die Aussagen über die Reihenentwicklung um die Stelle $t = 0$, kann man sinngemäß auf den Fall einer Entwicklung um die Stelle t_0 übertragen. So ist z.B. der Konvergenzradius für die Reihe

$$x(t) = \sum_n b_n (t - t_0)^n = \sum_n \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n$$

durch

$$|t - t_0| < R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|b_n|}}$$

bestimmt.

2. Mit konvergenten Potenzreihen kann man fast wie mit Zahlen rechnen. So gilt z.B. für die Multiplikation: Ist $x(t) = \sum_n a_n t^n$ und $y(t) = \sum_n b_n t^n$, so gilt innerhalb des gemeinsamen Konvergenzintervalls

² Bezüglich Details siehe Literaturliste.

$$x(t)y(t) = \left(\sum_n a_n t^n \right) \left(\sum_n b_n t^n \right) = \sum_n c_n t^n .$$

Diese Rechenregeln ermöglichen es, Reihenentwicklungen für Funktionen zu gewinnen, für die eine direkte Anwendung der Taylorformel etwas mühselig ist. Die oben diskutierte Reihe für die Tangens-Funktion gewinnt man z.B. zweckmäßigerweise über den Ansatz

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \sum_n c_n t^n .$$

Man sortiert dies in der Form

$$\sin t = \left(\sum_n c_n t^n \right) \cos t ,$$

setzt die Reihenentwicklungen für $\sin t$ und $\cos t$ ein und multipliziert die beiden Reihen auf der rechten Seite Term für Term. Durch Vergleich der Faktoren von t^n gewinnt man Rekursionsformeln für die Koeffizienten c_n . Da $\cos t$ für $|t| = \pi/2$ den Wert Null hat, ist der Konvergenzradius der \tan -Reihe $R(\tan) = \pi/2$.

3. Ein weiterer Typ von Reihen, der in der Physik von Interesse ist, sind Funktionenreihen

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = f_0(t) + f_1(t) + \dots .$$

Hier bestehen die einzelnen Terme aus Funktionen, die auf irgendeine Weise den natürlichen Zahlen zugeordnet sind. Ein Beispiel für diesen Typ von Reihen sind die **Fourierreihen**, die im nächsten Abschnitt etwas eingehender besprochen werden. Es ist offensichtlich, dass Funktionenreihen das allgemeine Konzept darstellen. Wählt man speziell $f_n(t) = a_n t^n$, so erhält man die Potenzreihen als Spezialfall. Setzt man entweder in einer Funktionenreihe oder in einer Potenzreihe einen speziellen Wert für die Variable t ein, so erhält man eine numerische Reihe.

1.3.4 Fourierreihen

Eine periodische Funktion mit der Periode $2L$ wird durch die Funktionalgleichung

$$f(x) = f(x + 2L)$$

charakterisiert. Eine Fourierreihe vermittelt eine Darstellung solcher Funktionen durch eine Linearkombination von Sinus- und Kosinusfunktionen. Die Standardform ist

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} .$$

Die geforderte Periodizität wird durch die Relationen

$$\begin{aligned} \cos \frac{n\pi(x+2L)}{L} &= \cos \left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi \right) = \cos \frac{n\pi x}{L} \\ \sin \frac{n\pi(x+2L)}{L} &= \sin \left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi \right) = \sin \frac{n\pi x}{L} \end{aligned}$$

garantiert. Diese Darstellung findet Anwendung bei der Beschreibung und der Analyse von räumlich und/oder zeitlich periodischen Vorgängen wie z.B. Schwingungen oder Wellenausbreitung.

Eine alternative Darstellung der gleichen Reihe im Komplexen ist oft einfacher zu handhaben. Man benutzt zur Umschreibung die Aussagen (siehe Math.Kap. 7.3)

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

und erhält

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{(in\pi x)/L} .$$

Die Koeffizienten der beiden Darstellungen sind durch

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \text{mit} \quad a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n \quad \text{und} \quad b_0 = 0$$

verknüpft.

1.3.4.1 Zur Konvergenz von Fourierreihen. Vor der Diskussionsphase, z.B. der Berechnung der Entwicklungskoeffizienten einer vorgegebenen periodischen Funktion $f(x)$, ist zunächst wieder die Frage der Konvergenz der Reihen zu betrachten. Man kann im ersten Schritt versuchen, die periodische Funktion durch Partialsummen $S_N(x)$ mit

$$S_N(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^N B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

zu approximieren. Das folgende Argument zeigt, dass eine Näherung mit

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \\ B_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} , \end{aligned}$$

wobei $f(x)$ die vorgegebene periodische Funktion darstellt, diese periodische Funktion im Mittel am besten approximiert. Approximation im Mittel bedeutet Minimierung des mittleren Fehlerquadrates

$$FQ = \int_{-L}^L dx (f(x) - S_N(x))^2 .$$

Hier ist die Fourierdarstellung von $f(x)$ einzusetzen. Zur Berechnung dieses Integrales benötigt man die ‘Orthogonalitätsrelationen’ der trigonometrischen Funktionen. Diese lauten

$$\int_{-L}^L dx \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} = \int_{-L}^L dx \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} = L \delta_{n,m} ,$$

sowie

$$\int_{-L}^L dx \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} = 0 .$$

Man erhält diese Relationen durch

- die Substitution $y = (\pi x)/L$ mit $dx = (L dy)/\pi$ und den Grenzen $-\pi$ und π , sowie
- Umformung der Integranden mit Hilfe der Additionstheoreme wie z.B.

$$\sin(ny) \sin(my) = \frac{1}{2} (\cos(n-m)y - \cos(n+m)y)$$

- und den Grundintegralen (M ganzzahlig)

$$\int_{-\pi}^{\pi} dy \cos My = 2\pi \delta_{M,0} \quad \int_{-\pi}^{\pi} dy \sin My = 0 .$$

Die Auswertung des mittleren Fehlerquadrates ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} FQ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x)^2 - \sum_{n=1}^N a_n^2 - \sum_{n=1}^N b_n^2 - \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n - A_n)^2 \\ &\quad + \sum_{n=1}^N (b_n - B_n)^2 + \frac{(a_0 - A_0)^2}{2} , \end{aligned}$$

also einen Ausdruck, der offensichtlich minimal ist, wenn die letzten drei positiven Terme verschwinden, also wenn $a_n = A_n$ und $b_n = B_n$ für $(n \leq N)$ ist. Eine Partialsumme S_N mit den Koeffizienten A_n und B_n , zu berechnen gemäß den oben angegebenen Integralen, approximiert für jeden Wert von N die vorgegebene periodische Funktion $f(x)$ im Mittel am besten. Da das mittlere Fehlerquadrat per Definition positiv definit ist, folgt aus der obigen Argumentation die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^N a_n^2 + \sum_{n=1}^N b_n^2 + \frac{a_0^2}{2} \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x)^2 \quad \text{für alle } N , \quad (1.1)$$

die als die **Besselsche Ungleichung** bekannt ist. Falls $\int_{-L}^L dx f(x)^2 < \infty$ ist, ist diese Ungleichung auch für $N \rightarrow \infty$ gültig.

Der Übergang von den Partialsummen $S_N(x)$ zu der Fourierreihe

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

mittels $N \rightarrow \infty$, wobei die Koeffizienten durch

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

gegeben sind, erfordert eine aufwendigere Diskussion. Es muss gezeigt werden, dass die Funktion in dem Grundintervall³ absolut und gleichmäßig konvergiert. Nur dann kann man die Koeffizienten der Reihe durch die angedeutete gliedweise Integration berechnen. Gleichmäßige Konvergenz beinhaltet, in der Sprache der Epsilonantik, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Partialsumme $S_N(x)$ gibt, so dass $|f(x) - S_N(x)| < \epsilon$ für alle x ist. Unter dieser Voraussetzung stellt die Fourierreihe in allen (endlich vielen) Stetigkeitsbereichen die Funktion dar. Liegt an der Stelle x eine Sprungstelle vor, so ergibt die Reihe den Wert

$$\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f(x + \epsilon) + f(x - \epsilon)) .$$

1.3.4.2 Ein explizites Beispiel. Die Berechnung der Fourierdarstellung periodischer Funktionen (bei gegebener Konvergenz) beinhaltet die Auswertung der Integrale $a_n = A_n$ und $b_n = B_n$ für alle n . Da die Sinusfunktion eine ungerade und die Kosinusfunktion eine gerade Funktion ist, verschwinden für alle geraden (ungeraden) Funktionen $f(x)$ die Koeffizienten b_n (a_n). Für die Sägezahnfunktion (siehe Buch.Kap. 4.2.4)

$$f(x) = x \quad \text{für} \quad -L \leq x \leq L$$

sind also nur die Koeffizienten

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx x \sin \frac{n\pi x}{L}$$

zu berechnen. Das Ergebnis ist

$$b_n = \frac{1}{L} \left[\left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} - \frac{Lx}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_{-L}^L = (-1)^{(n+1)} \frac{2L}{\pi n} .$$

Der letzte Diskussionspunkt unter dem Stichwort ‘Analysis I’ ist die Integration.

³ Alternativ: in jedem abgeschlossenen Teilintervall, falls Unstetigkeitsstellen, wie z.B. Sprungstellen, vorliegen.

1.4 Integration

Es soll hier nur ein Punkt im Hinblick auf spätere Verwendung angesprochen werden, uneigentliche Integrale. Für die normale Integration wird auf die Schulmathematik verwiesen. Die Themen, über die man Bescheid wissen sollte, sind

1. Definition des bestimmten (Riemannschen) Integrals.
2. Definition des unbestimmten Integrals (Stammfunktion).
3. Integrationsregeln.
4. Integrationsmethoden, insbesondere
 - partielle Integration
 - Substitutionsregeln
 - Partialbruchzerlegung.

Eine praktische Integrationsmethode ist auch der Hinweis auf die ausführlichen Sammlungen von unbestimmten und bestimmten Integralen⁴, wie z.B.

Gröbner-Hofreiter, Integraltafeln, Band I, II

Gradsteyn-Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products, Vol I, II.

1.4.1 Uneigentliche Integrale

Normalerweise diskutiert man ein bestimmtes Integral

$$I(a, b) = \int_a^b x(t) \, dt$$

unter den folgenden Voraussetzungen

- a) Das Integrationsintervall ist endlich.
- b) Der Integrand ist beschränkt: $|x(t)| < M < \infty$ für $a \leq t \leq b$.

Man kann sich von diesen Einschränkungen unter bestimmten Voraussetzungen lösen. Anstelle der Vorstellung der allgemeinen Thematik sollen diese Voraussetzungen anhand von Beispielen erläutert werden.

1.4.1.1 Unendliche Integrationsintervalle. Beispiel 1: Bei dem Integral

$$I = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \, dt \quad \lambda > 0$$

ist der Integrationsbereich ein unendliches Intervall. Durch Betrachtung einer graphischen Darstellung (Abb. 1.15) ist es nicht einfach, abzuschätzen, ob die Fläche unter der abklingenden Exponentialfunktion einen endlichen Wert hat oder nicht. Eine vorsichtige Definition dieses Typs von Integranden lautet

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x(t) \, dt .$$

⁴ Siehe Literaturliste

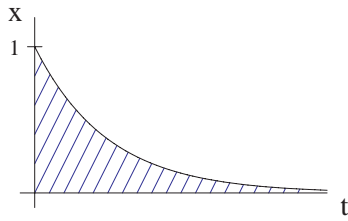


Abb. 1.15. Andeutung des Integrals $\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt$

Berechnet man dieses Integral für $x(t) = e^{-\lambda t}$, so findet man

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda b} - 1) \right].$$

Für $\lambda > 0$ gilt $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-\lambda b} = 0$ und man gewinnt den Grenzwert $I = 1/\lambda$.

Beispiel 2: Der Integrand des Integrals

$$I = \int_0^\infty \cos t \, dt$$

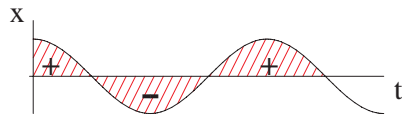


Abb. 1.16. Ein uneigentliches Integral mit $\cos t$

liefert abwechselnd positive und negative Beiträge (Abb. 1.16). Man könnte also auch in diesem Fall erwarten, dass das Integral einen endlichen (Grenz)-Wert hat. Geht man gemäß der obigen Definition des uneigentlichen Integrals vor, so findet man

$$\begin{aligned} I &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos t \, dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [\sin b - 0] \end{aligned}$$

und stellt fest: Der geforderte Grenzwert ist nicht definiert. Dieses uneigentliche Integral existiert nicht.

Das Fazit dieser Betrachtung lautet: Uneigentliche Integrale mit einem unendlichen Integrationsintervall (Typ 1) lassen sich mit Hilfe von Grenzwertbetrachtungen mathematisch sauber definieren. Aufgrund der Grenzwertbetrachtungen benutzt man die folgende Bezeichnung

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x(t) \, dt \longrightarrow \begin{cases} \text{endlich} & (\text{Konvergenz}) \\ \text{existiert nicht} & (\text{Divergenz}) \\ \infty & (\text{Divergenz}) \end{cases} .$$

1.4.1.2 Unbeschränkte Integranden. Bei uneigentlichen Integralen vom Typ 2 ist der Integrand nicht beschränkt. Das erste Beispiel zu diesem Fall ist

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \quad \alpha > 0, \alpha \neq 1 .$$

Der Integrand hat ungefähr den in Abb. 1.17 gezeigten Verlauf. Der Integrand

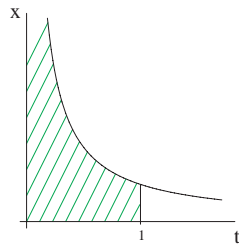


Abb. 1.17. Die Funktion $1/t^\alpha$

ist an der unteren Grenze nicht beschränkt. Auch solche Fälle sind mit einer etwas vorsichtigeren Grenzwertbetrachtung zu behandeln. Für das Beispiel betrachtet man den Grenzwert

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t^\alpha}$$

und erhält das Ergebnis

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(1-\alpha)} t^{1-\alpha} \right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(1-\alpha)} [1 - \varepsilon^{1-\alpha}] \right] .$$

Es ist dann zu untersuchen, für welche Werte von α der Grenzwert existiert. Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-\alpha} \begin{cases} = 0 & \text{für } 1-\alpha > 0 \\ \rightarrow \infty & \text{für } 1-\alpha < 0 \end{cases}$$

und es folgt somit:

Für $0 < \alpha < 1$ ist das uneigentliche Integral konvergent und hat den (Grenz)wert

$$I = \frac{1}{1-\alpha} .$$

Für $\alpha > 1$ ist das uneigentliche Integral divergent. Das Ergebnis kann durch einen Vergleich der Funktionen $x(t) = t^{-1/2}$ und $x(t) = t^{-2}$ verdeutlicht werden (siehe Abb. 1.18).

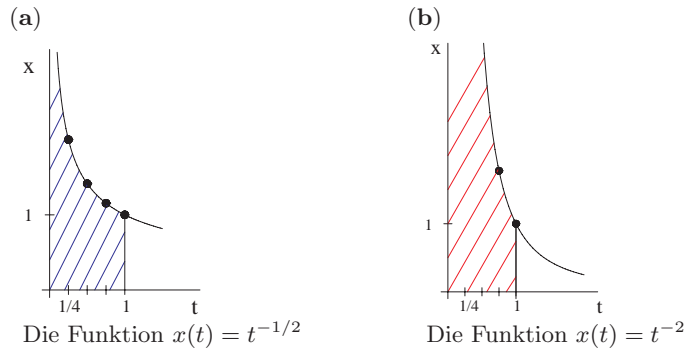


Abb. 1.18. Vergleich der Integranden

In dem ersten Fall ist der ‘Anstieg’ der Funktion bei $t \rightarrow 0$ noch flach genug, so dass der Grenzwert endlich ist. In dem zweiten Fall ist der ‘Anstieg’ zu stark.

1.4.1.3 Cauchy-Hauptwerte. Die Situation, dass eine singuläre Stelle des Integranden im Innenbereich des Integrationsintervalles liegt (siehe Abb. 1.19), behandelt man in ähnlicher Weise. Man spart zunächst ein

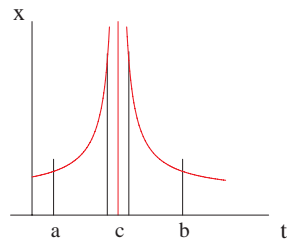


Abb. 1.19. Singuläre Stellen im Integrationsintervall

‘kleines Intervall’ um die singuläre Stelle aus und betrachtet die entsprechenden Grenzwerte

$$\int_a^b x(t) dt = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} x(t) dt + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b x(t) dt .$$

Es ergeben sich drei Möglichkeiten:

1. Die beiden Grenzwerte existieren, wenn man ε_1 und ε_2 unabhängig voneinander gegen Null gehen lässt. Das uneigentliche Integral ist dann konvergent.
2. Ein endlicher Grenzwert existiert nur, wenn man $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ setzt und sich dann sozusagen gleichmäßig der singulären Stelle von beiden Seiten nähert

$$\int_a^b x(t) \, dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} x(t) \, dt + \int_{c+\varepsilon}^b x(t) \, dt \right\} .$$

Falls dieser Grenzwert existiert, bezeichnet man ihn als den **Cauchy-Hauptwert** des uneigentlichen Integrales.

3. Existiert auch der Cauchy-Hauptwert nicht, so ist das uneigentliche Integral divergent.

Ein Beispiel für ein Integral, das einen Cauchy-Hauptwert besitzt, ist

$$\int_{-a}^b \frac{dt}{t} \quad a, b > 0 .$$

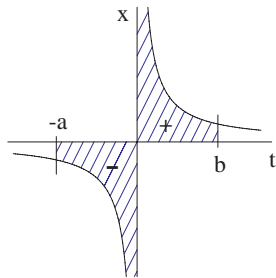


Abb. 1.20. Zum Cauchy-Hauptwertintegral

Die zu bestimmende Fläche ist in Abb. 1.20 angedeutet. Die allgemeine Grenzwertbetrachtung erfordert

$$I = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (\ln \varepsilon_1 - \ln a) + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} (\ln b - \ln \varepsilon_2) .$$

Die einzelnen Grenzwerte existieren nicht

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon \rightarrow -\infty .$$

Betrachtet man jedoch den Fall $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, so findet man

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\ln b - \ln a + \ln \varepsilon - \ln \varepsilon\} = \ln b - \ln a .$$

Der Cauchy-Hauptwert dieses uneigentlichen Integrales existiert.

2 Differentialgleichungen I

In diesem Kapitel wird ein erster Überblick zu dem Thema Differentialgleichungen angeboten und es werden Lösungsmethoden für die einfachsten gewöhnlichen Differentialgleichungen vorgestellt. Das Thema Differentialgleichungen wird in Math.Kap. 6 weiter ausgebaut, obschon auch in diesem Kapitel dieses weitgesteckte Thema nicht vollständig abgedeckt werden kann.

2.1 Orientierung

In dem zweiten Kapitel des Physiktextes (Buch.Kap. 2) wurden drei relativ einfache Differentialgleichungen betrachtet¹

$$\begin{array}{lll} v'(t) = a(t) & \text{bzw.} & x''(t) = a(t) \\ v'(t) = a(x(t)) & \text{bzw.} & x''(t) = a(x(t)) \\ v'(t) = a(v(t)) & \text{bzw.} & x''(t) = a(v(t)) . \end{array}$$

Die funktionale Form der Beschleunigung a ist jeweils vorgegeben, einmal als Funktion der Zeit, dann als Funktion des Ortes und der Geschwindigkeit. Gesucht werden in allen Fällen die Funktionen $x(t)$ und $v(t)$. Da in den drei Bestimmungsgleichungen die Ableitungen der gesuchten Funktionen auftreten, liegen Differentialgleichungen vor. Falls die gesuchte Lösung nur von einer unabhängigen Variablen (hier im Anklang an die Mechanik die Variable t) abhängt, spricht man von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Der erste Begriff, der zu erläutern ist, ist der Begriff der Ordnung einer Differentialgleichung:

Als Ordnung einer Differentialgleichung bezeichnet man die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung.

¹ Ableitungen bis zur zweiten Ordnung werden in den Mathematischen Ergänzungen im Gegensatz zu der in der Mechanik (und im Physiktext benutzten) üblichen Notation mit Punkten auf der abhängigen Variablen durch Striche gekennzeichnet.

Somit sind die oben angedeuteten Differentialgleichungen von erster Ordnung für die Funktion $v(t)$ (linke Spalte) beziehungsweise von zweiter Ordnung für die Funktion $x(t)$. (Verabredet man, dass in einer Differentialgleichung nur die gesuchte Funktion und deren Ableitungen sowie die unabhängige Variable auftreten sollen, so ist $v' = a(x)$ keine echte Differentialgleichung für $v(t)$.)

Die drei einfacheren Fälle sind Spezialfälle der allgemeineren Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion $x(t)$

$$x''(t) = a(t, x, x') .$$

Bezieht man sich auf die Mechanik, so kann die Beschleunigung als Funktion der Zeit, des Ortes und der Geschwindigkeit vorgegeben werden. Explizite Beispiele für die Lösung von allgemeineren Typen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden erst in Math.Kap. 6.3 vorgestellt.

Die generelle Aussage

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung enthält n Integrationskonstanten

kann man direkt illustrieren. Ein vollständiger Beweis wäre langwieriger. Die Aussage ‘allgemeine Lösung’ beinhaltet, dass keine weiteren Bedingungen an die Lösung gestellt werden. Der Begriff **Integrationskonstante** wird sofort klar werden.

Die Illustration besteht darin, dass man von möglichen Lösungen einer Differentialgleichung, die 1, 2, 3, ... Konstante enthalten, ausgeht und zeigt, dass die Funktionen in jedem Fall auf eine Differentialgleichung von erster, zweiter, dritter, ... Ordnung führen. Die Behauptung ergibt sich durch Umkehrung dieser Überlegungen. Die erste Vorgabe lautet

$$v = v(t, c) ,$$

wobei t die unabhängige Variable und c ein Parameter ist. Für jeden Wert von c soll eine eindeutige Kurve in einem v - t Diagramm vorliegen. Variiert man den Parameter c , so erhält man eine Kurvenschar. Beispiele sind:

- Eine Gesamtheit parallelverschobener, kubischer Parabel wird durch die Funktion

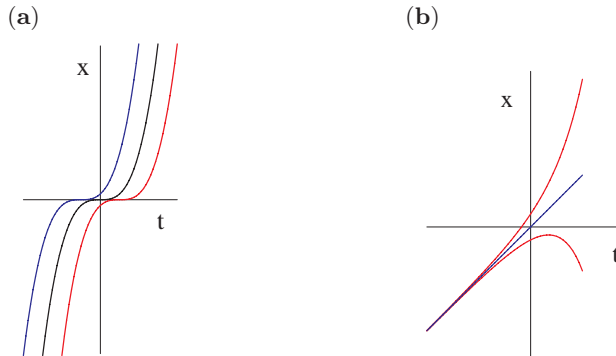
$$v = (t + c)^3$$

dargestellt. Die einzelnen Parabeln schneiden die t -Achse in dem Punkt $t = -c$ (siehe Abb. 2.1 a).

- Die Funktion

$$v = t + c e^t$$

entspricht für $c = 0$ der Winkelhalbierenden im ersten und dritten Quadranten des v - t Diagrammes. Für $c > 0$ erhält man ‘gedrehte’ Exponentialfunktionen, die sich im Grenzfall $t \rightarrow -\infty$ von oben an die Winkelhalbierende anschmiegen, für $c < 0$ entsprechende Kurven unterhalb der Winkelhalbierenden. (siehe Abb. 2.1 b).



Die Funktion $v = (t + c)^3$

Die Funktion $v = t + e^t$

Abb. 2.1. Einparametrische Kurvenscharen

Aus den Gleichungen

$$v = v(t, c) \quad \text{und} \quad v' = \frac{dv(t, c)}{dt} = a(t, c)$$

kann der Parameter c eliminiert werden:

- Für das erste Beispiel ergibt dies

$$(t + c) = v^{1/3}, \quad v' = 3(t + c)^2 \longrightarrow v' = 3v^{2/3},$$

- für das zweite Beispiel entsprechend

$$v = t + c e^t, \quad v' = 1 + c e^t \longrightarrow v' - v = 1 - t.$$

In beiden Fällen erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion $v(t)$. Das allgemeinere Argument lautet: Löse eine der zwei Gleichungen nach c auf

$$c = c(v, t) \quad \text{oder} \quad c = \bar{c}(v', t)$$

und setze die Auflösung in die jeweils andere Gleichung ein. Das Resultat ist z.B. eine Aussage der Form $v = v(t, \bar{c}(v', t))$ oder allgemeiner $F(t, v, v') = 0$.

Dies bezeichnet man als eine implizite Differentialgleichung erster Ordnung.

Aus diesen Überlegungen kann man den Schluss ziehen: Jede einparametrische Kurvenschar wird durch eine Differentialgleichung erster Ordnung charakterisiert. In Umkehrung dieser Aussage kann man auch feststellen: Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung ist eine einparametrische Kurvenschar. Den Parameter nennt man dann die Integrationskonstante. Einige Beispiele zur weiteren Übung sind:

Kurvenschar	Gleichung	Differentialgleichung
Geradenschar	$x = ct$	$tx' = x$
Parabelschar	$x = t^2 + c$	$x' = 2t$
Parabelschar	$x = ct^2$	$tx' = 2x$
Kreisschar	$(t - c)^2 + x^2 = c^2$	$2txx' = x^2 - t^2$

Die Geraden der Schar verlaufen durch den Koordinatenursprung, die Parabeln der ersten Schar sind parallelverschoben, die der zweiten Schar gehen ebenfalls durch den Koordinatenursprung und unterscheiden sich durch Öffnung und Orientierung (nach oben bzw. nach unten). Die Mittelpunkte der Kreise liegen auf der t -Achse und die Kreise berühren sich alle im Koordinatenursprung. Das erste und das dritte Beispiel zeigen, dass eine ‘geringfügige’ Änderung der Differentialgleichung zu einer deutlichen Veränderung des Charakters der Kurvenschar führen kann.

Eine zweiparametrische Kurvenschar wird durch eine Gleichung der Form

$$x = x(t, c_1, c_2)$$

mit den Parametern c_1 und c_2 beschrieben. Ein Beispiel ist die Funktion $x = c_1(t + c_2)^3$. Betrachtet man den Fall $c_2 = 0$ und variiert c_1 , so erhält man ein Büschel von kubischen Parabeln durch den Ursprung des x - t Diagrammes (Abb. 2.2). Variiert man nun den Parameter c_2 , so findet man derartige Büschel durch jeden Punkt der t -Achse.

Zur Elimination der zwei Parameter benötigt man nun drei Gleichungen. Diese sind

$$x = x(t, c_1, c_2), \quad x' = \frac{dx}{dt} = v(t, c_1, c_2), \quad x'' = \frac{dv}{dt} = a(t, c_1, c_2).$$

Die entsprechenden Aussagen für das Beispiel sind

$$x = c_1(t + c_2)^3, \quad x' = 3c_1(t + c_2)^2, \quad x'' = 6c_1(t + c_2).$$

Zur Elimination kann man z.B. die Verhältnisse

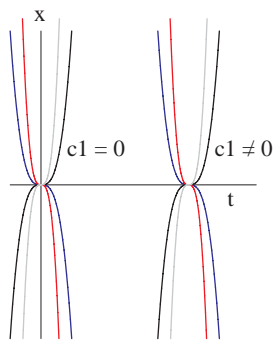


Abb. 2.2. Die zweiparametrische Kurvenschar $x = c_1(t + c_2)^3$

$$\frac{x}{x'} = \frac{1}{3}(t + c_2) \quad \text{und} \quad \frac{x'}{x''} = \frac{1}{2}(t + c_2)$$

bilden und erhält nach einfacher Sortierung die (nicht unbedingt einfache) Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$xx'' = \frac{2}{3}x'^2.$$

Die entsprechende allgemeine Diskussion liefert die Aussage: Durch Elimination der beiden Parameter, ausgehend von einer Gleichung der Form $x = x(t, c_1, c_2)$, gewinnt man eine implizite Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(t, x, x', x'') = 0$. Auch hier folgen noch drei Beispiele zur Übung:

Kurvenschar	Gleichung	Differentialgleichung
Geradenschar	$x = c_1 t + c_2$	$x'' = 0$
Parabel/Geradenschar	$x = c_1 t + c_2 t^2$	$(t^2 x''/2) - tx' + x = 0$
Ellipsenschar	$(t/c_1)^2 + (x/c_2)^2 = 1$	$txx'' + t(x')^2 - xx' = 0$

Die Argumentation kann fortgesetzt werden. Am Ende steht die Aussage: Eine n -parametrische Kurvenschar wird durch eine Differentialgleichung n -ter Ordnung charakterisiert, oder in Umkehrung: Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung enthält n (Integrations-)konstanten.

Die Kenntnis der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung (geometrisch gesprochen der gesamten Kurvenschar) ist zwar nützlich, in vielen Fällen interessiert jedoch nur eine partikuläre Lösung (eine der Kurven aus der Schar). Zur Auswahl einer **Partikulärlösung** hat man im Fall einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei Möglichkeiten.

- Ausgehend von $x = x(t, c_1, c_2)$ wählt man aus der Lösungsschar eine bestimmte Kurve durch Vorgabe der Funktionswerte an zwei Stellen (t_1, x_1) und (t_2, x_2) aus. Aus den Gleichungen

$$x_1 = x(t_1, c_1, c_2) \quad x_2 = x(t_2, c_1, c_2)$$

kann man (falls eine derartige Lösung existiert) die Parameter c_1, c_2 bestimmen und somit eine der Kurven auswählen. Diese Methode zur Bestimmung der Partikulärlösung bezeichnet man als Randwertaufgabe.

Betrachtet man als Beispiel $x = c_1(t + c_2)^3$ mit $(t_1, x_1) = (0, 0)$ und $(t_2, x_2) = (1, 1)$, so sind die Gleichungen

$$c_1 c_2^3 = 0 \quad c_1(1 + c_2)^3 = 1.$$

Die Lösung ist $c_1 = 1, c_2 = 0$, die ausgewählte Kurve somit die Gerade $x = t$.

- Eine zweite Möglichkeit zur Auswahl einer bestimmten Kurve ist die Vorgabe des Funktionswertes x_0 und der ersten Ableitung v_0 an der Stelle t_0 . In diesem Fall bestimmt man die Parameter aus den Gleichungen

$$x_0 = x(t_0, c_1, c_2) \quad v_0 = x'(t_0, c_1, c_2).$$

Man spricht dann von einem Anfangswertproblem. Für das Beispiel $x = c_1(t + c_2)^3$ mit den Vorgaben $t_0 = 0, x_0 = 1, v_0 = 1$ sind die Gleichungen $c_1 c_2^3 = 1$ und $3c_1 c_2^2 = 1$. Daraus ergibt sich $c_1 = 1/27$ sowie $c_2 = 3$ und die spezielle Kurve $x = (1/27)(t + 3)^3$.

Es ist jedoch anzumerken, dass nicht jede Vorgabe zur Festlegung einer Partikulärlösung führt. Betrachtet man, der Einfachheit wegen, die Differentialgleichung erster Ordnung $tx' = 2x$ mit der Forderung $x(0) = 0$, so stellt man fest, dass alle Lösungen diese Forderung erfüllen. Keine der Lösungen für die durch die Differentialgleichung $2txx' - x^2 + t^2 = 0$ charakterisierte Kreisschar kann der Bedingung $x(0) = 3$ genügen.

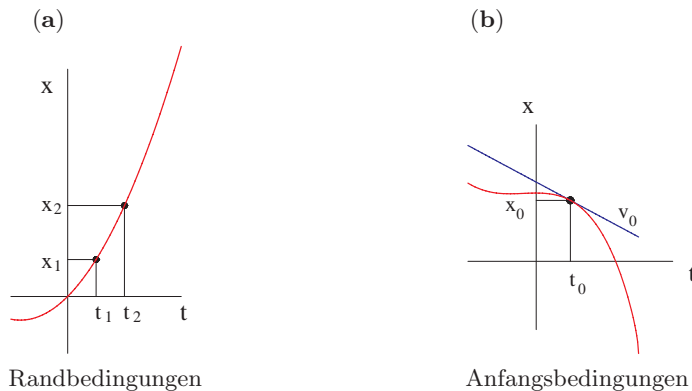


Abb. 2.3. Bestimmung von Partikulärlösungen

In der theoretischen Mechanik stellen Bewegungsprobleme Anfangswertprobleme dar: Position und Geschwindigkeit sind zu einem bestimmten Zeit-

punkt (der Anfangszeit) vorgegeben. Randwertprobleme treten in der Mechanik z.B. auf, wenn man die Schwingungen (die ‘Eigenschwingungen’) einer eingespannten Saite diskutiert. Da die Variablen in diesem Fall Auslenkung als Funktion von Zeit und Position entlang der Saite (also zwei unabhängige Variable) sind, steht eine **partielle Differentialgleichung** zur Diskussion, die erst im Zusammenhang mit dem Thema Elektrodynamik (Band 2) eingehender diskutiert wird.

Bevor man, im nächsten Abschnitt, die Frage nach Lösungsmethoden für Differentialgleichungen aufgreift, müsste man der Frage nachgehen: Welchen Anforderungen muss eine Differentialgleichung genügen, damit sicher gestellt werden kann, dass eine Lösung existiert und dass diese Lösung eindeutig ist? Konkret, für die explizite Differentialgleichung zweiter Ordnung $x'' = a(t, x, x')$ würde man fragen, welchen Anforderungen muss die Funktion $a(t, x, x')$ genügen, damit Existenz und Eindeutigkeit der Lösung garantiert werden kann? Zur Beantwortung dieser Fragen wird auf die einschlägige mathematische Literatur verwiesen. Zu betonen ist jedoch, dass die Frage nach Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen keine müßige Übung ist. Bevor man sich um die explizite Lösung einer etwas schwierigeren Differentialgleichung bemüht, ist es beruhigend zu wissen, dass die Lösung existiert.

2.2 Lösungsmethoden

Eine allgemeine Lösungsmethode, mit der man jedwede gewöhnliche Differentialgleichung lösen kann, existiert nicht. Diese Aussage gilt auch, wenn man jedwede durch zweite Ordnung ersetzt. Man kann jedoch bestimmte Klassen von Differentialgleichungen benennen, die jeweils nach einem bestimmten Muster analytisch gelöst werden können. Differentialgleichungen, die nicht in diese Klassen eingeordnet werden können, müssen mit numerischen Lösungsmethoden behandelt werden. Hier werden zunächst die einfachsten analytischen Lösungsmethoden vorgestellt.

2.2.1 Trennung der Variablen

Das Muster dieser Lösungsmethode liefert die Differentialgleichung erster Ordnung mit der Form

$$g(t) + f(x) x' = 0 \quad \text{mit} \quad x(t_0) = x_0 ,$$

beziehungsweise

$$g(t) + f(x) \frac{dx}{dt} = 0 .$$

Ein naiver, wenn auch nicht korrekter Zugang zur Lösung der vorgegebenen Differentialgleichung erster Ordnung ist der folgende: Man fasse ‘Zähler’

und ‘Nenner’ des Differentialquotienten als unabhängige, kleine (vornehmer infinitesimale) Größe auf und schreibe

$$g(t) dt = -f(x) dx .$$

Die beiden Variablen sind getrennt. Bildet man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung korrespondierende Integrale, die die Anfangsbedingung beinhalten, so erhält man²

$$\int_{t_0}^t d\tilde{t} g(\tilde{t}) = - \int_{x_0}^x d\tilde{x} f(\tilde{x}) .$$

Wenn man die Stammfunktionen zu den beiden Integralen kennt (bzw. die entsprechenden unbestimmten Integrale berechnen kann), ist das Problem gelöst

$$G(t) - G(t_0) = -(F(x) - F(x_0)) .$$

Hier tritt die Anfangsbedingung explizit auf. Fasst man die beiden konstanten Terme zusammen und schreibt

$$F(x) + G(t) = c ,$$

so hat man eine allgemeine Form der Lösung, die gegebenenfalls nach x (oder auch nach t) aufgelöst werden kann.

Die vorgestellte Argumentation ist, obschon in der Praxis durchaus üblich, aus mathematischer Sicht nicht vertretbar. Der Differentialquotient ist kein Bruch, sondern ein Grenzwert. Die korrekte Argumentation liefert jedoch (glücklicherweise) das gleiche Resultat. Das korrekte Argument besteht in dem Nachweis der folgenden Aussagen:

- Aus der Differentialgleichung $g(t) + f(x) x' = 0$ folgt die Relation

$$\int dt' g(t') + \int dx' f(x') = 0 .$$

- Aus dieser Relation folgt die Differentialgleichung.

Die Argumentation zu Punkt 1 lautet: Schreibe die Differentialgleichung (unter der Voraussetzung, dass eine Lösung existiert) in der Form

$$g(t) + f(x(t)) x' = 0$$

und bilde das unbestimmte Integral

$$\int dt d\tilde{t} g(\tilde{t}) + \int dx d\tilde{x} x'(\tilde{t}) f(x(\tilde{t})) = c .$$

Substituiere in dem zweiten Integral

² Zur Unterscheidung von Integrationsvariablen und oberen Grenzen sind die ersten mit einer Tilde gekennzeichnet.

$$\tilde{x} = x(\tilde{t}) \quad d\tilde{x} = x'(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

mit der oberen Grenze $x = x(t)$ und erhalte wie zuvor

$$\int^t d\tilde{t} g(\tilde{t}) + \int^{x(t)} d\tilde{x} f(\tilde{x}) = c.$$

Zum Nachweis von Punkt 2 differenziert man diese Relation nach t

$$\frac{d}{dt} \left[\int^t d\tilde{t} g(\tilde{t}) + \int^{x(t)} d\tilde{x} f(\tilde{x}) \right] = 0.$$

In dem ersten Term wird nach der oberen Grenze differenziert. Dies ergibt den Integranden an der Stelle t . Der zweite Term wird mit der Kettenregel behandelt

$$\frac{d}{dt} F(x) = \left(\frac{d}{dx} F(x) \right) \frac{dx}{dt},$$

so dass sich

$$g(t) + \left[\frac{d}{dx} \int^x d\tilde{x} f(\tilde{x}) \right] x' = 0$$

oder $g(t) + f(x)x' = 0$ ergibt.

Die Lösung der einfachen Differentialgleichungen $x''(t) = a(t)$, $a(x)$ und $a(x')$, die bei der Diskussion von einfachen Bewegungsproblemen auftreten, erfordert die zweifache Anwendung der Methode der Variablentrennung. Die einzelnen Fälle sind folgendermaßen zu behandeln.

Fall 1: $\mathbf{x}'' = \mathbf{a}(\mathbf{t})$

Im ersten Schritt löst man (nach der Substitution $v = x'$) die Differentialgleichung $v' = a(t)$ mit der Anfangsbedingung $v(t_0) = v_0$ mittels Variablentrennung und erhält $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t d\tilde{t} a(\tilde{t})$. Im zweiten Schritt ist die Differentialgleichung $x' = v(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ in der gleichen Weise zu behandeln. Das Ergebnis ist

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t d\tilde{t} \int_{t_0}^{\tilde{t}} d\tau a(\tau).$$

Sofern die erforderlichen Integrale analytisch berechnet werden können, ist die gesuchte Lösung gefunden.

Zur Übung kann man (noch einmal) den freien Fall mit Reibung in einer Raumdimension betrachten (Buch.Kap. 2.1). Die Vorgabe $a(t) = g e^{-kt}$ mit den (speziellen) Anfangsbedingungen

$$t_0 = 0 \quad x(t_0) = x_0 = 0 \quad v(t_0) = v_0 = 0$$

führt auf die Lösung

$$v(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) \quad x(t) = \frac{g}{k} t + \frac{g}{k^2} (e^{-kt} - 1) .$$

Eine allgemeine Vorgabe

$$a(t) = (g - kv_0) e^{-kt} \quad \text{mit} \quad t_0 = 0 \quad x(t_0) = x_0 \quad v(t_0) = v_0$$

liefert

$$v(t) = v_0 e^{-kt} + \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) \quad \text{und}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) + \frac{g}{k} t + \frac{g}{k^2} (e^{-kt} - 1) .$$

Fall 2: $\mathbf{x}'' = \mathbf{a}(\mathbf{x})$

Hier ist im ersten Schritt eine Substitution notwendig, bevor man Variablentrennung anwenden kann. Man argumentiert: Die Umkehrung der Relation $x = x(t)$ kann man in die Relation $v = v(t)$ einsetzen und erhält $v = v(t(x)) = v(x)$. Die Kettenregel ergibt dann

$$x'' = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right) = v \frac{dv}{dx} .$$

Die Differentialgleichung, die somit zur Diskussion steht

$$v \frac{dv}{dx} = a(x) , \tag{2.1}$$

kann mittels Variablentrennung behandelt werden. Mit den Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$, $v(t_0) = v_0$ und der Definition

$$\phi(x) = \int_{x_0}^x d\tilde{x} a(\tilde{x})$$

erhält man in expliziter Form³

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = \phi(x) - \phi(x_0) .$$

Zur Durchführung des zweiten Schrittes schreibt man dieses Ergebnis in der Form $v^2 = 2\phi(x) + c$. Die entsprechende Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \pm [2\phi(x) + c]^{1/2}$$

kann ebenfalls mittels Variablentrennung gelöst werden

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx'}{[2\phi(x) + c]^{1/2}} .$$

Nach Auswertung des Integrals und Umkehrung des Ergebnisses in der Form $x = x(t)$ ist der Lösungsprozess beendet. Natürlich sollte die Lösung eindeutig

³ Nach Multiplikation mit der Masse m eines Massenpunktes und Sortierung entspricht dieses Ergebnis dem Energieerhaltungssatz für eine Masse in einem konservativen Kraftfeld, vergleiche Buch.Kap. 3.2.3.

sein. Das Vorzeichen ist noch mit Hilfe geeigneter (physikalischer) Argumente festzulegen.

Als Beispiel für die Gewinnung einer Lösung soll das harmonische Oszillatorproblem dienen, obschon für dieses Problem (siehe Math.Kap. 2.2.2) ein einfacherer Lösungsweg vorzuziehen ist. Die Differentialgleichung ist

$$x'' = -\omega^2 x \quad \text{bzw.} \quad v \frac{dv}{dx} = -\omega^2 x .$$

Die Anfangsbedingungen seien

$$t_0 = 0, \quad x(0) = 0, \quad v(0) = v_0 .$$

Zur Anfangszeit bewegt sich die Oszillatormasse in der positiven x -Richtung und passiert den Koordinatenursprung. Variablentrennung ergibt im ersten Schritt

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 .$$

Nach Auflösung $v = \pm \sqrt{v_0^2 - \omega^2 x^2}$ und Festlegung des Vorzeichens durch die Anfangsbedingung $v(0) = +v_0$, liefert Variablentrennung im zweiten Schritt

$$\omega t = \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{\left[\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 - \tilde{x}^2\right]^{1/2}} .$$

Die Stammfunktion dieses Integrals ist der Arcussinus

$$\int^x \frac{d\tilde{x}}{[a^2 - \tilde{x}^2]^{1/2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c ,$$

das Ergebnis lautet also

$$\arcsin \frac{\omega x}{v_0} = \omega t ,$$

oder in Umkehrung

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t .$$

Die Amplitude $A = v_0/\omega$ wird durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Der maximale Ausschlag ist proportional zu der Anfangsgeschwindigkeit. Das Ergebnis für die Geschwindigkeit $v(t) = v_0 \cos \omega t$ kann man entweder durch direkte Differentiation von $x(t)$ oder durch Einsetzen von $x(t)$ in die Gleichung $v = \pm \sqrt{v_0^2 - \omega^2 x^2}$ gewinnen.

Zur weiteren Übung kann man noch den Satz von Anfangsbedingungen

$$t_0 = 0, \quad x(0) = A, \quad v(0) = 0$$

betrachten. Die Oszillatormasse ist anfänglich in der positiven x -Richtung ausgelenkt. Da zur Anfangszeit die Geschwindigkeit Null ist, liegt ein Umkehrpunkt der Bewegung vor. Die Lösung lautet für diesen Satz von Anfangsbedingungen

$$x(t) = A \cos \omega t \quad v(t) = -A\omega \sin \omega t .$$

Der einzige springende Punkt gegenüber dem ersten Satz von Anfangsbedingungen ist der Zeitpunkt der Festlegung des Vorzeichens. Da $v(0) = 0$ ist, findet die Festlegung erst in dem zweiten Lösungsschritt statt.

Wie schon erwähnt, kann man das Oszillatorproblem direkter lösen. Das hier vorgestellte Verfahren hat jedoch den Vorteil, dass es für allgemeinere Vorgaben von $a(x)$ gangbar ist. Voraussetzungen für die Gewinnung einer analytischen Lösung sind: Man kann alle vorkommenden Integrale analytisch berechnen und das Endergebnis in der Form $x = x(t)$ umkehren.

Fall 3: $\mathbf{x}'' = \mathbf{a}(\mathbf{v})$

In diesem Fall kann die Methode der Variablentrennung wieder direkt angewandt werden. Man schreibt die Differentialgleichung in der Form $v'(t) = a(v)$ und erhält die Lösung

$$t - t_0 = \int_{v_0}^v \frac{d\tilde{v}}{a(\tilde{v})} ,$$

in der die Anfangsbedingungen eingearbeitet sind. Wertet man das Integral aus, so kann man die Aussage $t - t_0 = A(v) - A(v_0)$ in der Form $v = v(t, t_0, v_0)$ auflösen und in einem zweiten Schritt die Differentialgleichung $x'(t) = v(t, t_0, v_0)$ direkt integrieren

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t d\tilde{t} \, v(\tilde{t}, t_0, v_0) .$$

Als Beispiel soll noch einmal das freie Fallproblem mit Reibung dienen, dieses Mal mit der Vorgabe $a(v) = g - kv$ und den Anfangsbedingungen

$$t_0 = 0, \quad x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0 .$$

Im ersten Schritt berechnet man⁴

$$t = \int_{v_0}^v \frac{d\tilde{v}}{(g - k\tilde{v})} = -\frac{1}{k} \ln \left| \frac{g - kv}{g - kv_0} \right| .$$

Um das Betragszeichen in der Umkehrung dieser Relation

$$\left| \frac{g - kv}{g - kv_0} \right| = e^{-kt}$$

aufzulösen, sind gegebenenfalls Fallunterscheidungen zu diskutieren. Das Ergebnis

⁴ Benutze die Substitution $s = g - kv$.

$$v(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) + v_0 e^{-kt}$$

ist dann noch einmal zu integrieren. Das Endergebnis wurde schon unter dem Fall 1 angegeben.

2.2.2 Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

Die Differentialgleichung des harmonischen Oszillatorproblems ist ein Spezialfall einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die allgemeine Form dieses Typs von Differentialgleichungen lautet

$$a_0(t) x''(t) + a_1(t) x'(t) + a_2(t) x(t) = b(t) .$$

Die Koeffizienten a_i sind beliebige (doch ‘vernünftige’) Funktionen von t . Man unterscheidet die Fälle

- $b(t) = 0$ → homogene Differentialgleichung
- $b(t) \neq 0$ → inhomogene Differentialgleichung

Die Bezeichnung **linear** nimmt Bezug auf die Tatsache, dass die gesuchte Funktion und deren Ableitungen nur in der ersten Potenz auftreten. Diese einfache Tatsache hat weitreichende Konsequenzen, die einen weiten Anwendungsbereich in der Physik erschließen.

Für lineare Differentialgleichungen kann man einige allgemeine Aussagen bereitstellen. Solche Aussagen kann man auch für lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung machen, sie werden hier aber nur für Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausgeführt. Die erste Aussage lautet:

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung hat die Form

$$x_i(t, c_1, c_2) = x_h(t, c_1, c_2) + x_p(t) ,$$

wobei x_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und x_p eine Partikulärlösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Kennt man also die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung, so ist es nur notwendig, irgendeine (die einfachstmögliche ist ausreichend) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bestimmen. Diese kann man oft erraten, es existieren jedoch auch (siehe Math.Kap. 6.2.3 und 6.3.3) explizite Methoden zur Bestimmung solcher Partikulärlösungen. Der Beweis der Aussage ist einfach. Nach der Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} a_0(t) x_h''(t, c_1, c_2) + a_1(t) x_h'(t, c_1, c_2) + a_2(t) x_h(t, c_1, c_2) &= 0 \\ a_0(t) x_i''(t) + a_1(t) x_i'(t) + a_2(t) x_i(t) &= b(t) . \end{aligned}$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so gewinnt man die Aussage, dass $x_h + x_i$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist. Da diese Lösung genau zwei Integrationskonstanten enthält, ist sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung ist das **Superpositionsprinzip** von Nutzen.

Sind zwei beliebige, linear unabhängige Partikulärlösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der homogenen Differentialgleichung bekannt, so ist

$$x_h(t, c_1, c_2) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Hier ist zunächst der Begriff der **linearen Unabhängigkeit**, ein Begriff aus der Linearen Algebra (siehe Math.Kap. 3.2.4), zu klären. Die formale Definition dieses Konzeptes lautet

Ein Satz von Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ ist linear unabhängig, wenn die Relation

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) = 0$$

für jeden Wert des Definitionsbereiches der beiden Funktionen nur für $\alpha = \beta = 0$ möglich ist.

Diese Definition ist für die Praxis nicht handlich genug, da man alle Werte des Definitionsbereiches durchgehen müsste. Man kann sie etwas abändern, indem man eine zweite Gleichung hinzunimmt, die man aus der obigen durch Differentiation gewinnt

$$\alpha x_1'(t) + \beta x_2'(t) = 0 .$$

Beide Gleichungen zusammen stellen ein einfaches, lineares Gleichungssystem dar, in dem die Größen α , β als Unbekannte und die Funktionen von t als Koeffizienten auftreten. Dieses Gleichungssystem hat dann und nur dann die Lösung $\alpha = \beta = 0$, falls die Koeffizientenfunktionen die Bedingung erfüllen

$$x_1 x_2' - x_2 x_1' \neq 0 .$$

Diese Kombination der beiden Funktionen (man spricht dann auch von Fundamentallösungen) und ihrer Ableitungen bezeichnet man als **Wronskideterminante**⁵

$$W(x_1, x_2) = x_1 x_2' - x_2 x_1' \neq 0 .$$

⁵ Details zu dem Begriff der Determinante findet man in Math.Kap. 3.2.4

Die Beweise der Aussage zu der Lösung des Gleichungssystems und des Superpositionsprinzips sind wiederum recht einfach. Zur Lösung des Gleichungssystems multipliziert man die erste der beiden Gleichungen mit x_2' (bzw. x_1') und die zweite mit x_2 (bzw. x_1). Subtraktion ergibt dann

$$(x_1x_2' - x_2x_1')\alpha = 0 \quad \text{und} \quad (x_1x_2' - x_2x_1')\beta = 0.$$

Daraus folgt, dass α und β nur gleich Null sein können, falls die Wronskideterminante nicht verschwindet. Zur Begründung des Superpositionsprinzips schreibt man gemäß der Voraussetzung

$$a_0(t)x_1''(t) + a_1(t)x_1'(t) + a_2(t)x_1(t) = 0$$

$$a_0(t)x_2''(t) + a_1(t)x_2'(t) + a_2(t)x_2(t) = 0,$$

multipliziert die erste Gleichung mit c_1 , die zweite mit c_2 , addiert und erhält die Aussage, dass $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ (mit zwei Integrationskonstanten) eine allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.

Die Bedeutung des Superpositionsprinzips ist weitreichend. So sind alle Wellengleichungen der Physik lineare Differentialgleichung (wenn auch partielle). Daraus folgt, dass man im obigen Sinne Lösungen superponieren, in der realen Welt also Wellen überlagern kann. Interferenzerscheinungen sind in dieser Weise mathematisch fassbar. Man kann aus dem Superpositionsprinzip aber auch rechentechnisches Kapital schlagen. Für einfache lineare Differentialgleichungen zweiter (und auch höherer) Ordnung ist es unter Umständen möglich, die Partikulärlösungen zu erraten und somit die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu gewinnen. In weniger durchsichtigen Fällen kann man auf Methoden zurückgreifen (siehe Math.Kap. 6), die die Bestimmung von Partikulärlösungen in recht einfacher Weise ermöglichen.

Dass einfacher nicht einfach bedeutet, ergibt sich, wenn man versucht, lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu lösen. Selbst einfache Koeffizientenfunktionen führen auf die sogenannten 'höheren Funktionen der mathematischen Physik' (siehe Band 2). Der Lösungsweg ist jedoch einfach, falls die Koeffizientenfunktionen a_i nicht von der unabhängigen Variablen t abhängen. Für diese lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (wieder wäre eine Ausweitung der Diskussion auf Differentialgleichungen n -ter Ordnung möglich)

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = 0$$

kann man zwei Fundamentallösungen nach dem folgenden Muster bestimmen:

- Gehe mit dem Ansatz $x = e^{\alpha t}$ in die Differentialgleichung ein und erhalte

$$(\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)e^{\alpha t} = 0.$$

- Bestimme die Wurzeln der anstehenden quadratischen (der **charakteristischen**) Gleichung (für eine Differentialgleichung n -ter Ordnung des charakteristischen Polynoms n -ter Ordnung)

$$\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0 \quad \rightarrow \quad (\alpha_1, \alpha_2) .$$

- Sind die beiden Wurzeln verschieden $\alpha_1 \neq \alpha_2$, so folgt für die Wronskideterminante

$$W(e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}) = (\alpha_2 - \alpha_1) e^{(\alpha_1 + \alpha_2)t} \neq 0 .$$

In diesem Fall ist also

$$x_h(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$$

eine allgemeine Lösung.

- Liegt eine Doppelwurzel ($\alpha_1 = \alpha_2$) vor, so ist $W = 0$. Man benötigt eine weitere, linear unabhängige Lösung. Diese gewinnt man folgendermaßen. Es ist im Allgemeinen

$$\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) = \alpha^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha + \alpha_1\alpha_2 .$$

Im Fall einer Doppelwurzel identifiziert man also $a_1 = -2\alpha_1$, $a_2 = \alpha_1^2$, so dass noch die Differentialgleichung

$$x''(t) - 2\alpha_1 x'(t) + \alpha_1^2 x(t) = 0$$

zur Diskussion steht. Mit dem Lösungsansatz $x(t) = R(t) e^{\alpha_1 t}$ (ein beliebiger Ansatz: Bekannter Lösungsanteil mal Restfunktion) berechnet man

$$x' = (R' + \alpha_1 R) e^{\alpha_1 t} \quad x'' = (R'' + 2\alpha_1 R' + \alpha_1^2 R) e^{\alpha_1 t} .$$

Einsetzen in die obige Differentialgleichung ergibt eine (einfache) Differentialgleichung für die Restfunktion

$$R'' e^{\alpha_1 t} = 0 \quad \text{oder} \quad R'' = 0 ,$$

mit der allgemeinen Lösung $R(t) = c_1 + c_2 t$. Das Paar von Funktionen ($x_1 = e^{\alpha_1 t}$, $x_2 = t e^{\alpha_1 t}$) ist linear unabhängig, denn es ist

$$W(e^{\alpha_1 t}, t e^{\alpha_1 t}) = e^{2\alpha_1 t} \neq 0 .$$

Bei einer Doppelwurzel der charakteristischen Gleichung ist also

$$x_h(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\alpha t}$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Einige Übungsbeispiele sollen das Verfahren untermauern.

1. Die Differentialgleichung $x'' + 4x' - 5x = 0$ hat die Lösung $x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-5t}$.
2. Bei der Lösung der Differentialgleichung $x'' + 4x' + 5x = 0$ treten die komplexen Wurzeln (siehe Math.Kap. 7 für einige Details zu dem Thema komplexe Zahlen und Funktionen)

$$\alpha_1 = -2 + i \quad \alpha_2 = -2 - i \quad (i^2 = -1)$$

auf. Die Wurzeln sind zueinander konjugiert $\alpha_1^* = \alpha_2$. Dies garantiert, dass die Kombinationen $\alpha_1 + \alpha_2$ und $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ reell sind. Die allgemeine Lösung ist also

$$x_h(t) = (c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}) e^{-2t}.$$

Es mag erstaunen, dass eine Differentialgleichung mit reellen Koeffizienten auf komplexe Lösungsfunktionen führt. Man kann jedoch die Lösung mittels der Relation

$$e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$$

in reeller Form angeben. Damit folgt

$$x_h(t) = (A \cos t + B \sin t) e^{-2t},$$

mit $A = c_1 + c_2$, $B = i(c_1 - c_2)$. Die beiden trigonometrischen Funktionen sind ebenfalls linear unabhängig, denn es ist $W(\sin t, \cos t) = -1 \neq 0$. Eine dritte Variante für die Lösung ist

$$x_h(t) = C \sin(t + \varphi) e^{-2t}$$

mit

$$A = C \sin \varphi \quad B = C \cos \varphi,$$

und der Umkehrung

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \tan \varphi = \frac{A}{B}.$$

Es spielt im Endeffekt keine Rolle, welche der drei möglichen Formen man benutzt. Die Form mit den komplexen Exponentialfunktionen ist unter Umständen nützlich, da diese Funktionen einfacher zu handhaben sind (z.B. einfachere Additionstheoreme für die Exponentialfunktion im Vergleich zu den trigonometrischen Funktionen). Bei einem Anfangswertproblem garantiert die Vorgabe von reellen Anfangswerten eine reelle Lösungsfunktion. So erhält man mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ für jede der drei Varianten die reelle Lösung $x_h(t) = (\cos t + 2 \sin t) e^{-2t}$.

3. Die Differentialgleichung $x'' - 4x' + 4x = 0$ führt auf eine Doppelwurzel $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ und somit auf die allgemeine Lösung $x_h(t) = (c_1 + c_2 t) e^{2t}$.
4. Die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators $x'' + \omega^2 x = 0$ kann nach dem gleichen Muster gelöst werden. Die allgemeine Lösung kann, je nach Bedarf, in den Varianten

$$x_h(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \sin(\omega t + \varphi)$$

angegeben werden.

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll noch eine inhomogene, lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten betrachtet werden. Eine Differentialgleichung der Form

$$x'' + \omega^2 x = b_0 \sin \omega_0 t$$

beschreibt eine (spezielle) erzwungene Schwingung (siehe Buch.Kap. 4.2.3). Um die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung anzugeben, benötigt man, neben der allgemeinen Lösung der homogenen Oszillatorgleichung, eine Partikulärlösung der inhomogenen Differentialgleichung. Da die trigonometrischen Funktionen bei Differentiation ineinander übergehen, genügt hier der Ansatz $x_p(t) = D \sin \omega_0 t$. Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so kann man über $(-\omega_0^2 + \omega^2)D \sin \omega_0 t = b_0 \sin \omega_0 t$ die Konstante D zu $D = b_0/(\omega^2 - \omega_0^2)$ bestimmen (vorausgesetzt $\omega^2 \neq \omega_0^2$). Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet z.B.

$$x_i(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{b_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \omega_0 t .$$

Für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0$ findet man durch Lösung des entsprechenden linearen Gleichungssystems für die Integrationskonstanten die spezielle Lösung

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{b_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \left(\sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t \right) .$$

Für $b_0 = 0$ entfällt der inhomogene Term und die Lösung geht in die Lösung der homogenen Oszillatorgleichung bei gleichen Anfangsbedingungen über.

3 Lineare Algebra

Der Themenkreis Lineare Algebra beinhaltet die mathematische Fassung des Raumbegriffes (mit beliebiger aber endlicher Dimension), Operationen in diesen Räumen (wie Drehungen, Spiegelungen, etc.) und die Bereitstellung mathematischer Konstrukte (wie Matrizen und Determinanten) zur Beschreibung derselben. Dieses Kapitel beginnt mit der Darstellung des Vektorbegriffes. Dieses Konzept wurde ca. 1880 von Gibbs, Grassmann und Hamilton eingeführt und ist seit dieser Zeit ein wesentliches Hilfsmittel in der theoretischen Physik, da es eine konzise Fassung von Fragestellungen mit mehr als einer (Raum)-Dimension erlaubt. Nach der Vorstellung einer eher qualitativen Fassung dieses Konzeptes (mit der man durchaus gewisse geometrische Probleme lösen kann) folgt dessen quantitative Fassung, die im Endeffekt die Abstraktion von dem gewohnten, dreidimensionalen Raum erlaubt. Abgerundet wird der erste Teilabschnitt durch eine eher zu kurze Betrachtung von mehrdimensionalen Räumen sowie Räumen mit einer nichtorthogonalen Basis. In dem zweiten Teil stehen die Transformationen in den Räumen (in der Hauptsache zwei- bzw. dreidimensional) und die Erarbeitung der dazu notwendigen Hilfsmittel im Vordergrund.

3.1 Vektoren

In diesem Abschnitt wird, wie gesagt in mehr anschaulicher Form, das Vektorkonzept eingeführt und es werden die Rechenoperationen mit Vektoren, das sind Addition, Subtraktion und die verschiedenen Produkte mit Vektoren, vorgestellt. Anschauliche Form bedeutet eine Beschränkung auf maximal drei Raumdimensionen sowie eine mehr qualitative Fassung.

3.1.1 Anschauliche Vektorrechnung

Die erste Definition lautet

Größen, die nur durch **einen** Zahlenwert charakterisiert werden, bezeichnet man als **Skalare**.

Beispiele für skalare Größen in der Physik sind Masse, Energie, Temperatur etc. Ein Beispiel aus der analytischen Geometrie wäre eine Strecke.

Die zweite Definition lautet

Größen, die sowohl durch einen Zahlenwert als auch durch eine **Richtung** charakterisiert werden, bezeichnet man als **Vektoren**.

Ein Beispiel ist der **Verschiebungsvektor**. Mit der Aussage: Geht man von einem Punkt A aus r km, liegt der Endpunkt keineswegs fest. Der Endpunkt liegt irgendwo auf einem Kreis um den Ausgangspunkt A . Man benötigt neben dem Zahlenwert r eine zusätzliche Information, wie z.B. in nordöstlicher Richtung, um den Endpunkt B eindeutig festzulegen. Gerichtete Strecken (und allgemeiner Vektoren) werden durch einen Pfeil

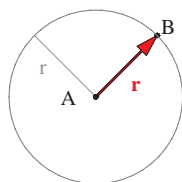


Abb. 3.1. Verschiebungsvektor

dargestellt, der Anfangspunkt und Endpunkt verbindet (siehe Abb. 3.1). Die übliche Schreibweise für einen Verschiebungsvektor (oder Positionsvektor) ist¹

$$\mathbf{r} = \underline{r} = \vec{r} (= \overrightarrow{AB}),$$

bzw. mehr kalligraphische Varianten. Eine zweite Verabredung zur Notation ist an dieser Stelle festzuhalten. Die Länge der gerichteten Strecke (allgemein der **Betrag** eines Vektors) wird in der Form

$$|\mathbf{r}| = r$$

geschrieben. Beispiele für vektorielle Größen in der Physik sind Kräfte (es spielt eine Rolle, in welcher Richtung man zieht oder schiebt), Geschwindigkeit, Drehimpuls, elektrische oder magnetische Felder, etc.

Trotz der einfachen Definition kann man einige Feinheiten notieren. Man unterscheidet:

- Feste Vektoren, deren Anfangspunkt strikt festgelegt ist, wie z.B. Verschiebungsvektoren, die an einem bestimmten Ort beginnen.

¹ Es wird fast ausschließlich die erste Form benutzt.

- Linienflüchtige Vektoren, deren Anfangspunkt entlang einer Geraden, die durch die Richtung des Vektors festgelegt ist, verschoben werden können. Kraftvektoren sind Beispiele für solche Vektoren, da man den Angriffspunkt z.B. durch ein 'Seil' verschieben könnte.
- Freie Vektoren können unter Beibehaltung der Richtung beliebig verschoben werden.

In der weiteren Diskussion werden (sofern nicht anders bemerkt) freie Vektoren benutzt.

Für Vektoren kann man (zunächst in qualitativer Form) Rechenoperationen definieren, deren Anwendungsbereich nicht auf die theoretische Physik beschränkt ist.

Die **Addition** von Vektoren entspricht dem Hintereinanderausführen von Verschiebungen. Man verschiebt ein Objekt zunächst um den Vektor \mathbf{r}_1 und dann um den Vektor \mathbf{r}_2 . Den Vektor, der den Anfangs- und den Endpunkt dieser Vektorkette verknüpft, definiert man als den Summenvektor und schreibt

$$\mathbf{S} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 .$$

Der Summenvektor markiert die kürzeste Verbindung zwischen diesen beiden Punkten (Abb. 3.2a). Man kann den Summenvektor auch konstruieren, indem man die Anfangspunkte der beiden Vektoren zusammenlegt und die Figur zu einem Parallelogramm ergänzt (Abb. 3.2a). Die (lange) Diagonale des Parallelogramms ist der Summenvektor. Bei dieser Konstruktion hat man die Aussage benutzt, dass die Vektoraddition kommutativ ist

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 .$$

Die Addition von mehr als zwei Vektoren (Abb. 3.2b) ergibt sich sinngemäß durch die Angabe

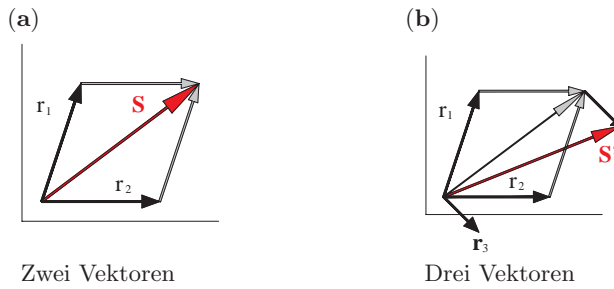
$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) + \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) .$$

Benutzt wurde die Aussage: Die Vektoraddition ist assoziativ.

Die **Multiplikation** eines Vektors **mit** einem **Skalar** entspricht der Vorschrift: Verschiebe ein Objekt nicht um einen Vektor \mathbf{r} , sondern um a mal diesen Vektor. Den resultierenden Vektor mit der Länge $a\mathbf{r}$ und, falls die Zahl a positiv ist, der gleichen Richtung wie \mathbf{r} schreibt man als

$$\mathbf{R} = a\mathbf{r} .$$

Ist $a = 0$ so bezeichnet man \mathbf{R} als den Nullvektor $\mathbf{0}$. Dies ist, anschaulich gesprochen, ein Vektor, dessen Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Man kann die Frage stellen: Weder Länge noch Richtung, also ein Vektor? Dieser Vektor ist aber, wie die Zahl 0 bei den Rechenoperationen mit Skalaren, eine



Zwei Vektoren

Drei Vektoren

Abb. 3.2. Zur Vektoraddition

unabhängbare Größe mit der Eigenschaft $\mathbf{r} + \mathbf{0} = \mathbf{r}$. Ist $a < 0$, so hat \mathbf{R} die Länge $|a|r$, zeigt aber in die entgegengesetzte Richtung zu \mathbf{r} . Rechenregeln für die Multiplikation mit einem Skalar sind die Distributivgesetze

$$(a + b)\mathbf{r} = a\mathbf{r} + b\mathbf{r} \quad a(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = a\mathbf{r}_1 + a\mathbf{r}_2 ,$$

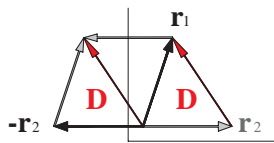
sowie das Assoziativgesetz

$$a(b\mathbf{r}) = (ab)\mathbf{r} .$$

Die **Subtraktion** von Vektoren kann man mit Hilfe der Addition und der Multiplikation mit (-1) darstellen. Die Differenz zweier Vektoren ist

$$\mathbf{D} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + (-1)\mathbf{r}_2 .$$

Man dreht den Vektor \mathbf{r}_2 um und addiert in gewohnter Weise. Den Differenzvektor erhält man auch als die kurze Diagonale in dem Vektorparallelogramm, wobei (eine nützliche Merkregel) der Endpunkt des Differenzvektors mit dem Endpunkt von \mathbf{r}_1 zusammenfällt (Abb. 3.3).

**Abb. 3.3.** Subtraktion von Vektoren

Es gibt zwei verschiedene Produkte eines Vektors mit einem anderen Vektor. Das **Skalarprodukt**, auch **inneres Produkt** genannt, zweier Vektoren entspricht, sozusagen, der Projektion eines Vektors auf den anderen. Die Definition (und Notation) des Skalarproduktes ist

$$(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = r_1 r_2 \cos \varphi_{12} ,$$

wobei φ_{12} der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel ist. Die Definition beinhaltet die folgenden Operationen: Projiziere den Vektor \mathbf{r}_2 auf

die Richtung von \mathbf{r}_1 . Dies ergibt den Faktor $r_2 \cos \varphi_{12}$. Multipliziere mit dem Betrag von \mathbf{r}_1 . Alternativ kann man zuerst \mathbf{r}_1 auf die Richtung von \mathbf{r}_2 projizieren und dann mit r_2 multiplizieren (Abb. 3.4a). Mit dieser Definition wird also

zwei Vektoren \implies ein Skalar (Zahl)
--

zugeordnet.

Rechenregeln für das Skalarprodukt sind

- Das Skalarprodukt ist kommutativ

$$(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1) .$$

Dies ist die formale Fassung der Aussage, dass es keine Rolle spielt, ob man zuerst \mathbf{r}_1 auf \mathbf{r}_2 projiziert oder umgekehrt.

- Es gilt das Distributivgesetz

$$(\mathbf{r}_1 \cdot [\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3]) = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3) .$$

Diese Rechenregel kann man in der Ebene leicht veranschaulichen. Die Projektion des Summenvektors setzt sich aus den Projektionen der Summanden zusammen (Abb. 3.4b).

- Es gilt ein Assoziativgesetz bezüglich der Multiplikation mit einem Skalar

$$a(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = ((a\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}_2) = (\mathbf{r}_1 \cdot (a\mathbf{r}_2)) .$$

Der Definition entnimmt man weiterhin die folgenden Eigenschaften des Skalarproduktes

- Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ergibt das Quadrat des Betrages

$$(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1) = r_1^2 \quad \text{da} \quad \cos \varphi_{11} = 1 .$$

- Das Skalarprodukt hat den Wert Null

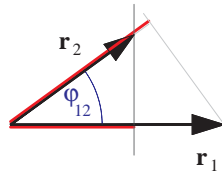
$$(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = 0 ,$$

falls $\mathbf{r}_1 = 0$ oder/und $\mathbf{r}_2 = 0$ ist oder falls \mathbf{r}_1 senkrecht auf \mathbf{r}_2 steht. In dem letzteren Fall bezeichnet man die beiden Vektoren als **orthogonal**.

Die Tatsache, dass das Skalarprodukt ein nützliches Instrument darstellt, soll an einem trigonometrischen Beispiel, dem Kosinussatz, erläutert werden. Der Beweis der Relation $a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2 = c^2$, die für beliebige Dreiecke gilt, ist mit elementargeometrischen Mitteln durchaus umständlich. Mit Hilfe der Vektorrechnung argumentiert man wie folgt: Das Dreieck kann durch ein geschlossenes Vektorpolygon beschrieben werden (Abb. 3.5)

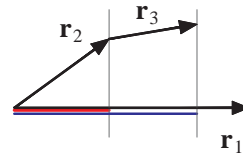
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} .$$

(a)



Definition

(b)



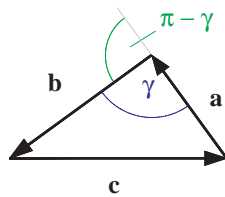
Distributivgesetz

Abb. 3.4. Das Skalarprodukt

Daraus folgt z.B. durch Auflösung nach \mathbf{c} und Bildung des Skalarproduktes

$$\begin{aligned}
 c^2 &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 \\
 &= (\mathbf{a})^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{b})^2 \\
 &= a^2 + 2ab \cos \varphi_{ab} + b^2 = a^2 + 2ab \cos(\pi - \gamma) + b^2 \\
 &= a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2 .
 \end{aligned}$$

Entsprechend kann man alle Varianten des Kosinussatzes (und mit ähnlichen Mitteln weitere Sätze der Trigonometrie) gewinnen.

**Abb. 3.5.** Zum Kosinussatz

Das **Vektorprodukt**, auch **äußeres Produkt** genannt, ordnet zwei Vektoren einen dritten Vektor zu. Die folgende Aussage ist der Hintergrund für die Definition des Vektorproduktes. Zwei Vektoren \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 im dreidimensionalen Raum spannen ein Parallelogramm auf (Abb. 3.6a). Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms ist

$$F = r_1 h = r_1 r_2 \sin \varphi_{12} .$$

Die Definition des Vektorproduktes mit der Notation

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \quad \text{oder} \quad \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \quad \text{oder} \quad [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$$

umfasst drei Punkte (Abb. 3.6b):

- Die Größe $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)$ ist ein Vektor $\mathbf{r}_3 = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)$.

- Die Richtung des Vektors \mathbf{r}_3 wird festgelegt durch: Der Vektor \mathbf{r}_3 steht senkrecht auf dem Parallelogramm und zwar so, dass die Vektoren \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 (genau in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem bilden. Die Reihenfolge schlägt sich in zwei alternativen Merkgeln nieder:

Rechte Handregel : Der Daumen (der rechten Hand) zeigt in Richtung von \mathbf{r}_1 , der Zeigefinger in Richtung von \mathbf{r}_2 und der Mittelfinger in Richtung von \mathbf{r}_3 .

Schraubenregel : Man drehe \mathbf{r}_1 auf dem kürzesten Weg in Richtung von \mathbf{r}_2 . Die Richtung von \mathbf{r}_3 entspricht dem Gang einer normalen (Rechts)-Schraube.

Für handwerklich weniger Begabte gibt es noch die Regel: Man stelle sich die drei Vektoren als Andeutung einer sitzenden menschlichen Figur vor. Es entspricht dann: \mathbf{r}_1 dem rechten Bein, \mathbf{r}_2 dem linken Bein, \mathbf{r}_3 der Richtung zu dem Kopf.

- Der Vektor $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)$ hat die Länge

$$|\mathbf{r}_3| = |(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)| = r_1 r_2 \sin \varphi_{12} .$$

Der Betrag des Vektorproduktes entspricht dem Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

Die Charakterisierung einer Fläche durch eine Länge bedarf vielleicht noch einer Bemerkung. In der Geometrie spricht man (oft) etwas präziser von einer Länge, die ein Maß für eine Fläche darstellt. Eine Längenangabe x cm ist das Maß einer Fläche mit x cm². In der Physik gibt es bezüglich der Maßeinheiten keine Schwierigkeiten. So lautet z.B. die Definition des Drehimpulses $\mathbf{l} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ (Buch.Kap. 3.2.2) mit der korrekten Maßeinheit

$$[l] = \frac{\text{ML}^2}{\text{T}} .$$

Noch zu bemerken ist: Das Vektorprodukt ergibt einen Nullvektor, falls einer der Faktoren ein Nullvektor ist oder wenn die Vektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 gleich- oder entgegengerichtet sind.

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \mathbf{0} \quad \text{falls} \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{0} \quad \text{oder/und} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \mathbf{r}_1 = c\mathbf{r}_2 .$$

Auch für das Vektorprodukt sind einige Rechenregeln zu notieren:

- Das Vektorprodukt ist **antikommutativ**

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = -(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1) .$$

Dies ist eine Betonung der Richtungsregeln, wie in Abb. 3.7 gezeigt.

- Der Definition entnimmt man direkt das Assoziativgesetz

$$c(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = ((c\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2) = (\mathbf{r}_1 \times (c\mathbf{r}_2)) .$$

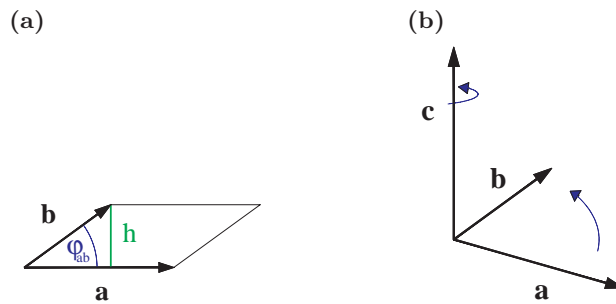


Abb. 3.6. Zur Definition des Vektorproduktes

- Es gibt ein Distributivgesetz

$$(\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)) = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3) .$$

Der elementargeometrische Beweis dieser Regeln ist nicht schwierig, wenn auch ein wenig umständlich.

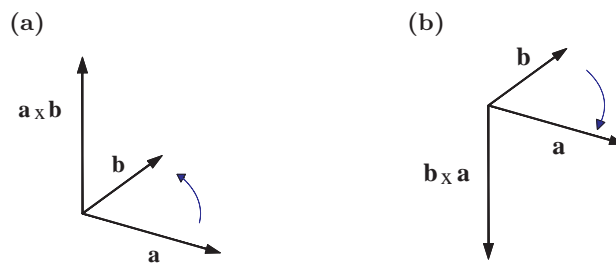


Abb. 3.7. Vektorprodukt: Antikommutativität

Die qualitative Form der Vektorrechnung ist für die Gewinnung von quantitativen Resultaten nicht geeignet. So führt der Versuch, einen Summenvektor mit Hilfe eines Lineals und eines Winkelmessers zu bestimmen, zu nicht vertretbaren Fehlern. Aus diesem Grund ist die Erarbeitung einer quantitativen Fassung des Vektorkalküls unerlässlich.

3.1.2 Quantitative Fassung der Vektorrechnung

Eine quantitative Fassung der Konzepte des vorherigen Abschnittes gewinnt man, wenn man die Vektoren auf ein gegebenes kartesisches Koordinatensystem bezieht (Abb. 3.8).

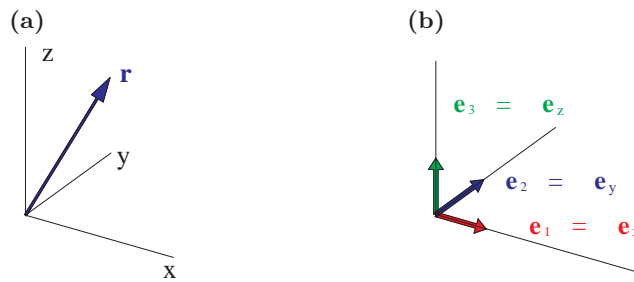


Abb. 3.8. Koordinatensystem und Koordinatendreiein

Man kann ein solches Koordinatensystem durch ein Dreiein von **Einheitsvektoren**² aufspannen. Diese Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (oder alternativ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) werden durch die folgenden Relationen charakterisiert

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) &= (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3) = 1 \\ (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) = 0. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile ergeben sich mit dem Kommutativgesetz zusätzliche Relationen. Zur Abkürzung dieser Vorgaben benutzt man das **Kroneckersymbol**

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}.$$

Die neun Skalarprodukte der Einheitsvektoren kann man mit Hilfe dieses Symbols in der Form

$$\boxed{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) = \delta_{ik}}$$

schreiben. Dieser Satz von Relationen besagt, dass die drei Einheitsvektoren paarweise senkrecht aufeinanderstehen (orthogonal sind) und jeweils die Länge (den Betrag) 1 haben (auf 1 normiert sind). Die Festlegung der wechselseitigen Orientierung zu einem rechtshändigen Koordinatensystem wird durch die Vektorprodukte

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3 \quad (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \quad (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$$

ausgedrückt. Die Reihenfolge der Indizes (12/3), (23/1), (31/2) entspricht zyklischen Vertauschungen (Permutationen) der Zahlen (123). Es gilt natürlich auch

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = -(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) \quad \text{etc.} \quad \text{und} \quad (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{0} \quad \text{etc.}$$

² Eine alternative Bezeichnung ist **Basisvektoren**.

Die neun Vektorprodukte werden ebenfalls in einer kompakten Form zusammengefasst

$$(e_i \times e_j) = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} e_k .$$

Der Faktor in der Vektorsumme ist das **Levi-Civita Symbol**. Es hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= 0 && \text{falls zwei Koeffizienten gleich sind,} \\ &= 1 && \text{falls (ijk) eine zyklische Permutation von (123) ist,} \\ &= -1 && \text{für jede andere Permutation .} \end{aligned}$$

Von den $3^3 = 27$ Kombinationen der Indizes ergeben 21 die 0, drei die 1 und drei die -1 . Die Verwendung des Symbols erscheint also eher umständlich als nützlich. Es stellt sich jedoch durchaus als brauchbar heraus.

Mit den obigen Angaben ist der (dreidimensionale) Euklidische Raum (mit der Standardbezeichnung $\mathcal{R}(3)$ oder \mathcal{R}_3) definiert³. Zur quantitativen Fassung der Vektorrechnung projiziert man zunächst einen Vektor \mathbf{r} mit Hilfe des Skalarproduktes auf die Koordinatenachsen

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1) &= r \cos \varphi_{r1} = x_1 \\ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_2) &= r \cos \varphi_{r2} = x_2 \\ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_3) &= r \cos \varphi_{r3} = x_3 . \end{aligned}$$

Die Bezeichnung (x_1, x_2, x_3) ist bei Nutzung der Summenschreibweise angebracht, sie entspricht natürlich der Standardform (x, y, z) . Man kann, umgekehrt, den Vektor \mathbf{r} wieder aus den Projektionen zusammensetzen

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i .$$

Man bezeichnet einen solchen Ausdruck als die Zerlegung eines Vektors in seine **kartesischen Komponenten**.

Die Komponenten eines Vektors (Abb. 3.9) (dessen Anfangspunkt im Koordinatenursprung liegt) sind identisch mit den Koordinaten des Endpunktes des Vektors. Man schreibt deswegen auch

$$\mathbf{r} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) .$$

Vektoren im \mathcal{R}_3 werden durch die Angabe von Zahlentripeln charakterisiert, wobei im Rahmen der Matrixformulierung (siehe Math.Kap. 3.2) der Äquivalenzpfeil \Rightarrow als Gleichheitszeichen gewertet werden kann. Der Vektor kann in einem vorgegebenen Koordinatendreiein im Sinne der Komponentenzerlegung aus der Angabe des Zahlentripels rekonstruiert werden.

³ Eine einführende Diskussion anderer Räume findet man in Math.Kap. 3.1.3 und 3.1.4

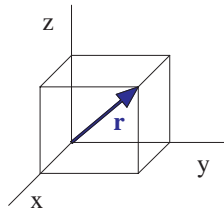


Abb. 3.9. Zur Komponentenzerlegung

Die Komponentenzerlegung ist der Schlüssel zu der quantitativen Fassung der Vektorrechnung. Mit (benutze \mathbf{x} anstelle von \mathbf{r}_1 etc.)

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$$

findet man für die einzelnen Rechenoperationen (Abb. 3.10)

- **Addition** Unter Benutzung der aufgeführten Rechenregeln erhält man für den Summenvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 + y_2)\mathbf{e}_2 + (x_3 + y_3)\mathbf{e}_3 \\ &= \sum_i^3 (x_i + y_i)\mathbf{e}_i \Rightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) . \end{aligned}$$

Der Summenvektor ergibt sich durch Addition der einzelnen Komponenten.

- **Multiplikation mit Skalar** Hier ist

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= a\mathbf{x} = (ax_1)\mathbf{e}_1 + (ax_2)\mathbf{e}_2 + (ax_3)\mathbf{e}_3 \\ &= \sum_i^3 (ax_i)\mathbf{e}_i \Rightarrow (ax_1, ax_2, ax_3) . \end{aligned}$$

- **Subtraktion** Die Differenz zweier Vektoren ist

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - y_2)\mathbf{e}_2 + (x_3 - y_3)\mathbf{e}_3 \\ &= \sum_i^3 (x_i - y_i)\mathbf{e}_i \Rightarrow (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3) . \end{aligned}$$

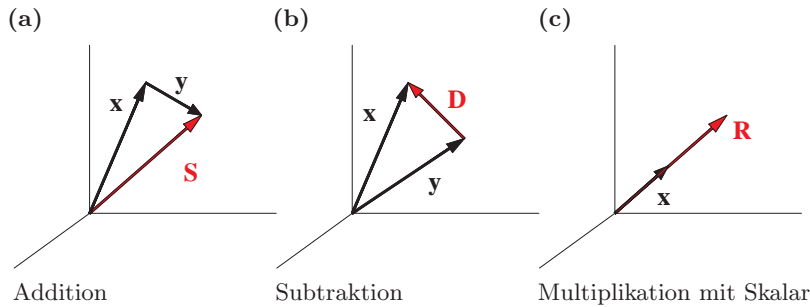


Abb. 3.10. Illustration zur quantitativen Vektorrechnung

Die Handhabung der beiden Produkte mit Vektoren ist nur wenig aufwendiger.

- Für das **Skalarprodukt** erhält man mit einigen einfachen Rechenschritten

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) &= (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) \cdot (y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + y_3 \mathbf{e}_3) \\&= \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \\&= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 .\end{aligned}$$

Kennt man die Komponentenzerlegung der beiden Vektoren, so erhält man das Skalarprodukt als Summe über die Produkte der jeweiligen Komponenten. Dies ist eine Zahl.

- Das **Vektorprodukt** kann mittels der Komponentenzerlegung ebenfalls geschlossen angegeben werden

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) &= \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} x_i y_j \mathbf{e}_k \\&= \sum_k \left[\sum_{i,j} \epsilon_{ijk} x_i y_j \right] \mathbf{e}_k .\end{aligned}$$

In den Rechenschritten wurden die angegebenen Rechenregeln und die Darstellung der Vektorprodukte der Einheitsvektoren benutzt. Als Ergebnis extrahiert man noch die Aussage: die k -te Komponente des Produktvektors ist

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_k = \sum_{i,j} \epsilon_{ijk} x_i y_j .$$

Hinter der Doppelsumme verbirgt sich jedoch, infolge der Eigenschaften des Levi-Civita Symbols, ein etwas einfacheres Ergebnis. Schreibt man die neun Beiträge für jede der Komponenten explizit aus, so stellt man fest, dass jeweils nur zwei von Null verschieden sind. Als Ergebnis dieser Fingerübung kann man notieren

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{e}_3 \\&\Rightarrow (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) .\end{aligned}$$

Die Merkregel für die Sequenz der Indizes lautet: In dem ersten Term jeder Komponente steht die zyklische Ergänzung zu den Komponentenindizes unter Beibehaltung der Reihenfolge der Faktoren. In dem zweiten Term steht die entsprechende antizyklische Ergänzung. Eine weitere Merkregel nimmt Bezug auf das Konzept der Determinante. Die Regel wird an der zuständigen Stelle (siehe Math.Kap. 3.2.4) aufgeführt.

Um aufzuzeigen, in welcher Weise sich die beiden Produkte mit Vektoren zur Diskussion von geometrischen oder trigonometrischen Problemen eignen, sollen einige explizite Aufgaben angedeutet werden.

- Aufgabe 1: Berechne den Abstand der Endpunkte der Vektoren $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ und $\mathbf{b} = (3, 0, 4)$ und bestimme den Winkel zwischen den Vektoren (Abb. 3.11a). Die Längenangaben sind in cm, m,

Zur Beantwortung der ersten Frage berechnet man den Betrag des Differenzvektors $D = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{14} = 3.7417 \dots$ (Abb. 3.11a). Bei der zweiten

Frage benötigt man den Betrag der beiden Vektoren ($a = \sqrt{3}$, $b = 5$), das Skalarprodukt der beiden Vektoren ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 7$) und erhält damit $\cos \varphi_{ab} = .8083 \dots$ und somit $\varphi_{ab} = .6296 \dots$ rad.

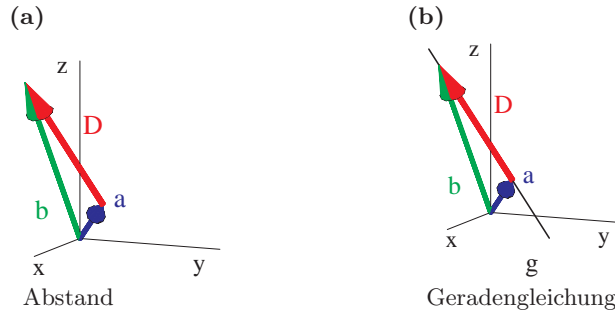


Abb. 3.11. Anwendungen der Vektorrechnung

- Aufgabe 2: Bestimme die Gleichung einer Geraden durch die Endpunkte der Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} (Abb. 3.11b).

Jeder Punkt der Geraden wird durch $\mathbf{x} = \mathbf{a} + s(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ beschrieben, wobei der Parameter s die Werte $-\infty \leq s \leq \infty$ annimmt (Abb. 3.11b). Die Komponenten dieser vektoriellen Geradengleichung entsprechen der Parameterdarstellung einer Geraden im Raum

$$x_i = a_i + s(b_i - a_i) \quad i = 1, 2, 3.$$

- Aufgabe 3: Bestimme die Gleichung einer Ebene im Raum, die den Endpunkt des Vektors \mathbf{r}_0 enthält und senkrecht auf einer gegebenen Richtung \mathbf{n} steht (Abb. 3.12).

Der Differenzvektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, wobei der Endpunkt von \mathbf{r} einen beliebigen Punkt der Ebene markiert, liegt in der Ebene. Die Orthogonalität der Vektoren $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ und \mathbf{n} wird durch das Skalarprodukt $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$ ausgedrückt. Alle Punkte der Ebene erfüllen (als Endpunkte des Vektors \mathbf{r}) diese Gleichung, die die **Hessesche Normalform** genannt wird. Eine explizite Ebenengleichung erhält man durch Übergang zu der Komponentenschreibweise (benutze (x, y, z))

$$(x - x_0)n_x + (y - y_0)n_y + (z - z_0)n_z = 0.$$

Dies entspricht der Standardform der Gleichung einer Ebene im Raum $Ax + By + Cz + D = 0$, die in der analytischen Geometrie benutzt wird (siehe auch Math.Kap. 4.1).

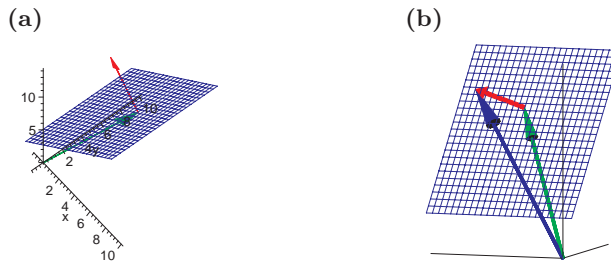


Abb. 3.12. Anwendung: Ebenengleichung

- Aufgabe 4: Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks im Raum, das von den Endpunkten der Vektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ aufgespannt wird (Abb. 3.13a).

Man bildet z.B. die Differenzvektoren $\mathbf{a} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ und $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ (andere Kombinationen sind möglich) und berechnet den Betrag des Vektorproduktes von \mathbf{a} und \mathbf{b} . Die Dreiecksfläche ist dann $F(\triangle) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|/2$. Daraus erhält man beim Übergang zu der Komponentendarstellung den Ausdruck

$$F(\triangle) = \frac{1}{2} [(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2]^{1/2},$$

der mit elementaren Mitteln nicht so leicht zu gewinnen ist.

- Aufgabe 5: Bestimme den kürzesten Abstand des Endpunktes des Vektors \mathbf{r}_0 von der Geraden $\mathbf{g} = \mathbf{r}_1 + s\mathbf{r}_2$ mit $-\infty \leq s \leq \infty$ (Abb. 3.13b).

Man betrachtet einen beliebigen Punkt der Geraden, charakterisiert durch den Parameter s_1 , und bildet den Differenzvektor

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{g}_1 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 - s_1\mathbf{r}_2,$$

der von dem Punkt der Geraden zu dem Endpunkt von \mathbf{r}_0 zeigt. Der gesuchte, kürzeste Abstand ist durch $d = |\mathbf{a}| \sin \varphi$ gegeben, wobei φ der Winkel zwischen der Geraden und dem Vektor \mathbf{a} ist. Diesen Winkel kann man über $|\mathbf{a} \times \mathbf{r}_2| = ar_2 \sin \varphi$ berechnen. Da man das Vektorprodukt $(\mathbf{a} \times \mathbf{r}_2)$ durch die vorgegebenen Vektoren ausdrücken kann

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{r}_2) = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2,$$

erhält man letztlich

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{r}_2|}{r_2} = \frac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2|}{r_2}.$$

Mit der Definition der Produkte aus zwei Vektoren ist die Möglichkeit gegeben, kompliziertere Produkte wie Dreier-, Vierer-, ...produkte zu betrachten. Ein öfter benutztes Produkt aus drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ist das **Spatprodukt**, das durch

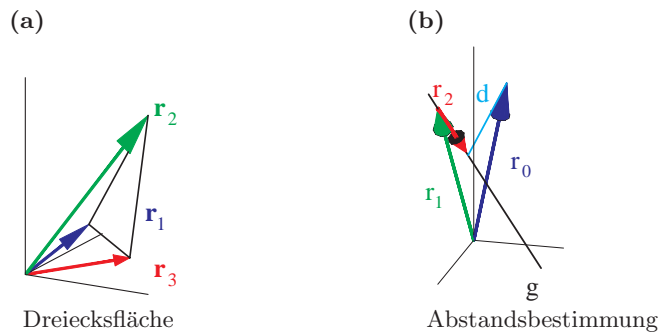


Abb. 3.13. Anwendungen

$$(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

definiert ist. Das Spatprodukt, eine skalare Größe, stellt den Rauminhalt des Parallelepiped dar, das von den drei Vektoren aufgespannt wird (Abb. 3.14). Der Vektor $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ steht senkrecht auf der Fläche, die von diesen beiden Vektoren aufgespannt wird und ist ein Maß für den Inhalt dieser Fläche. Die Projektion des Vektors \mathbf{a} auf den Vektor $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ entspricht der Höhe des Parallelepiped, so dass die Behauptung aus der Formel Volumen = Grundfläche mal Höhe folgt. Das Volumen ist also⁴

$$V(\text{P.flach}) = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = abc \cos \varphi_{a, \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \sin \varphi_{bc} ,$$

bzw. in der Komponentenzerlegung

$$V(\text{P.flach}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) ,$$

oder in der Kompaktform

$$V(\text{P.flach}) = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k .$$

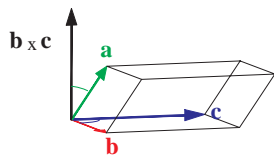


Abb. 3.14. Spatprodukt

Anhand der Komponentenzerlegung (oder anhand einer mehr geometrischen Betrachtung) kann man nachprüfen, dass sich bei zyklischer Vertauschung

⁴ Eine weitere Darstellung durch eine 3×3 Determinante findet man in Math.Kap. 3.2.4.

der Reihenfolge der Vektoren der Wert des Spatproduktes nicht ändert. Bei antizyklischer Vertauschung tritt ein Vorzeichenwechsel auf

$$(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \mathbf{c} \mathbf{a}) = (\mathbf{c} \mathbf{a} \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{c}) = -(\mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a}) = -(\mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{b}) .$$

Das Spatprodukt beschreibt einen ‘orientierten’ Rauminhalt des Parallelflachs.

Das Dreifachvektorprodukt

$$\mathbf{v} = (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))$$

ergibt eine Linearkombination der Vektoren \mathbf{b} und \mathbf{c} , wobei die Koeffizienten der Linearkombination durch das Skalarprodukt der jeweils anderen Vektoren gegeben sind

$$\mathbf{v} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} .$$

Diese Zerlegung nennt man den **Grassmannschen Entwicklungssatz**. Zur Illustration des Beweises dieses Satzes soll die 1- Komponente des Vektors \mathbf{v} betrachtet werden. Es ist

$$v_1 = a_2(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_3 - a_3(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_2$$

(Auswertung des äußeren Vektorproduktes)

$$= a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)$$

(Auswertung des inneren Vektorproduktes)

$$= b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)$$

(nach Sortierung und Ergänzung)

$$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_1 .$$

Ein entsprechendes Resultat findet man für die anderen Komponenten des Vektors \mathbf{v} .

Weitere Produkte, wie z.B. die Viererprodukte

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \implies \text{ein Skalar}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \implies \text{ein Vektor}$$

treten in der Mechanik (Physik) gelegentlich auf, sollen hier jedoch nicht diskutiert werden.

Die folgenden Ergänzungen in dem Abschnitt ‘Vektoren’ stellen erste Bemerkungen zu Themenkreisen dar, die im Rahmen der Überschrift ‘Lineare Algebra’ angeschnitten werden können aber erst zu einem späteren Zeitpunkt ausgebaut werden. Sie betreffen zum einen die Erweiterung der Betrachtungen auf n -dimensionale (Euklidische) Vektorräume, zum anderen die Frage nach schiefwinkligen Koordinatensystemen und deren Verallgemeinerung.

3.1.3 Ergänzungen I: n -dimensionale Vektorräume

Die folgende Aufforderung stellt eine gewisse Anforderung an das Abstraktionsvermögen dar: Man stelle sich einen Raum vor, der durch n (wobei n größer als 3 ist) paarweise aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren aufgespannt wird. Auch wenn das Vorstellungsvermögen Schwierigkeiten bereitet, ist die mathematische Fassung einer solchen Situation ohne Schwierigkeiten möglich.

Man bezeichnet einen Satz von Basisvektoren, die den anvisierten Raum aufspannen sollen, mit

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n$$

und fordert (analog zu der Situation im dreidimensionalen Raum) die Gültigkeit der Orthogonalitätsrelationen

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) = \delta_{ik} \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Die Aussage, dass die n Vektoren die Länge 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen, ist nur sinnvoll, wenn es gelingt, in dem von dieser Basis aufgespannten Raum die Grundkonzepte der Geometrie, also Längen, Abstände und Winkel, widerspruchsfrei zu definieren und zu handhaben.

Zu diesem Zweck beginnt man mit der Erweiterung der Komponentenzerglegung. Ein beliebiger Vektor in diesem Raum soll bezüglich der vorgegebenen Basis in der Form

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_n \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad a_i = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i)$$

dargestellt werden. In dem Sinn dieser Forderung kann man einen Vektor durch ein n -Tupel von Zahlen charakterisieren⁵

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Da man einen der Basisvektoren durch die Basisvektoren darstellen kann

$$\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n \delta_{ki} \mathbf{e}_i,$$

werden die Basisvektoren durch die n -Tupel

$$\mathbf{e}_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

repräsentiert, wobei für den Vektor \mathbf{e}_k die 1 an der k -ten Stelle steht.

Mit diesen Forderungen kann man das Vektorkalkül des dreidimensionalen Raumes einschließlich aller Rechenregeln auf n Raumdimensionen übertragen:

⁵ Hier wird, im Sinne einer Definition, das Gleichheitszeichen anstelle des Äquivalenzpfeiles benutzt.

- Addition

$$\mathbf{S} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \Rightarrow (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) .$$

- Multiplikation mit Skalar

$$\mathbf{R} = a\mathbf{x} \Rightarrow (ax_1, \dots, ax_n) .$$

- Subtraktion

$$\mathbf{D} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \Rightarrow (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) .$$

- Skalarprodukt

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n y_k \mathbf{e}_k \right) = \sum_{i,k=1}^n x_i y_k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^n x_i y_i .$$

Die Grundkonzepte der Geometrie kann man damit folgendermaßen fassen:
Die Länge eines Vektors ist durch das Skalarprodukt bestimmt

$$|\mathbf{a}| = [a_1^2 + \dots + a_n^2]^{1/2} .$$

Ist \mathbf{a} die Differenz von zwei Vektoren $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$, so bestimmt $|\mathbf{a}|$ den Abstand von zwei Punkten (den Endpunkten der Vektoren) im n -dimensionalen Raum. Zur Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren benutzt man ebenfalls das Skalarprodukt

$$\cos \varphi_{ab} = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} .$$

- Das Vektorprodukt wurde im dreidimensionalen Raum zur Festlegung der Orientierung des Koordinatendreiecks benutzt. Da die Benutzung eines links- oder rechtshändigen Systems eher eine Frage des Geschmacks denn der Notwendigkeit ist, verzichtet man im mehrdimensionalen Raum auf diese Festlegung. Eine Verallgemeinerung des Konzeptes des Vektorproduktes ist möglich, doch recht aufwendig.

Der hier angedeutete Euklidische Raum kann über dem Bereich der reellen oder der komplexen Zahlen definiert werden. Benutzt man reelle n -Tupel, so bezeichnet man den Raum mit $\mathcal{R}(n)$ oder \mathcal{R}_n , im Fall von komplexen n -Tupeln als $\mathcal{C}(n)$ oder \mathcal{C}_n . Zur mathematischen Fundierung der Quantenmechanik ist eine zusätzliche Erweiterung gefragt, der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$. Der entsprechende Raum über dem Bereich der komplexen Zahlen \mathcal{C}_∞ wird als Hilbertraum bezeichnet.

In der (speziellen) Relativitätstheorie spielt ein vierdimensionaler Raum, der Minkowskiraum, die zentrale Rolle. Unterschiede gegenüber dem Euklidischen Raum werden im nächsten Abschnitt angedeutet.

3.1.4 Ergänzungen II: Schiefwinklige Koordinatensysteme und Verallgemeinerung

Ein dreidimensionaler Raum kann auch von drei beliebigen Basisvektoren, die nicht in einer Ebene liegen oder zusammenfallen, aufgespannt werden (Abb. 3.15). Das Grunddreibein ist nicht orthogonal, auch müssen die Basisvektoren nicht auf 1 normiert sein. Zur Charakterisierung des Raumes

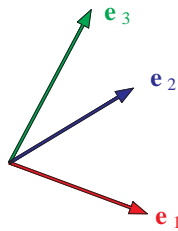


Abb. 3.15. Schiefwinkliges Koordinatendreibein

benutzt man auch hier die Skalarprodukte

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) = |\mathbf{e}_i| |\mathbf{e}_k| \cos \varphi_{ik} = g_{ik} \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Da die Skalarprodukte kommutativ sind, gilt

$$g_{ik} = g_{ki},$$

somit gibt es 6 unabhängige Größen. Die Größen g_{ii} charakterisieren die Länge der Basisvektoren. Die Größen $g_{ik} = g_{ki}$ mit $i \neq k$ charakterisieren die relative Lage ($\cos \varphi_{ik}$). Man bezeichnet diesen Satz von Größen aus diesem Grund als den **metrischen Tensor**. Ein kartesisches Koordinatensystem ist ein Spezialfall mit

$$g_{ik} = \delta_{ik}.$$

In einem schiefwinkligen Koordinatensystem kann man für einen beliebigen Vektor zwei verschiedene Komponentenzerlegungen angeben. Die Abbildungen geben die Situation der Übersicht wegen in der zweidimensionalen Welt wieder, die Formeln entsprechen jedoch der dreidimensionalen Welt.

1. Man kann einen Vektor \mathbf{a} senkrecht auf die Koordinatenrichtungen projizieren und zwar mit

$$a_i = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) \quad i = 1, 2, 3.$$

In diesem Fall gilt

$$\mathbf{a} \neq \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i.$$

2. Man kann den Vektor in Vektoren parallel zu den Koordinatenachsen zerlegen

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{e}_i .$$

Die zwei möglichen Zerlegungen eines Vektors

$$\mathbf{a} \Rightarrow (a_1, a_2, a_3)$$

$$\mathbf{a} \Rightarrow (a^1, a^2, a^3)$$

bezeichnet man als die Zerlegung in kovariante (untere Indizes, Abb. 3.16a) und kontravariante (obere Indizes, Abb. 3.6b) Komponenten. Die Frage

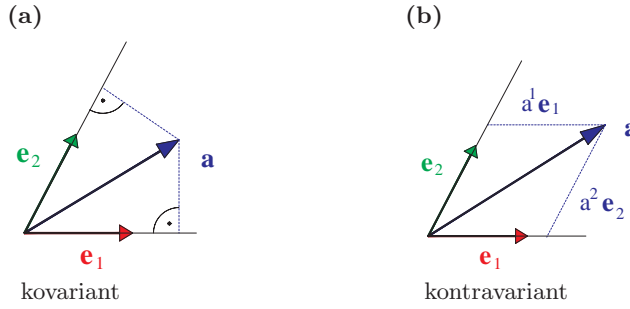


Abb. 3.16. Zur Zerlegung eines Vektors in Bezug auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem

nach dem Zusammenhang zwischen den Komponentenzerlegungen kann man folgendermaßen beantworten:

Aus der kontravarianten Zerlegung folgt

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) = \sum_k a^k (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i) ,$$

das heißt

$$a_i = \sum_k g_{ik} a^k .$$

Die beiden Zerlegungen sind durch den metrischen Tensor miteinander verknüpft.

Zur expliziten Charakterisierung des Zusammenhangs führt man ein **reziprokes Koordinatensystem** ein (Abb. 3.17), das durch

$$\mathbf{e}^1 = \frac{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)} \quad \mathbf{e}^2 = \frac{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)} \quad \mathbf{e}^3 = \frac{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)}$$

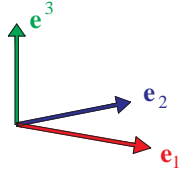


Abb. 3.17. Reziprokes Koordinatensystem: $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ ergibt \mathbf{e}^3

definiert ist. Der Ausdruck im Nenner $(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)$ ist ein Spatprodukt. Die Vektoren \mathbf{e}^i (obere Indizes) stehen jeweils senkrecht auf den Ebenen, die durch die zyklischen Ergänzungen des ursprünglichen Koordinatensystems aufgespannt werden. Es gilt deswegen

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_i = \delta_{ik} .$$

Für den Fall $i = k$ ist die Antwort offensichtlich, für den Fall $i \neq k$ genügt die Betrachtung eines Beispiels, um das Muster anzudeuten. Es ist

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^2 = \frac{(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)} = \frac{(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)} = 0 ,$$

da das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst verschwindet.

Alternativ kann man die Basisvektoren des reziproken Systems nach den Basisvektoren des ursprünglichen Systems entwickeln

$$\mathbf{e}^i = \sum_k g^{ik} \mathbf{e}_k .$$

Zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten g^{ik} bildet man

$$(\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_m) = \sum_k g^{ik} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m) .$$

Daraus folgt

$$\delta_{im} = \sum_k g^{ik} g_{km} ,$$

sowie

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^m) &= \sum_{kk'} g^{ik} g^{mk'} (\mathbf{e}_k \mathbf{e}_{k'}) \\ &= \sum_{kk'} g^{ik} g^{mk'} g_{k'k} \end{aligned}$$

oder

$$(\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^m) = g^{im} .$$

Die Entwicklungskoeffizienten g^{ik} bilden den metrischen Tensor des reziproken Systems. Das Argument zeigt auch, dass dieser nicht unabhängig von

dem metrischen Tensor des ursprünglichen Systems ist, sondern durch diesen eindeutig bestimmt ist (6 unabhängige Gleichungen für 6 Größen). Die Bezeichnung reziprokes System impliziert, dass die Umkehrung

$$\mathbf{e}_1 = \frac{(\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)}{(\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3)} \quad \text{etc.}$$

gilt, doch soll diese Aussage nicht demonstriert werden.

Die kontravarianten Komponenten sind die Komponenten eines Vektors in Bezug auf die ursprüngliche Basis, die kovarianten Komponenten sind die Komponenten eines Vektors in Bezug auf die reziproke Basis

$$\mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{e}^i,$$

denn es gilt

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_k) = \sum_i a_i (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k) = \sum_i a_i \delta_{ik} = a_k.$$

Für ein Skalarprodukt von zwei Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} existieren somit drei mögliche Formen

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \sum_{ik} a_i b_k (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k) = \sum_{ik} a_i b_k g^{ik} \\ &= \sum_{ik} a^i b^k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) = \sum_{ik} a^i b^k g_{ik} \\ &= \sum_{ik} a^i b_k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k) = \sum_i a_i b^i. \end{aligned}$$

Dies beinhaltet (wie man auch direkt zeigen kann), dass

$$a^i = \sum_k g^{ik} a_k$$

ist. Mit Hilfe des metrischen Tensors (oder seines reziproken) kann man die Zerlegungen ineinander umrechnen.

Zur Darstellung der Aussagen der klassischen Mechanik genügen kartesische Koordinatensysteme. Es gibt jedoch zwei Bereiche der Physik, in denen die Benutzung von schiefwinkligen Koordinatensystemen gefragt ist:

- (i) Die Kristallphysik, in der die Koordinatensysteme an die Kristallstruktur angepasst werden.
- (ii) Die (spezielle) Relativitätstheorie, in der Raum und Zeit zu einer Einheit zusammengefasst werden müssen. In dem entsprechenden vierdimensionalen Raum (t, x_1, x_2, x_3) sind die Basisvektoren zwar immer noch orthogonal, die Metrik weicht jedoch von der Euklidischen Form $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) = \delta_{ik}$ ab.

In beiden Fällen ist die Unterscheidung zwischen ko- und kontravarianten Komponentenzerlegungen notwendig.

3.2 Lineare Koordinatentransformationen, Matrizen und Determinanten

Ein weiteres Kapitel der linearen Algebra betrifft die Frage, wie man einen Übergang zwischen verschiedenen (kartesischen) Koordinatensystemen herstellt. Diese Frage ist in der Physik insofern wesentlich, als jeder ‘Beobachter’ die Ergebnisse seiner Experimente in Bezug auf ein spezifisches Koordinatensystem registriert. Die erforderliche Umschreibung zum Vergleich der Ergebnisse ist recht einfach für den Fall von uniformer Relativbewegung (zumindest aus der Sicht der klassischen Mechanik), gewinnt aber an Komplexität falls die Relativbewegung eine Drehung um eine gemeinsame Achse ist.

Eine kompakte Fassung der angesprochenen linearen Koordinatentransformationen basiert auf der Anwendung der Matrixrechnung. Um diese an der gebotenen Stelle einzuführen, wird der Abschnitt ‘Koordinatentransformationen’ in zwei Teile zerlegt (eine Einführung und einen Abschnitt, der die eigentlichen Punkte enthält). Unterbrochen wird dieses Thema von einem Abschnitt, in dem das Matrixkonzept und seine Handhabung aufbereitet wird. Den Abschluss bildet die Vorstellung des Begriffes der Determinante.

Die Einführung in diesen Themenkreis trägt die Überschrift

3.2.1 Lineare Koordinatentransformationen I

Die Diskussion von Koordinatentransformationen im dreidimensionalen Raum ist schon einigermaßen unübersichtlich. Aus diesem Grund ist es angebracht, mit Betrachtungen in der zweidimensionalen Welt zu beginnen und zwar mit der folgenden Situation (Abb. 3.18): Gegeben ist ein Vektor \mathbf{r} , der auf ein kartesisches Koordinatensystem bezogen ist

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 \quad \Rightarrow \quad (x_1, x_2) .$$

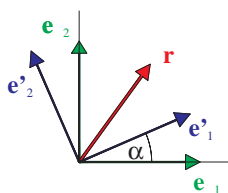


Abb. 3.18. Drehungen des Koordinatensystems im \mathcal{R}_2

Ein zweites Koordinatensystem, das um den Winkel α gegenüber dem ersten System gedreht ist, wird als das gestrichene Koordinatensystem bezeichnet. Die Einheitsvektoren, die dieses Koordinatensystem aufspannen, sind \mathbf{e}'_1 und \mathbf{e}'_2 . Die Komponentenzerlegung des Vektors \mathbf{r} in Bezug auf das zweite System lautet

$$\mathbf{r} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 .$$

Es gilt, die folgende Frage zu beantworten: Wie bestimmt man x'_1 und x'_2 , wenn x_1 , x_2 und α vorgegeben sind? Die Antwort erhält man, wenn man zunächst die Einheitsvektoren des gestrichenen Koordinatensystems durch die Einheitsvektoren des ungestrichenen Systems darstellt. Einfache Trigonometrie ergibt (siehe Abb. 3.19a)

$$\mathbf{e}'_1 = +\cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}'_2 = -\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2 .$$

Man hätte genau so gut umgekehrt vorgehen können und \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 durch die Basisvektoren des gestrichenen Koordinatensystems darstellen können (Abb. 3.19b). Die Umkehrformel erhält man aus den obigen Vektorgleichungen durch einfache Manipulation (Multiplikation mit $\cos \alpha$, $-\sin \alpha$, Addition, etc.)

$$\mathbf{e}_1 = \cos \alpha \mathbf{e}'_1 - \sin \alpha \mathbf{e}'_2$$

$$\mathbf{e}_2 = \sin \alpha \mathbf{e}'_1 + \cos \alpha \mathbf{e}'_2 .$$

Vergleich der beiden Sätze von Transformationsgleichungen zeigt, dass, wie

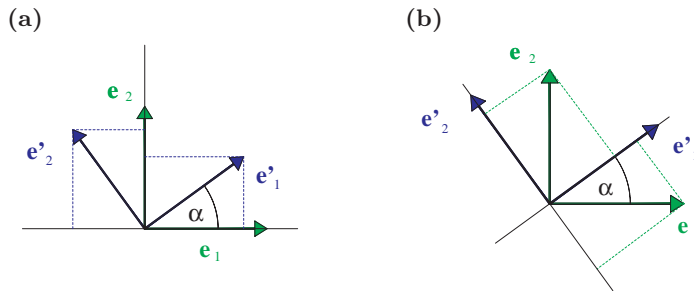


Abb. 3.19. Relation zwischen den Koordinatensystemen

zu erwarten, der Winkel α aus Sicht des ungestrichenen Systems dem Drehwinkel $-\alpha$ aus Sicht des gestrichenen Koordinatensystems entspricht. Die gewünschte Relation zwischen den zwei Sätzen von Komponenten des Vektors \mathbf{r} gewinnt man dann folgendermaßen:

- (1) Die zwei Zerlegungen beschreiben den gleichen Vektor. Es gilt also

$$x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 .$$

- (2) Setzt man eine der Transformationsgleichungen, z.B. für die gestrichenen Basis, ein, ordnet die Terme und vergleicht die Koeffizienten der Einheitsvektoren auf beiden Seiten, so findet man

$$x_1 = x'_1 \cos \alpha - x'_2 \sin \alpha$$

$$x_2 = x'_1 \sin \alpha + x'_2 \cos \alpha .$$

Die Umkehrung ist

$$x'_1 = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha .$$

Man stellt fest: Die Komponenten transformieren sich genau so wie die Basisvektoren. Die Transformationsgleichungen für die Basisvektoren sind jedoch ein Satz von Vektorgleichungen, die Transformationsgleichungen für die Komponenten ein Satz von algebraischen Gleichungen.

Die physikalische Bedeutung der Transformationsgleichungen ergibt sich aus der folgenden Interpretation: Nimmt man an, daß $x_1(t)$, $x_2(t)$ die Bewegung eines Massenpunktes beschreiben und dass sich das gestrichene Koordinatensystem in irgendeiner vorgegebenen Weise $\alpha(t)$ gegenüber dem ersten dreht, so ergibt der zweite Satz von Transformationsgleichungen zwischen den Koordinaten die Beschreibung des Bewegungsablaufes aus der Sicht eines Betrachters, der mit dem gestrichenen Koordinatensystem verbunden ist (Abb. 3.20). Dass dies keine müßige Betrachtung ist, folgt aus der Tatsache, dass das Bezugssystem Erde (z.B. aus der Sicht eines Systems, das zwar die Bewegung der Erde um die Sonne, aber nicht die tägliche Rotation mitmacht) ein solches Koordinatensystem darstellt.

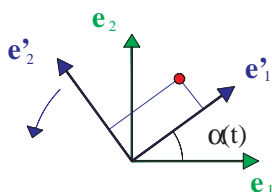


Abb. 3.20. Zur Interpretation der Transformationsgleichungen

Führt man eine weitere Drehungen des Koordinatensystems aus, so wird die Angelegenheit ein wenig komplizierter. Es ist nützlich, in diesem Fall mit drei Koordinatensystemen zu arbeiten:

- 1) dem ungestrichenen,

- 2) dem einfach gestrichenen, das wie zuvor um den Winkel α gegenüber dem ungestrichenen gedreht ist,
- 3) dem zweifach gestrichenen. Dieses ist um den Winkel β gegenüber System 2 und dem Winkel $(\alpha + \beta)$ gegenüber dem System 1 gedreht.

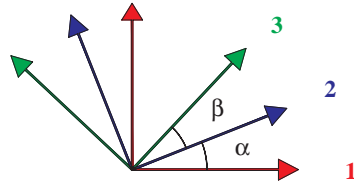


Abb. 3.21. Drei Koordinatensysteme bei zwei Drehungen

Einen Vektor \mathbf{r} (der unverändert in der Ebene liegt) kann man in Bezug auf jedes der Koordinatensysteme in Komponenten zerlegen und es können Transformationsgleichungen zwischen den drei Sätzen von Komponenten angegeben werden. So ist z.B.

$$\begin{aligned} x_1'' &= x_1' \cos \beta + x_2' \sin \beta \\ x_2'' &= -x_1' \sin \beta + x_2' \cos \beta . \end{aligned} \quad \mathbf{2} \xrightarrow{\beta} \mathbf{3}$$

Um die Transformation von System 1 in System 3 zu gewinnen, kann man den ersten Satz von Transformationsgleichungen in den zweiten einsetzen. Dies ergibt z.B.

$$x_1'' = x_1 \{ \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \} + x_2 \{ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \} ,$$

was wie zu erwarten, auch als

$$x_1'' = x_1 \cos(\alpha + \beta) + x_2 \sin(\alpha + \beta)$$

geschrieben werden kann. Die zugehörige Transformationsgleichung für die 2-Koordinate lautet

$$x_2'' = -x_1 \sin(\alpha + \beta) + x_2 \cos(\alpha + \beta) .$$

Das Hintereinanderausführen von Transformationen (hier einfachen Drehungen) wird durch das Einsetzen von Transformationsgleichungen ineinander korrekt beschrieben. Dieses explizite Einsetzen wird jedoch sehr unübersichtlich, wenn man entweder eine größere Anzahl von Transformationen hintereinander ausführen soll oder wenn man in höherdimensionalen Räumen arbeitet. Der Fall $n = 3$ würde schon einen deutlich größeren Schreibaufwand erfordern. Ein elegantes Hilfsmittel zur Formulierung solcher Aufgaben ist die Matrixrechnung, die im nächsten Abschnitt dargestellt werden soll.

3.2.2 Matrizen

Die einfache Grunddefinition lautet:

Eine rechteckige Anordnung von (reellen) Zahlen bezeichnet man als eine Matrix.

So z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Die Indizes in dem rechten Schema geben die Spalten bzw. die Zeilenpositionen an. So steht das Element a_{ik} in der i -ten Zeile und der k -ten Spalte. Dabei ist jedoch zu beachten, dass diese Zuordnung nicht genormt ist. Man muss sich bei jedem Text vergewissern, welcher Index Zeilen- bzw. Spaltenindex ist. Eine allgemeine Matrix sieht demnach folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \\ \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ \text{M Zeilen} \\ \\ \end{matrix}$$

\leftarrow N Spalten \rightarrow

Die übliche Notation für Matrizen ist (Varianten unbenommen)

- = \mathbf{A} um anzudeuten, daß es sich um eine Matrix \mathbf{A} handelt.
- = $(a_{ik})_{M,N}$ um die Matrix durch ihre Elemente und die Dimension des Schemas zu charakterisieren.
- = $(A)_{M,N}$ um die Matrix und ihre Dimension abgekürzt anzudeuten.

Als Beispiele für Matrizen kann man insbesondere betrachten

- 1) Die Matrix der Koeffizienten der Transformationsgleichungen für Drehungen in einer zweidimensionalen Welt

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein Beispiel für eine 2×2 Matrix. Im Allgemeinen nennt man eine Matrix mit $M = N$ **quadratisch**.

- 2) Die Komponentendarstellung von Vektoren im \mathcal{R}_2 und \mathcal{R}_3 (wobei das Gleichheitszeichen endgültig übernommen wird)

$$\mathbf{r} = \begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \text{oder } (x_1, x_2) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \text{oder } (x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (\text{mit oder ohne Komma}).$$

Dies sind Beispiele für einzeilige oder einspaltige Matrizen. Die Spalten- oder Zeilenform zur Darstellung von Vektoren wird wahlweise benutzt.

Aus diesem Beispiel ergibt sich die Sprechweise: Für eine allgemeine Matrix \mathbf{A} bezeichnet man

$(a_{i1} \dots a_{iN})$ als den i – ten Zeilenvektor

$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{Mk} \end{pmatrix}$ als den k – ten Spaltenvektor .

Bezüglich der Rechenoperationen mit Matrizen lautet die Behauptung: Mit Matrizen kann man (fast) wie mit Zahlen rechnen. Vor der Erläuterung der möglichen Operationen ist jedoch noch die Vervollständigung der Liste von nützlichen Begriffen notwendig.

- (i) Die Kette von Elementen a_{11}, a_{22}, \dots einer Matrix \mathbf{A} bezeichnet man als die **Hauptdiagonale**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \\ & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & \dots & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} .$$

- (ii) Spiegelt man eine Matrix an der Hauptdiagonalen, so erhält man die **transponierte** Matrix \mathbf{A}^T (Varianten in der Notation sind angedeutet)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T = \{\mathbf{A}' = \mathbf{A}^*\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} .$$

Ein konkretes Beispiel ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgrund der Definition folgt auch

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} .$$

Die Transponierte der transponierten Matrix ist die ursprüngliche Matrix.

- (iii) Zwei Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} heißen **gleichartig**, wenn sie die gleiche Anzahl von Zeilen und die gleiche Anzahl von Spalten besitzen

$$M_A = M_B \quad N_A = N_B .$$

(Zeilen) (Spalten)

- (iv) Zwei Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} heißen **gleich**, wenn sie gleichartig sind und wenn an gleicher Stelle stehende Elemente übereinstimmen

$$M_A = M_B \quad N_A = N_B \quad \text{und} \quad a_{ik} = b_{ik} .$$

Man schreibt dann $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Rechenoperationen mit Matrizen sind Addition, Multiplikation mit einer Zahl, Subtraktion, Matrixmultiplikation und Matrixinversion.

- Die Definition der Addition von Matrizen orientiert sich an der Addition von Vektoren, die, wie oben angedeutet, als eine spezielle Matrix aufgefasst werden können.

Sind $\mathbf{A} = (a_{ik})$ und $\mathbf{B} = (b_{ik})$ zwei gleichartige Matrizen, so nennt man die Matrix \mathbf{C} mit den Elementen $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ die Summe der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B}

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \text{mit} \quad c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} .$$

Ein direktes Beispiel sagt an dieser Stelle mehr als jede weitere Erklärung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 3 & 3 \end{pmatrix} ,$$

die Vektoraddition (hier in Spaltenform) ist ein Spezialfall

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} .$$

Zu betonen ist noch einmal: Die Matrizenaddition ist nur für gleichartige Matrizen definiert.

- Entsprechend knapp kann man die zweite Operation, die Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl, als Erweiterung der entsprechenden Operation mit Vektoren angeben.

Ist \mathbf{A} eine Matrix und α eine (reelle) Zahl, dann ist $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{A}$ die Matrix mit den Elementen $(c_{ik}) = (\alpha a_{ik})$.

Im Detail sieht dies folgendermaßen aus

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} .$$

Für diese Operationen mit Matrizen gelten eine Reihe von **Rechenregeln**, die hier ohne Kommentar zusammengestellt sind:

Kommutativgesetz der Addition: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

Assoziativgesetz der Addition : $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

Distributivgesetze : $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

: $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

Rechenregeln für Transposition : $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$

: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

Ist $\alpha = 0$, so erhält man die sogenannte **Nullmatrix**

$$0 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

- Die Differenz zweier Matrizen ergibt sich aus den obigen Definitionen zu

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \quad \text{mit} \quad d_{ik} = a_{ik} - b_{ik}.$$

Auch die Differenz ist nur für gleichartige Matrizen definiert.

- Die Definition der Multiplikation zweier Matrizen orientiert sich, wie oben angedeutet, an dem Hintereinanderausführen von Koordinatentransformationen. Eine gute Anzahl von mathematischen Aufgaben und physikalischen Fragestellungen kann auf diese Weise kurz und prägnant formuliert werden. Die Definition dieser Operation ist etwas aufwendiger.

Ist \mathbf{A} eine Matrix mit M Zeilen und N Spalten ($\mathbf{A} = (a_{ik})_{M,N}$) und \mathbf{B} eine Matrix mit N Zeilen und R Spalten ($\mathbf{B} = (b_{ik})_{N,R}$) so bezeichnet man die Matrix \mathbf{C} mit M Zeilen und R Spalten ($\mathbf{C} = (c_{ik})_{M,R}$) und den Elementen $c_{ik} = \sum_{j=1}^N a_{ij}b_{jk}$ als das Produkt der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}.$$

Diese Definition erfordert eine gewisse Erläuterung. Die Matrix \mathbf{A} hat M Zeilen und N Spalten. Die i -te Zeile wird herausgegriffen. Die Matrix \mathbf{B} hat N Zeilen und R Spalten. Betrachtet wird insbesondere die k -te Spalte.

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{iN} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ M \\ \downarrow \end{matrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{Nk} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ N \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots & c_{ik} & \dots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ M \\ \downarrow \end{matrix}$$

$\longleftarrow N \longrightarrow \qquad \qquad \longleftarrow R \longrightarrow \qquad \qquad \longleftarrow R \longrightarrow$

Das Element c_{ik} der Produktmatrix hat die Form

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{iN}b_{Nk}.$$

Dies bedeutet: Erstes Element der i -ten Zeile von \mathbf{A} mal erstes Element der k -ten Spalte von \mathbf{B} plus das Gleiche für das jeweilige zweite Element, etc. Die Merkregel ist also: Jede Zeile der Matrix \mathbf{A} wird mit jeder Spalte der Matrix \mathbf{B} kombiniert. Da die Matrix \mathbf{A} M Zeilen und die Matrix \mathbf{B} R Spalten hat, besteht die Produktmatrix aus M Zeilen und R Spalten. Die Operation ist nur definiert, wenn die Gestalt der beiden Faktoren aufeinander abgestimmt ist. Die Spaltenzahl von \mathbf{A} muss mit der Zeilenzahl von \mathbf{B} übereinstimmen.

Einige Beispiele sollen diese Operation illustrieren. Das erste Beispiel ist ein direktes Beispiel für die formale Durchführung der Matrixmultiplikation.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

Das Produkt einer 2×3 Matrix mit einer 3×2 Matrix ergibt eine 2×2 Matrix. Die äußeren Indizes in jedem der Summanden entsprechen der Zeilen- und Spaltenposition der Produktmatrix.

Das zweite Beispiel ist ein numerisches Beispiel zum Nachrechnen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 & 16 \\ 8 & 16 & 24 & 32 \\ 12 & 24 & 36 & 48 \\ 16 & 32 & 48 & 64 \end{pmatrix}.$$

In dem dritten Beispiel wird das Transformationsgesetz für Vektorkomponenten zweier gegeneinander gedrehten Koordinatensysteme im \mathcal{R}_2 formuliert. Man schreibt

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} && \text{für die Komponenten des Vektors bezüglich} \\ &&& \text{des ungestrichenen Systems} \\ \mathbf{x}' &= \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} && \text{entsprechend bezüglich des gestrichenen} \\ &&& \text{Systems} \\ \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} && \text{für die Drehmatrix, die den Übergang zwischen den} \\ &&& \text{beiden Systemen vermittelt.} \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' = \mathbf{D}\mathbf{x} &\implies \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Darstellung der Vektoren als Spalten ist nicht zwingend, doch ist diese Form (schon aus typographischen Gründen) die übliche.

Das vierte Beispiel illustriert das Hintereinanderausführen von Transformationen

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\beta)\mathbf{D}(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \mathbf{D}(\alpha + \beta) .\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist folgendermaßen zu lesen: Eine Drehung um α im \mathcal{R}_2 gefolgt von einer Drehung um β entspricht einer Drehung um $\alpha + \beta$.

Das fünfte Beispiel lautet: Ein lineares Gleichungssystem von M Gleichungen in N Unbekannten lässt sich ebenfalls in Matrixform schreiben

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N &= b_M .\end{aligned}$$

Setzt man

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ & \ddots & \\ a_{M1} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

so lautet die entsprechende Matrixgleichung

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} .$$

Die Beispiele 3 und 5 deuten an, dass zwischen der Diskussion von Gleichungssystemen und der Transformation von Vektoren (in höherdimensionalen Räumen) ein enger Zusammenhang besteht.

Man kann auch das Skalarprodukt von Vektoren in Matrixform fassen. Mit der Verabredung über die Matrixdarstellung von Vektoren in der Form von Spalten und den Aussagen über die Transposition von Matrizen gilt z.B. im \mathcal{R}_3

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^T \mathbf{x} &= (y_1 \ y_2 \ y_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3) \\ &\implies (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) .\end{aligned}$$

Das Ergebnis der Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor ist eine 1×1 Matrix, ein Skalar.

Für Matrixprodukte gibt es eine Reihe von **Rechenregeln**. Der Nachweis einiger dieser Rechenregeln in voller Allgemeinheit ist nicht trivial. Trotzdem wird auf die Beweisführung verzichtet, da diese sich (wenn auch etwas langatmig) aus der Definition und den entsprechenden Rechenregeln für Zahlen ergeben. Die Regeln werden jedoch mit einem entsprechenden Kommentar aufgeführt.

Regel 1: Es gilt das Assoziativgesetz

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) .$$

Als Einschränkung ist zu betonen: Die Gestalt der drei Matrizen muss aufeinander abgestimmt sein.

$$(A)_{MN}(B)_{NR}(C)_{RS} = (D)_{MS} .$$

Regel 2: Distributivgesetze sind

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C} \quad \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C}\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{B} .$$

Regel 3: Für die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl gilt

$$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) .$$

Regel 4: Schon erwähnt wurde, wenn auch indirekt: Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ. Man darf die Reihenfolge der Faktoren im Allgemeinen nicht vertauschen

$$\text{i.A.} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\mathbf{A} .$$

Dies ist offensichtlich für den Fall von Produkten mit nichtquadratischen Matrizen, so z.B.

$$(A)_{MN}(B)_{NM} = (C)_{MM} \quad (B)_{NM}(A)_{MN} = (C)_{NN} .$$

In dem ersten Fall erhält man eine $M \times M$ in dem zweiten eine $N \times N$ Matrix. Jedoch auch bei Produkten mit quadratischen Matrizen ist die Vertauschbarkeit nicht unbedingt gegeben, wie das folgende Beispiel zeigt

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Auf der anderen Seite gibt es im Fall von quadratischen Matrizen auch Situationen, in denen Vertauschbarkeit vorliegt. Man kann explizit nachrechnen, dass für zwei Drehungen in der Ebene gilt

$$\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{D}(\beta) = \mathbf{D}(\beta)\mathbf{D}(\alpha) = \mathbf{D}(\alpha + \beta) .$$

Aus anschaulicher Sicht bedeutet diese Aussage: Es spielt keine Rolle in welcher Reihenfolge man Drehungen in einer Ebene durchführt. Die Situation ist in Bezug auf Drehungen in der dreidimensionalen Welt nicht so einfach (siehe z.B. Buch.Kap. 6.2).

Regel 5: Eine nützliche Regel ist die Aussage über die Transposition von Produkten

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T .$$

Die Transponierte eines Produktes ist gleich dem Produkt der Transponierten mit vertauschter Reihenfolge. Der Beweis dieser Aussage beinhaltet die Bemerkungen

(a) Nur mit der angegebenen Reihenfolge ist die Anpassungsregel erfüllt

$$(A)_{MR}(B)_{RN} = (C)_{MN} \longrightarrow \mathbf{C}^T = (\tilde{C})_{NM}$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = (\tilde{B})_{NR}(\tilde{A})_{RM} = (\tilde{C})_{NM} .$$

(b) Danach genügt das Ausschreiben des mit ik indizierten Elementes auf beiden Seiten.

Regel 6: Im Rahmen der Diskussion der Multiplikation ist die Frage nach einem **Einheitselement** von Bedeutung. Die Einheitsmatrix ist definiert als

$$\mathbf{E} = (\delta_{ik})_{NN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Das Einheitselement ist eine quadratische Matrix mit der Zahl 1 in den Elementen der Hauptdiagonalen und 0 in den außerdiagonalen Elementen. Diese Matrix hat die Eigenschaft

$$(A)_{MN}(E)_{NN} = (E)_{MM}(A)_{MN} = (A)_{MN}$$

oder kurz

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A} .$$

Als letzte Rechenoperation mit Matrizen ist die ‘Matrixdivision’ oder korrekter die Frage nach der **Matrixinversen** zu betrachten. Eine Matrix \mathbf{B} , für die gilt

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E} ,$$

nennt man die Inverse der Matrix \mathbf{A} und schreibt

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} .$$

Da die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist, muss man im Allgemeinen zwischen einer Linksinversen und einer Rechtsinversen unterscheiden

$$\text{Rechtsinverse} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}_R^{-1} = \mathbf{E}$$

$$\text{Linksinverse} \quad \mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Für Matrizen mit beliebiger Gestalt ist die Situation bezüglich der Inversen kompliziert, wie das folgende direkte Beispiel zeigt. Für die 3×2 Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

existiert eine Linksinverse, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Rechtsinverse müsste gelten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die erste Spalte der Produktmatrix auf der linken Seite der Gleichung erfordert

$$\begin{aligned} a + 2d &= 1 \\ a - 2d &= 0 \\ a + 2d &= 0 \end{aligned} \Bigg\} \longrightarrow a = d = 0 \implies \text{Widerspruch}.$$

Die Gleichungen widersprechen sich. Eine Rechtsinverse existiert nicht.

Für quadratische Matrizen gelten jedoch die folgenden Aussagen

- Existiert eine der Inversen, so folgt daraus die Existenz der anderen. Der Beweis dieser Aussage ist langwierig und erfordert Mittel, die noch nicht aufbereitet sind.
- Aus der Existenz beider Inversen folgt dann

$$\mathbf{A}_L^{-1} = \mathbf{A}_R^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Die beiden Inversen sind gleich. Der Beweis ist

$$\mathbf{A}_L^{-1} = \mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}_R^{-1} = \mathbf{E}\mathbf{A}_R^{-1} = \mathbf{A}_R^{-1}.$$

Quadratische Matrizen, die eine Inverse besitzen, bezeichnet man als **umkehrbar** oder **regulär**, quadratische Matrizen, die keine Inverse besitzen als **singulär**. Ein direktes Kriterium, mit dessen Hilfe man die Frage nach der Existenz der Inverse von quadratischen Matrizen beantworten kann, wird sich bei der Diskussion von Determinanten ergeben (Math.Kap. 3.2.4).

Für reguläre Matrizen existieren eine Reihe von nützlichen Rechenregeln:

1. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ (die Inverse eines Produktes)
2. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ (die Inverse der Inversen)
3. $(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}$ $\alpha \neq 0$
4. $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ (Vertauschung der Operationen)

Die zugehörigen Beweise (ohne Kommentar) sind untenstehend zusammengestellt:

1. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Beweis:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{EB} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) \\ \mathbf{E} = (\mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{AB}) \end{array} \right\} \Longleftrightarrow (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

2. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

Beweis:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E} \implies (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}$$

Mit 1. : $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = (\mathbf{AA}^{-1})^{-1} = \mathbf{E} \implies (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

3. $(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}$.

Beweis:

$$(\alpha\mathbf{A})^{-1}(\alpha\mathbf{A}) = \mathbf{E} \implies \alpha(\alpha\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

$$\implies (\alpha\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{EA}^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}.$$

4. $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

Beweis:

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{E}^T = \mathbf{E}$$

$$\implies \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{E} \quad (\text{siehe Transpositionsregel})$$

$$\implies (\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} \quad \text{da} \quad (\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}.$$

Mit dem Matrixkalkül als Formulierungshilfe kann nun die Diskussion der linearen Koordinatentransformationen fortgesetzt werden.

3.2.3 Lineare Koordinatentransformationen II

Nach dieser Aufbereitung einer kompakten mathematischen Sprache für die Darstellung von Koordinatentransformationen folgen noch einige Details zu Transformationen in der zweidimensionalen Welt. Die bisher betrachteten Drehungen

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

kann man auf zwei verschiedene Weisen veranschaulichen.

Bei der bisherigen Interpretation wurde das Koordinatensystem gedreht, der Vektor \mathbf{x} blieb unverändert. Die Transformationsgleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen den Komponenten des Vektors bezüglich der beiden Koordinatensysteme. Aus der Sicht des Vektors ist dies eine passive Betrachtungsweise (Abb. 3.22a).

Man kann jedoch auch den Standpunkt einnehmen, dass der Vektor gedreht und aus der Sicht eines festen Koordinatensystem betrachtet wird. Die Transformationsgleichung besagt dann: Der Vektor \mathbf{x}' ist gegenüber dem Vektor \mathbf{x} um den Winkel $-\alpha$ gedreht. Die Illustration dieser Aussage kann direkt durchgeführt werden

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \cos \varphi \\ x \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi \\ -\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \cos(\varphi - \alpha) \\ \sin(\varphi - \alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Vektor \mathbf{x}' ist ein Vektor mit der gleichen Länge in der Richtung $\varphi - \alpha$. Aus der Sicht der Vektoren ist dies eine aktive Betrachtungsweise (Abb. 3.22b).

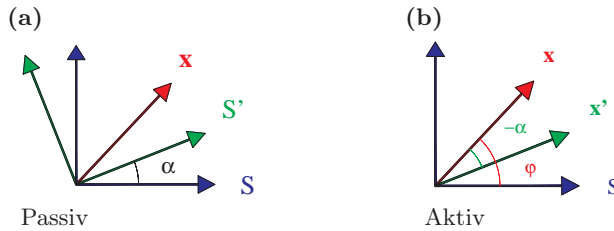


Abb. 3.22. Passive und aktive Interpretation der Koordinatentransformation

Eine allgemeine lineare Transformation im \mathcal{R}_2 hat die Form

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \implies \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Die Frage lautet: Was stellt diese Transformationsgleichung (in Matrixform) dar?

Falls $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ ist, reduziert sich die Aussage auf

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

In passiver Interpretation stellt man fest: Der Ursprung des Koordinatensystems S' ist um den Vektor $-\mathbf{b}$ gegenüber dem Ursprung des Systems S verschoben (Abb. 3.23a). Der Vektor \mathbf{x} aus der Sicht von S entspricht dem Vektor $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{b}$ aus der Sicht von S' . Bei aktiver Interpretation würde man sagen: Jeder Vektor \mathbf{x}' geht aus \mathbf{x} durch Addition eines Vektors \mathbf{b} hervor (Abb. 3.22b).

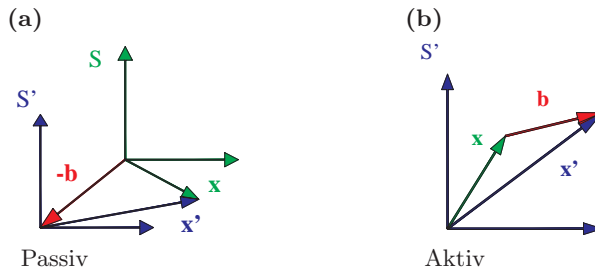


Abb. 3.23. Illustration von Transformationen im \mathcal{R}_2 : Translation

Im Folgenden wird diese Parallelverschiebung nicht weiter berücksichtigt, also nur die homogene, lineare Transformation

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

zunächst anhand von Beispielen, betrachtet. Dabei wird die aktive Interpretation benutzt. Das erste Beispiel ist

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Der ursprüngliche Vektor $(1, 1)$ wird gedreht und gestreckt (Abb. 3.24). Sonderfälle einer solchen **Drehstreckung** sind die reine Drehung und die reine Streckung

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}.$$

Das zweite Beispiel

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

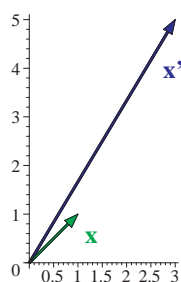


Abb. 3.24. Illustration von Transformationen im \mathcal{R}_2 : Drehstreckung

stellt eine **Projektion** auf die 1- oder x -Achse (Abb. 3.25a) dar. Dabei geht jeder Vektor \mathbf{x} mit der gleichen x_1 -Komponente in den gleichen Vektor \mathbf{x}' über. Etwas allgemeiner wäre die Transformation

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine Projektion auf die 1-Achse mit einer Streckung (Abb. 3.25b).

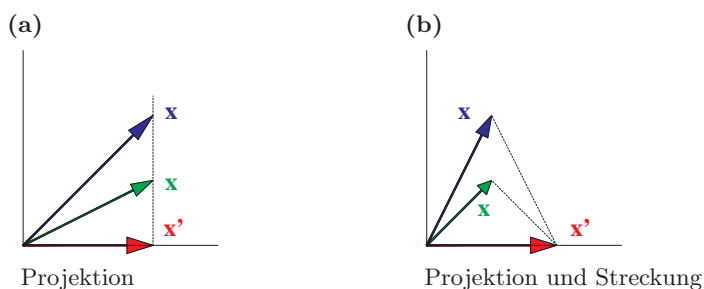


Abb. 3.25. Illustration von Transformationen im \mathcal{R}_2

Die angeführten Beispiele unterscheiden sich in der folgenden Weise: In dem ersten Beispiel entspricht jedem Vektor \mathbf{x} ein eindeutiger Vektor \mathbf{x}' und umgekehrt. Der Grund ist: Die Transformationsmatrix ist regulär. Die inverse Matrix ist

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

die Matrixgleichung $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ kann in der Form $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}'$ aufgelöst werden.

Für die Projektion ergeben eine Vielzahl von Vektoren \mathbf{x} den gleichen Vektor \mathbf{x}' . Die Transformationsmatrix ist singulär. Es existiert keine Inverse

zu \mathbf{A} und eine Auflösung in der Form von $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}'$ ist nicht möglich.

Die beiden Beispiele entsprechen einer Grobklassifikation der möglichen Transformationen.

Ist \mathbf{A} regulär \longrightarrow Drehstreckung

Ist \mathbf{A} singular \longrightarrow Projektionen.

Eine Unterklasse der regulären Transformationen sind die **orthogonalen Transformationen**. Diese sind durch die Aussage charakterisiert

Orthogonale Transformationen verändern Skalarprodukte nicht (lassen das Skalarprodukt invariant).

Die Länge von Vektoren und die Winkel zwischen ihnen ändern sich nicht. Orthogonale Transformationen sind längen- und winkeltreu. Zur Charakterisierung der orthogonalen Transformationen benutzt man das folgende Argument: Ausgehend von den Bildern zweier Vektoren

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

fordert man die Invarianz des Skalarproduktes

$$\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}'^T \cdot \mathbf{x}' .$$

Setzt man auf der rechten Seite die Transformationsgleichungen ein, so erhält man

$$\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} .$$

Die beiden Seiten stimmen überein, falls für die Transformationsmatrix

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

oder

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$$

gilt. Die Inverse der Transformationsmatrix ist gleich der Transponierten (vorausgesetzt die Inverse existiert).

Die Matrixgleichung entspricht im \mathcal{R}_2 drei einschränkenden Bedingungen für die Transformation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

oder explizit

- (1) $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$
- (2) $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$
- (3) $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$.

Diesen drei Bedingungen kann man die Aussagen entnehmen:

Aus (1) und (3) folgt: Keines der vier Matrixelemente kann größer als 1 sein ($|a_{ik}| \leq 1$).

Für die vier (reellen) Elemente existieren drei Bedingungen. Man kann also ein Element bis auf die Einschränkung (i) beliebig vorgeben. Die restlichen Elemente sind dann bis auf Vorzeichen durch die (quadratischen) Bedingungen festgelegt.

Wählt man ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$a_{11} = \cos \alpha ,$$

so erhält man aus Gleichung (1)

$$a_{21} = \pm \sin \alpha .$$

Aus Gleichung (2) folgt

$$a_{11}^2 a_{12}^2 = a_{21}^2 a_{22}^2 .$$

Substituiert man a_{12}^2 aus Gleichung (3) und sortiert nach a_{22}^2

$$a_{22}^2 = a_{11}^2 / (a_{11}^2 + a_{21}^2) = a_{11}^2 ,$$

so findet man

$$a_{22} = \pm \cos \alpha .$$

Aus Gleichung (3) folgt dann

$$a_{12} = \pm \sin \alpha .$$

Die möglichen Vorzeichenkombinationen werden jedoch durch Gleichung (2) eingeschränkt (vier anstatt acht Möglichkeiten):

Ist $a_{11} = +a_{22}$, so folgt $a_{21} = -a_{12}$.

Ist $a_{11} = -a_{22}$, so folgt $a_{21} = +a_{12}$.

Es verbleibt somit

(a) Ist $a_{11} = +a_{22}$, so kann man die Matrix in der Form

$$\mathbf{A}_D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \pm \sin \alpha \\ \mp \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

darstellen. Sie beschreibt Drehungen um den Winkel $\pm \alpha$. Aus aktiver Sicht entspricht der Drehung des Vektors \mathbf{x} um den Winkel α die untere Vorzeichenkombination.

(b) Ist auf der anderen Seite $a_{11} = -a_{22}$, so lautet die Darstellung der Matrix

$$\mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \pm \sin \alpha \\ \pm \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} .$$

Diese Transformation beschreibt Spiegelungen an einer Geraden mit der Steigung $m = \pm \tan \alpha$ durch den Koordinatenursprung.

Zur Überprüfung dieser Aussage folgt die einfache Rechnung:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \varphi) \\ \sin(\alpha - \varphi) \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Der (Einheits-)Vektor \mathbf{x} mit der Richtung φ und der Vektor \mathbf{x}' mit der Richtung $(\alpha - \varphi)$ sind spiegelbildlich zu der Geraden mit $m = \tan \alpha/2$ (Abb. 3.26). Dass es sich hier wirklich um eine Spiegelung (und nicht um eine Drehung)

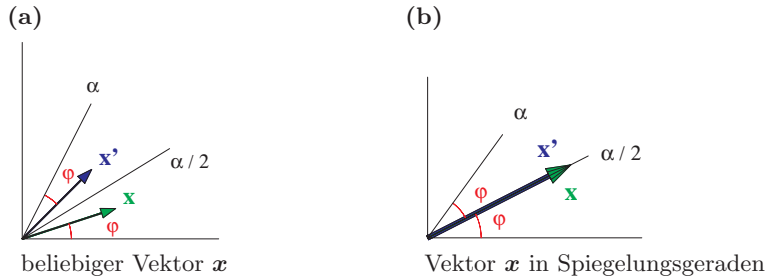


Abb. 3.26. Illustration von Transformationen im \mathcal{R}_2 : Spiegelung

handelt, ergibt sich aus der folgenden Überlegung: Ist $\varphi = \alpha/2$, so folgt

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \cos \alpha/2 \\ \sin \alpha/2 \end{pmatrix} = \mathbf{x} .$$

Vektoren in der Spiegelungsgeraden verändern sich nicht. Bei Drehungen um einen Winkel $\alpha \neq 0$ wird hingegen jeder Vektor verändert. Spiegelungen und Drehungen unterscheiden sich noch in der folgenden Weise: Bei Drehungen bleibt die relative Orientierung der beiden Vektoren erhalten, bei der Spiegelung wird sie vertauscht. Dies ist mit der Forderung der Invarianz des

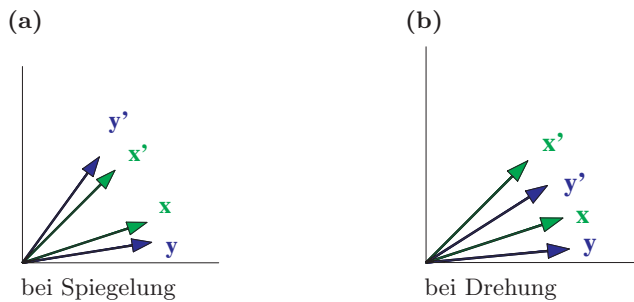


Abb. 3.27. Orthogonale Transformationen im \mathcal{R}_2 : Zur Invarianz des Skalarproduktes

Skalarproduktes vereinbar, da der Kosinus, der in der Definition des Skalarproduktes auftritt, eine gerade Funktion ist.

Eine entsprechende Diskussion von linearen Transformationen im \mathcal{R}_3 ist deutlich aufwendiger, so dass nicht alle Details ausgeführt werden. Für eine Transformation

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \longrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ist die Grobklassifikation wieder

Ist \mathbf{A} singulär \longrightarrow Projektionen (auf Geraden und Ebenen),
so z.B. eine Projektion auf die x_1 Achse

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ist \mathbf{A} regulär \longrightarrow Drehstreckung (Schraubungen).

Etwas eingehender sollen nur die orthogonalen Transformationen betrachtet werden. Da die Kompaktfom der Transformationsgleichungen genau die gleiche ist wie im Fall des \mathcal{R}_2 , ergibt die Forderung nach der Invarianz des Skalarproduktes wieder die Bedingung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E},$$

die im Detail

$$\sum_{l=1}^3 a_{li} a_{lk} = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

entspricht. Es gibt sechs einschränkende Bedingungen, da eine Vertauschung von i und k keine neue Aussage liefert. Die ursprüngliche Transformationsmatrix enthält 9 Elemente. Mit den 6 Bedingungen folgt die Aussage, dass orthogonale Transformationen im \mathcal{R}_3 durch (maximal) 3 Parameter charakterisiert werden.

Diese orthogonalen Transformationen entsprechen wiederum Drehungen (um beliebige Achsen durch den Koordinatenursprung) und Spiegelungen (an Ebenen und Geraden, die durch den Ursprung verlaufen). Die Erarbeitung der allgemeinen Form der Transformationsmatrix ist jedoch einigermaßen langwierig (und hier nicht von besonderem Interesse). Es werden deshalb für jede der Möglichkeiten nur einige Beispiele mit allgemeineren Bemerkungen betrachtet.

Drehungen im \mathcal{R}_3 um die Koordinatenachsen lassen sich in einfacher Form darstellen. So beschreibt z.B. die Matrix

$$\mathbf{D}_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aus aktiver Sicht die Drehung eines Vektors um den Winkel α um die 3-Achse gegen den Uhrzeigersinn. Direkte Rechnung ergibt

$$\mathbf{x}' = \mathbf{D}_3(\alpha)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

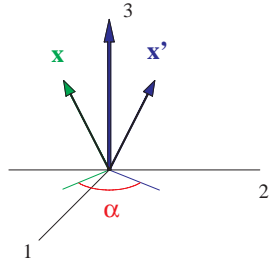


Abb. 3.28. Drehung um 3-Achse: Aktive Sicht

Die 3-Komponente ist unverändert (wie es für eine Drehung um diese Achse zu erwarten ist), die 1, 2-Komponenten unterliegen der schon diskutierten Drehung in der Ebene (Abb. 3.28). Drehungen von Vektoren um die anderen Koordinatenachsen werden durch Matrizen mit einer entsprechenden Struktur beschrieben. So gilt z.B. für eine Drehung um die 2-Achse

$$\mathbf{D}_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Aus aktiver Sicht beschreibt diese Matrix Drehungen von Vektoren um den Winkel β (in dem Uhrzeigersinn!).

Die Komplikationen, die bei der Drehung von Vektoren im \mathcal{R}_3 auftreten, werden durch die folgende Betrachtung verdeutlicht. Vergleicht man

$$\mathbf{D}_{23}(\beta\alpha) = \mathbf{D}_2(\beta)\mathbf{D}_3(\alpha)$$

und

$$\mathbf{D}_{32}(\alpha\beta) = \mathbf{D}_3(\alpha)\mathbf{D}_2(\beta),$$

so stellt man fest: In dem ersten Fall (Abb. 3.29) wird ein vorgegebener Vektor zunächst um den Winkel α um die 3-Achse gedreht und dann um den Winkel β um die 2-Achse. In dem zweiten Fall werden die Drehungen in

umgekehrter Reihenfolge ausgeführt (Abb. 3.30). Berechnet man die Matrizen für die jeweilige Kombination von Drehungen, so findet man

$$\mathbf{D}_{23} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{32} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt $\mathbf{D}_{23} \neq \mathbf{D}_{32}$. Das Hintereinanderausführen von Drehungen um verschiedene Achsen ist nicht vertauschbar.

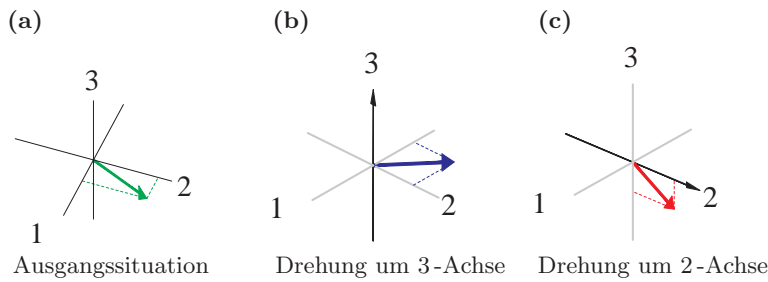


Abb. 3.29. Hintereinanderausführung von Drehungen im \mathcal{R}_3 : Sequenz 3, 2

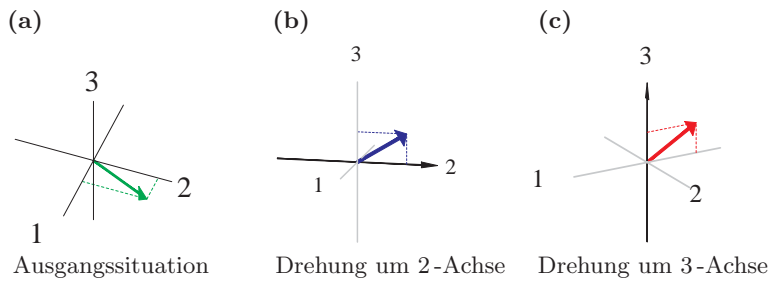


Abb. 3.30. Hintereinanderausführung von Drehungen im \mathcal{R}_3 : Sequenz 2, 3

Um dies direkt zu illustrieren, kann der Spezialfall mit $\alpha = \beta = \pi/2$ (jeweils eine Drehung um 90° gegen den bzw. im Uhrzeigersinn) dienen. Es ist dann

$$\mathbf{x}' = \mathbf{D}_{23}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{D}_{32}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich sind die beiden transformierten Vektoren nicht gleich.

Die somit demonstrierte Nichtvertauschbarkeit von Drehungen um verschiedene Achsen im \mathcal{R}_3 führt zu einigen Komplikationen bei der Diskussion von Drehungen im \mathcal{R}_3 .

Zur Darstellung einer allgemeinen Drehung im \mathcal{R}_3 benötigt man drei Parameter. So kann man z.B. eine Drehung um eine beliebige Achse durch den Koordinatenursprung mit Hilfe von drei Winkeln beschreiben. Zwei dieser Winkel legen die Richtung der Drehachse fest, der dritte Winkel beschreibt die eigentliche Drehung. Eine Alternative (und die Standardwahl) ist die Beschreibung einer allgemeinen Drehung durch die **Eulerwinkel**. In diesem Fall setzt man die Drehung aus Einzeldrehungen um die x -Achse, die x' -Achse (oder als Variante die y' -Achse) und die z'' -Achse zusammen (Details findet man in Buch.Kap. 6.3.4). Bei der Diskussion der Drehbewegung (Kreiseltheorie) lässt sich diese etwas aufwendigere Darstellung nicht vermeiden.

Spiegelungen an Koordinatenebenen im \mathcal{R}_3 werden durch einfache Transformationsmatrizen dargestellt. Das Beispiel mit der Matrixgleichung

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Spiegelung an der 1-2 Ebene ($\mathbf{x}' = \mathbf{S}_{12}\mathbf{x}'$). Eine Transformationgleichung für Spiegelungen an Ebenen, die eine Koordinatenachse (nicht aber eine Koordinatenebene) enthalten, kann man mit den Schritten

- (1) Drehe die Ebene in eine geeignete Koordinatenebene,
- (2) Spiegele an der Koordinatenebene,
- (3) Drehe die Ebene in die Ausgangsposition zurück.

Für eine Ebene, die die 3-Achse enthält (siehe Abb. 3.31) und einen Winkel α mit der 1-Achse einschließt, sind diese Schritte

- (1) Drehung um die 3-Achse um einen Winkel $-\alpha$,
- (2) Spiegelung an der 1-3 Ebene,
- (3) Drehung um die 3-Achse um einen Winkel $+\alpha$,

insgesamt also

$$\mathbf{A}_S = \mathbf{D}_3(\alpha)\mathbf{S}_{13}\mathbf{D}_3(-\alpha).$$

Berechnet man das Matrixprodukt aus den einfachen Zutaten, so erhält man

$$\mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

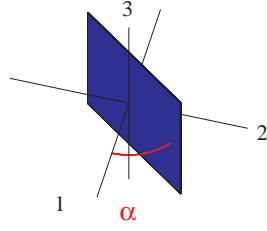


Abb. 3.31. Transformationen im \mathcal{R}_3 : Spiegelung an Ebenen

Mit dieser Matrix kann man demonstrieren, dass sich

- (a) ein Vektor entlang der 3-Achse nicht verändert,
- (b) ein Vektor entlang einer Geraden, die Schnittlinie der 1-2 Ebene und der Spiegelebene ist, nicht verändert.
- (c) ein Vektor entlang der 1-Achse in einen Vektor übergeht, der mit dieser Achse einen Winkel 2α einschließt.

Führt man zwei Spiegelungen hintereinander aus, so z.B. Spiegelungen an Ebenen durch die 3-Achse, die die Winkel β und α mit der 1-Achse einschließen, so erhält man

$$\mathbf{A}_S(\alpha, \beta) = \mathbf{A}_S(\alpha)\mathbf{A}_S(\beta) = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) & 0 \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Spiegelungen ergeben eine Drehung um die 3-Achse (der Schnittgeraden der beiden Ebenen) um den Winkel $2(\alpha - \beta)$ (dem doppelten Winkel zwischen den beiden Ebenen). Wieder kann man feststellen, dass die Reihenfolge der Operationen nicht vertauschbar ist. Die Drehung, die sich aus der Sequenz

$$\mathbf{A}_S(\beta, \alpha) = \mathbf{A}_S(\beta)\mathbf{A}_S(\alpha)$$

ergibt, wird durch $\mathbf{D}_3(2(\beta - \alpha))$ beschrieben, also eine Drehung in umgekehrter Richtung.

Eine letztes Beispiel für eine Transformation im \mathcal{R}_3 ist

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

Eine derartige Transformation beschreibt eine Spiegelung am Koordinatenursprung. Sie spielt als **Paritätsoperation** in der Quantenmechanik und der Elementarteilchenphysik eine Rolle.

3.2.4 Determinanten

Einen pragmatischen Zugang zu diesem Konzept gewinnt man über die Betrachtung von linearen Gleichungssystemen. Ein lineares Gleichungssystem in zwei Unbekannten

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit der expliziten Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

besitzt die Lösung

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad x_2 = \frac{b_1a_{11} - b_2a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Die Frage nach der Existenz einer Lösung lässt sich dann einfach beantworten. Der gemeinsame Nenner in den Lösungsformeln muss von Null verschieden sein. Man bezeichnet den Nenner als die Determinante der 2×2 Matrix \mathbf{A} und schreibt

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Die ersten drei Ausdrücke entsprechen Varianten der Nomenklatur, der letzte ist die eigentliche Definition. Mit der Bildung einer Determinante ordnet man einer quadratischen Matrix eine Zahl zu.

Quadratische Matrix \longrightarrow Bilde Determinante \longrightarrow Zahl

Die Nützlichkeit dieses Konzeptes kann man schon anhand der einfachsten Situation, der 2×2 Determinante illustrieren:

- Die obigen Lösungsformeln kann man vollständig in Determinantenform angeben.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Diese Lösungsformeln sind als **Cramers Regel** bekannt⁶. Die Regel lautet:

Die Nennerdeterminante ist die Determinante der Matrix \mathbf{A} . In der Zählerdeterminante wird, für die Unbekannte x_i , die i -te Spalte durch den Vektor \mathbf{b} ersetzt.

⁶ Diese Regel ist auch im Fall von n Gleichungen mit n Unbekannten gültig, siehe unten.

- Bei der Bestimmung von Matrixinversen steht ebenfalls die Lösung von linearen Gleichungssystemen an. Für eine 2×2 Matrix gilt

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{E} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Auflösung der Gleichungssysteme für die Matrixelemente c_1 bis c_4

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 &= 1 & a_{11}c_3 + a_{21}c_4 &= 1 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 &= 0 & a_{12}c_3 + a_{22}c_4 &= 0 \end{aligned}$$

ergibt mit der Cramerschen Regel

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix enthält den Vorfaktor $|\mathbf{A}|^{-1}$, sie existiert also nur, falls $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ist.

Die Aufgaben, ein lineares Gleichungssystem zu lösen oder eine Matrixinverse zu bestimmen, sind identisch. Die Auflösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Die geometrische Interpretation lautet: Gegeben ist eine Transformation \mathbf{A} und ein (Bild)vektor \mathbf{b} . Die Bestimmung des ursprünglichen Vektors \mathbf{x} entspricht der Bestimmung der Matrixinversen \mathbf{A}^{-1} .

- Determinanten eignen sich zur Klassifikation von Transformationen. Im \mathcal{R}_2 werden Drehstreckungen durch $\det(\mathbf{A}_{\text{DS}}) \neq 0$, Projektionen durch $\det(\mathbf{A}_{\text{P}}) = 0$ charakterisiert. Für die orthogonalen Transformationen gilt bei Drehungen $\det(\mathbf{A}_{\text{D}}) = 1$ und bei Spiegelungen $\det(\mathbf{A}_{\text{S}}) = -1$. Entsprechende Aussagen gelten im \mathcal{R}_3 (und im \mathcal{R}_n).

Vor der Diskussion von Determinanten von quadratischen $n \times n$ Matrizen ist es nützlich, die 2×2 Determinanten aus etwas anderer Sicht zu betrachten. Zu diesem Zweck interpretiert man die Spalten (für Zeilen gilt Entsprechendes) der Determinante als Vektoren

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2),$$

ergänzt die Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ zu Vektoren im \mathcal{R}_3

$$\mathbf{a}'_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2$$

(sie liegen in der 1-2 Ebene) und berechnet deren Vektorprodukt

$$(\mathbf{a}'_1 \times \mathbf{a}'_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}.$$

Die dritte Komponente des Vektorproduktes ist identisch mit der 2×2 Determinante. Man kann somit feststellen: Das Produkt ist ein Nullvektor (die

Determinante hat den Wert Null), falls einer der Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ein Nullvektor ist oder wenn beide Vektoren in einer Geraden liegen. Beide Möglichkeiten kann man mit dem Begriff der **linearen Abhängigkeit** unter einen Hut bringen:

Ist eine Vektorgleichung $c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ mit gegebenen Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ für wenigstens ein $c_i \neq 0$ erfüllbar, so sind die Vektoren linear abhängig. Ist die Vektorgleichung nur mit $c_1 = c_2 = 0$ erfüllbar, so sind die Vektoren linear unabhängig.

Man kann sich sofort davon überzeugen, dass das Vektorprodukt genau dann verschwindet, wenn die Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ linear abhängig sind. Die entsprechende Aussage für die 2×2 Determinante lautet dann:

Die Determinante $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ hat den Wert Null, falls die Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) linear abhängig sind.

Als kleinen Zusatz kann man noch einmal die Determinanten der Transformationsmatrizen für Drehungen und Spiegelungen betrachten. Die Spaltenvektoren sind orthogonal und auf 1 normiert. Die Aussagen

$$\det(\mathbf{A}_D) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 1 \quad \text{und} \quad \det(\mathbf{A}_S) = \det(\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_2) = -1$$

betonen das unterschiedliche Vorzeichen.

Die Frage nach der Definition von Determinanten von höherdimensionalen, quadratischen Matrizen kann man entweder über die Betrachtung von entsprechend dimensionierten linearen Gleichungssystemen oder über die Diskussion der Linearitätseigenschaften beantworten. Der pragmatische Zugang ist im Endeffekt sehr mühselig, liefert aber brauchbare Hinweise. Betrachtet man, in Fortsetzung der anfänglichen Diskussion, ein System von drei linearen Gleichungen in drei Unbekannten

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit der expliziten Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

so findet man nach einer elementaren aber nicht gerade kurzen Rechnung die Lösungsformel (Cramers Regel)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad \text{entsprechend für } x_2 \text{ und } x_3,$$

falls man die Dreierdeterminante folgendermaßen definiert

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} .$$

Die Reihenfolge der Indizes entspricht der Regel: Die ersten Indizes in jedem Produkt haben die natürliche Reihenfolge (123). Bei den positiven Beiträgen entsprechen die zweiten Indizes einer geraden Permutation, bei den negativen Beiträgen einer ungeraden Permutation der Zahlen (123)⁷. Eine mechanischere Merkregel ist die **Regel von Sarrus**, in der die ersten zwei Spalten der Determinante auf der rechten Seite wiederholt werden. Die positiven Beiträge entsprechen dann den Produkten aus diagonal von links nach rechts stehenden Elementen

$$\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ & \searrow & & \searrow & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ & & \searrow & & \searrow & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \end{array} ,$$

die negativen Beiträge den diagonal von rechts nach links laufenden Elementen

$$\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ & & \swarrow & \swarrow & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ \swarrow & \swarrow & & \swarrow & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \end{array} .$$

Es folgt ein explizites Beispiel zum Nachrechnen:

$$\text{Die Determinante } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ hat den Wert } 9 .$$

Löst man nun ein Gleichungssystem in vier Unbekannten, so findet man nach einer noch mühseligeren Rechnung eine mögliche Zusammenfassung in einer Cramerschen Regel mit Viererdeterminanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{44} \end{vmatrix} \longrightarrow 24 \text{ Terme} .$$

Durch Vergleich solcher Ergebnisse kann man feststellen, dass die Anzahl der Terme wie $n!$ (der Anzahl von Permutationen von n Ziffern) wächst. Man kann auch anhand dieser Resultate eine allgemeine Formel finden, deren

⁷ Eine gerade Permutation entsteht durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen von jeweils zwei Zahlen, so z.B. (123) \rightarrow (213) \rightarrow (231); eine ungerade durch eine ungerade Anzahl von Paarvertauschungen, so z.B. (123) \rightarrow (321).

Gültigkeit dann durch vollständige Induktion zu beweisen ist. Diese Formel lautet

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_P \text{sign}(P) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

Summiert wird über alle $n!$ Permutationen

$$(i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ der Zahlen } (1, \dots, n).$$

Das Vorzeichen ist positiv für gerade Permutationen, negativ für ungerade.

Diese Formel ist nicht unbedingt nützlich für die Berechnung des Wertes einer Determinante. Für die in der Praxis nicht ungewöhnliche Aufgabe, den Wert einer Determinante einer 10×10 Matrix zu berechnen, wären $10! = 3628800$ Zehnfachprodukte zu bilden und zu addieren bzw. zu subtrahieren. Eine zweckmäßigere Methode ist das Eliminationsverfahren, das bei der Lösung größerer linearer Gleichungssysteme zum Einsatz kommt. Ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

kann durch geeignete Linearkombinationen von Paaren von Gleichungen in eine Dreiecksgestalt gebracht werden

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{a}_{11}x_1 + & \tilde{a}_{12}x_2 + & \cdots & + \tilde{a}_{1n}x_n & = & \tilde{b}_1 \\ & \tilde{a}_{22}x_2 + & \cdots & + \tilde{a}_{2n}x_n & = & \tilde{b}_2 \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & \tilde{a}_{nn}x_n & = & \tilde{b}_n \end{array},$$

aus der man das Resultat

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\tilde{\mathbf{A}}) = \tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} \cdots \tilde{a}_{nn}$$

ablesen kann.

Für die Begründung des Eliminationsverfahrens als auch für die Gewinnung weiterer Rechenregeln mit Determinanten greift man auf eine alternative Definition des Determinantenkonzeptes zurück. Diese Definition stellt eine Verallgemeinerung der einfachen Überlegungen anhand von 2×2 Determinanten dar. Diese Verallgemeinerung umfasst die folgenden Punkte.

Man interpretiert die Spalten (oder Zeilen) einer quadratischen $n \times n$ Matrix als Vektoren in einem \mathcal{R}_n

$$(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix wird durch Forderung der folgenden Eigenschaften definiert

1. Ist eine Spalte der Determinante die Summe zweier Vektoren, so hat sie den gleichen Wert wie die Summe der Determinanten, die mit den einzelnen Vektoren gebildet werden

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k + \mathbf{a}'_k, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_k, \dots, \mathbf{a}_n).$$

Im Fall $n = 2$ entspricht diese Forderung dem Distributivgesetz des Vektorproduktes.

2. Wird ein Spaltenvektor mit einer Zahl c multipliziert, so hat die Determinante den Wert c mal die ursprüngliche Determinante

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n) = c \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n).$$

Für $n = 2$ entspricht dies dem Assoziativgesetz für die Multiplikation eines Vektorproduktes mit einer Zahl.

Die Forderungen 1. und 2. definieren die Linearitätseigenschaften der Determinanten. Da diese Eigenschaften für jeden Spaltenvektor gelten, bezeichnet man die Determinante auch als eine **Multilinearform**. Die beiden Forderungen legen den Wert der Determinante noch nicht (eindeutig) fest. Dazu benötigt man noch

3. Die Determinante hat den Wert Null, falls die Spaltenvektoren linear abhängig sind:

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = 0,$$

falls die Vektorgleichung

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

mit wenigstens einem $c_k \neq 0$ erfüllt werden kann. Dabei gibt es die Möglichkeiten, dass wenigstens einer der (Spalten)vektoren ein Nullvektor ist oder dass einer der Vektoren als Summe einer Untermenge der anderen Vektoren dargestellt werden kann $\mathbf{a}_k = \sum_i \tilde{c}_{ki}\mathbf{a}_i$.

4. Die Determinante, die mit den Basisvektoren des \mathcal{R}_n gebildet wird, hat den Wert 1

$$\det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

Auf der Basis der Forderungen 1 bis 4 kann man die folgenden Aussagen beweisen

- Der Wert einer Multilinearform, die diese Forderungen erfüllt, ist mit dem Wert der pragmatischen Summenformel identisch.

- Man kann einen Satz von Rechenregeln für Determinanten gewinnen, die z.B. die Äquivalenz der Spalten- und Zeilenbetrachtung

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$$

oder das Verhalten beim Vertauschen von zwei Spalten ausdrücken

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n).$$

Von Interesse sind auch die Entwicklungssätze (die Entwicklung einer Determinante nach Elementen einer Spalte (Zeile) oder nach Unterdeterminanten, die hier nicht ausgeführt werden.

- Die Begründung des Eliminationsverfahrens basiert auf den Eigenschaften der Multilinearform. Bildet man die Linearkombination von zwei Zeilen, so folgt z.B.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i + c_k \mathbf{b}_k, \dots, \mathbf{b}_n) \\ &= \det(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{b}_n) + c_k \det(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k, \dots, \mathbf{b}_k, \dots, \mathbf{b}_n) \\ &= \det(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{b}_n). \end{aligned}$$

Solche Zeilenmanipulationen verändern den Wert der Determinante nicht.

Weiterhin spielen Determinanten eine besondere Rolle bei der Diskussion des algebraischen **Eigenwertproblems**. Dieses Problem kann, in geometrischer Sicht, folgendermaßen formuliert werden.

Vorgegeben ist eine reguläre Transformation im \mathcal{R}_3 (eine kurze Bemerkung zu dem \mathcal{R}_n folgt), die durch eine 3×3 Matrix \mathbf{A} dargestellt wird. Die Frage lautet: Gibt es Vektoren \mathbf{x} , die bis auf einen Faktor λ bei dieser Transformation in sich übergehen? Eine alternative Formulierung dieser Frage ist: Kann man aus der Gleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

die Größe oder Größen λ und die Komponenten des Vektors oder der Vektoren \mathbf{x} bestimmen? Man benötigt zur Beantwortung dieser Frage zwei Aussagen über die Lösungen von linearen Gleichungssystemen.

- Setzt man voraus, dass die Cramersche Regel für ein inhomogenes System von n Gleichungen mit n Unbekannten $\mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ gültig ist, so ist die Aussage

Das inhomogene Gleichungssystem hat nur dann eine Lösung, wenn die Determinante der Matrix \mathbf{C} nicht verschwindet.

fast trivial.

- Das homogene Gleichungssystem $\mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ hat auf der anderen Seite nur die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ falls die Determinante der Matrix \mathbf{C} nicht verschwindet, da in diesem Fall in allen Zählerdeterminanten einer der Spaltenvektoren ein Nullvektor ist. Verschwindet die Determinante hingegen,

so liefert die Cramersche Regel keine wohldefinierte Lösung. Es gilt also die Aussage:

Das homogene Gleichungssystem hat nur dann eine nichttriviale Lösung $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, wenn die Determinante der Matrix \mathbf{C} verschwindet.

Das Verschwinden der Determinante bedeutet, dass eine lineare Abhängigkeit zwischen den Zeilen- (oder Spalten-) Vektoren der Matrix \mathbf{C} besteht, in anderen Worten, dass eine (oder mehrere) der Gleichungen des Systems Linearkombinationen der anderen Gleichungen sind. Kann nur eine der Gleichungen als Linearkombination der anderen dargestellt werden, so liegt eine einparametrische Lösung des Systems vor. Man kann eine der Unbekannten (beliebig) vorgeben und sozusagen ein lineares Gleichungssystem der Dimension $n - 1$ betrachten

$$\hat{\mathbf{C}}_{(n-1,n-1)} \mathbf{x}_{(n-1),1} = \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}_n)_{(n-1),1} ,$$

dessen Determinante $\det(\hat{\mathbf{C}})$ dann nicht verschwindet.

Interpretiert man die obige Transformationsgleichung als ein homogenes, lineares Gleichungssystem (mit der Einheitsmatrix \mathbf{E})

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} ,$$

so ist es für die Existenz einer nichttrivialen Lösung erforderlich, dass

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

ist. Für die Situation im \mathcal{R}_3 , die zunächst ins Auge gefasst wurde, ergibt die Auswertung der Determinante eine kubische Gleichung für die Faktoren λ . Schreibt man die Koeffizienten dieser Gleichung aus und betrachtet die Bedingung für das Auftreten von reellen Lösungen, so findet man, dass reelle Lösungen für λ vorliegen, wenn die Matrix \mathbf{A} symmetrisch ist. Für jede der drei reellen Lösungen (**Eigenwerte**) erhält man ein lineares Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad i = 1, 2, 3 ,$$

dessen nichttriviale Lösung (**Eigenvektor**) im Normalfall durch die Bedingung (**Normierungsbedingung**)

$$\sum_{k=1}^3 x_{i,k}^2 = 1$$

fixiert wird.

Entsprechende Aussagen gelten im \mathcal{R}_n . Es liegt dann eine Gleichung n -ten Grades für die Eigenwerte vor, die Eigenvektoren besitzen n Komponenten und in der Normierungsbedingung läuft die Summe bis n . Weitere Information zu dem algebraischen Eigenwertproblem wird im Zusammenhang mit der

Matrixformulierung der Quantenmechanik (Band 3) gegeben.

Zum Schluss dieses Abschnittes sollen noch einmal die Fälle, in denen das Determinantenkonzept im Vorgriff erwähnt wurde, zusammengestellt werden.

- Die 2×2 Wronskideterminante (Math.Kap. 2.2.2)

$$W(x_1(t), x_2(t)) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}.$$

- Das Spatprodukt (Math.Kap. 3.1.2)

$$(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

- Die Merkregel für das Vektorprodukt (Math.Kap. 3.1.2)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ist keine eigentliche Determinante. Sie wird jedoch, im Zusammenhang mit der Regel von Sarrus oder einer anderen Auswertungsvorschrift angewandt, obschon in der ersten Zeile Vektoren und keine Zahlen stehen.

4 Analysis II: Funktionen von mehreren Veränderlichen

Funktionen von mehreren Veränderlichen stellen das Arbeitspferd der theoretischen Physik dar. Die Begriffe und Techniken, die aufbereitet werden müssen, zeigen eine deutliche Verwandtschaft zu denen, die bei der Diskussion von Funktionen einer Veränderlichen eine Rolle spielen. Auf der anderen Seite ergeben sich aus der höheren Dimensionalität des ‘Darstellungsraumes’ eigene Aspekte. So kann man einen Punkt in einer eindimensionalen Welt aus genau zwei Richtungen annähern, einen Punkt im dreidimensionalen Raum aber aus beliebig vielen. Dies hat zum Beispiel Auswirkungen bei der Diskussion des Begriffes der Stetigkeit. Desgleichen kann man Ableitungen nach jeder der unabhängigen Koordinaten (partielle Ableitungen) bilden. Bei der Integration kann anstelle eines linearen Grundintervalles ein zwei- oder mehrdimensionaler Bereich treten.

4.1 Funktionen

Eine gewisse Schwierigkeit ergibt sich aus der Tatsache, dass das menschliche Vorstellungsvermögen auf drei Raumdimensionen beschränkt ist. Neben kleinen Hilfsmitteln (Projektion) ist aus diesem Grund vor allem Abstraktionsvermögen gefragt. Für den einfachsten Fall, Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen, wird dieses nur wenig benötigt.

4.1.1 Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen

Eine **explizite** Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen wird in der Form $z = f(x, y)$ geschrieben. Zur Veranschaulichung einer solchen Funktion fasst man x, y, z als kartesische Koordinaten in einem dreidimensionalen Raum auf. Der Definitionsbereich der Funktion ist im Allgemeinen ein Gebiet der x - y Ebene. Die Punkte $(x, y, f(x, y))$ bilden dann eine räumliche Fläche über dem Definitionsbereich. Die Menge der z -Werte, die sich anhand der Zuordnung ergeben, bezeichnet man wieder als Wertebereich (Abb. 4.1). Einige Beispiele sollen die Möglichkeiten verdeutlichen.

- Der Definitionsbereich der Funktion $z = [1 - x^2 - y^2]^{1/2}$ ist das Innere des Einheitskreises der x - y Ebene, einschließlich Rand $x^2 + y^2 \leq 1$. Der Wertebereich ist das Intervall $0 \leq z \leq 1$.

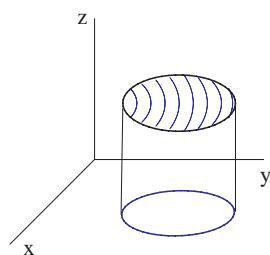


Abb. 4.1. Schaubild einer expliziten Funktion von zwei Veränderlichen

tebereich der Funktion ist $0 \leq z \leq 1$. Die Funktion stellt eine Halbkugel dar (Abb. 4.2a).

- Für die Funktion $z = x^2 + y^2$ ist der Definitionsbereich die gesamte x - y Ebene, der Wertebereich ist $z \geq 0$. Die Funktion beschreibt ein nach oben offenes Drehparaboloid (Abb. 4.2b).
- Die lineare Gleichung $z = ax + by$ ist die Gleichung einer Ebene im Raum, die durch den Nullpunkt verläuft. Der Definitionsbereich ist die gesamte x - y Ebene, der Wertebereich ist $-\infty \leq z \leq \infty$ (Abb. 4.2c).

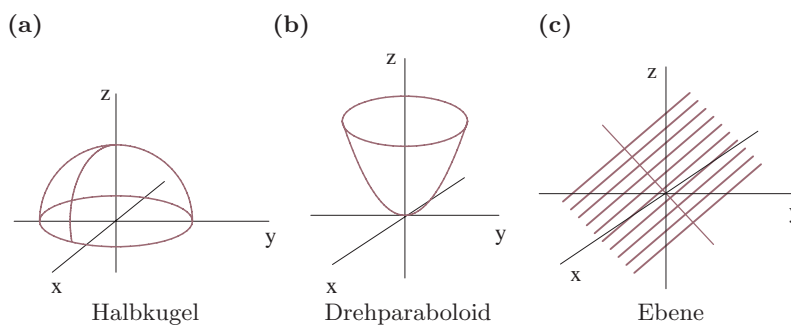
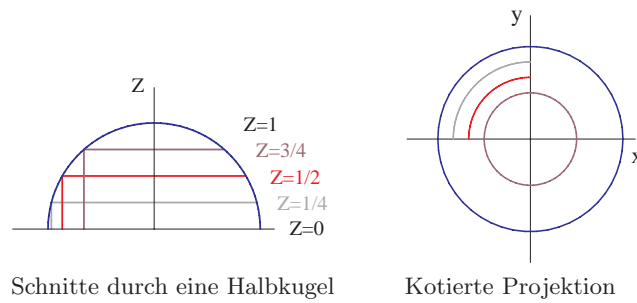


Abb. 4.2. Beispiele für Funktionen von zwei Veränderlichen

Eine Möglichkeit solche Flächen in präziser Weise graphisch darzustellen, ist die in der Geographie benutzte Darstellung durch Höhenlinien. Die offizielle Bezeichnung dieser Darstellung ist **kotierte Projektion**. Man betrachtet die Schnittkurven der Fläche $f(x, y)$ mit den Ebenen $z = \text{const.}$ und zeichnet die Projektion der Schnittlinien in die x - y Ebene. In der Praxis sieht dies folgendermaßen aus: Bei der Kugelschale sind die Höhenlinien konzentrische Kreise um den Nullpunkt. Sie haben den Radius $R = [1 - z_{\text{fest}}^2]^{1/2}$. Am zweckmäßigsten wählt man äquidistante z -Werte (wie man es von den Landkarten gewohnt ist (Abb. 4.3)).

**Abb. 4.3.** Kotierte Projektion

Die Höhenlinien in dem zweiten Beispiel sind konzentrische Kreise um den Nullpunkt mit dem Radius $R = \sqrt{z_{\text{fest}}}$. In dem dritten Beispiel sind es die Geraden $ax + by = z_{\text{fest}}$.

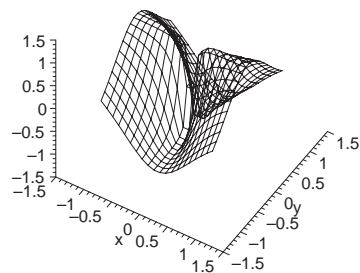
Ein etwas kompliziertes Beispiel wird durch die Funktion

$$z = \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}$$

vorgegeben. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist die gesamte x - y Ebene, außer dem Koordinatenursprung. Für $x = y = 0$ ist diese gebrochen rationale Funktion nicht definiert. Um eine Vorstellung von der entsprechenden Fläche zu gewinnen, benutzt man zweckmäßigerweise anstelle von kartesischen Koordinaten in der x - y Ebene Polarkoordinaten. Es ist dann

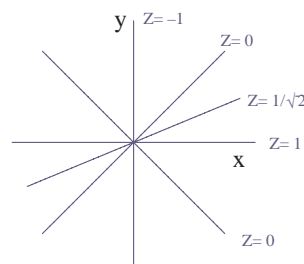
$$z = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \cos 2\varphi.$$

(a)



Darstellung der Fläche

(b)



Kotierte Projektion

Abb. 4.4. Die Funktion $z = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$

Dieser Form entnimmt man die Aussagen

1. Der Wertebereich der Funktion ist $-1 \leq z \leq 1$.
2. Die Höhenlinien der Funktion sind die Geraden $\varphi = \text{const.}$

Aus dem Höhenlinienbild (Abb. 4.4b) liest man die folgende Eigenschaft ab. In beliebiger Nähe des Nullpunktes kann die Funktion alle Werte zwischen -1 und 1 annehmen. Die Fläche selbst (Abb. 4.4a) ist nicht so einfach zu zeichnen. Sie windet sich pro Quadrant von $+1$ nach -1 (und umgekehrt) unter Aussparung des Ursprungs.

Bei der expliziten Angabe der Funktion wird jedem Punkt eines Gebietes der x - y Ebene ein z -Wert zugeordnet. Eine Verallgemeinerung erreicht man mit der **impliziten** Funktion (von zwei Veränderlichen)

$$F(x, y, z) = 0.$$

Beispiele für eine derartige Vorgabe sind:

- Kugelhalbschalen unter und über der x - z Ebene werden durch die expliziten Funktionen

$$\begin{aligned} z &= [R^2 - x^2 - y^2]^{1/2} \\ z &= -[R^2 - x^2 - y^2]^{1/2} \end{aligned}$$

beschrieben. Die Vollkugel (Abb. 4.5a) würde man in der folgenden Weise darstellen

$$(z - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})(z + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) = 0.$$

Diese Gleichung beschreibt Punkte, die sowohl auf der oberen als auch auf der unteren Schale liegen. Ausmultipliziert erhält man die implizite Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Mit einer impliziten Funktion kann man mehrdeutige Gebilde (z.B. geschlossene Flächen) in kompakter Weise darstellen.

- Die implizite Vorgabe

$$x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + y^4 + 2y^2z^2 + z^4 - 5(x^2 + y^2 + z^2) + 4 = 0$$

sieht recht kompliziert aus. Nach einer (kurzen) Betrachtung könnte man jedoch herausfinden, dass der Ausdruck faktorisiert werden kann

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)(x^2 + y^2 + z^2 - 4) = 0.$$

Die 'Fläche' besteht aus zwei konzentrischen Vollkugeln mit den Radien 1 und 2 (Abb. 4.5b). Sie ist vier- bzw. zweideutig.

- Die allgemeine Gleichung einer Ebene im Raum lautet

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ist z.B. $C \neq 0$, so kann man leicht zu einer expliziteren Form zurückfinden

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}.$$

Ist auf der anderen Seite z.B. $B = C = 0$, so reduziert sich die Vorgabe auf

$$x = -D/A.$$

Auch dieser Ausdruck ist als Darstellung einer Ebene zu interpretieren, und zwar einer Ebene parallel zur y - z Ebene durch den Punkt $-D/A$ auf der x -Achse.

Bei einer impliziten Form ist die Rolle der unabhängigen Variablen und der abhängigen Variablen beliebig vertauschbar. Die Gleichung

$$x - y^2 - z^2 = 0$$

würde man nicht unbedingt nach z auflösen,

$$z = \pm[x - y^2]^{1/2},$$

sondern in der Form

$$x = y^2 + z^2$$

und feststellen, dass es sich um die Beschreibung eines Drehparaboloides um die x -Achse handelt (Abb. 4.5c).

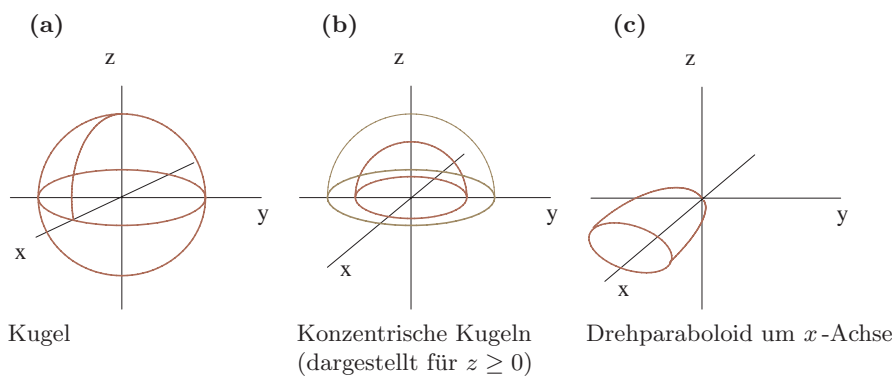


Abb. 4.5. Implizite Funktionen

4.1.2 Funktionen von drei und mehreren unabhängigen Veränderlichen

Schon für eine Funktion von drei unabhängigen Veränderlichen

explizit $u = f(x, y, z)$

implizit $F(x, y, z, u) = 0$

ist die Veranschaulichung schwierig. Der Definitionsbereich ist im Normalfall ein Gebiet (Volumen) des dreidimensionalen Raumes, z.B. das Innere einer Kugel um einen Punkt einschließlich Rand

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2 .$$

Zur Darstellung der Funktion benötigt man eine vierte Dimension, die sich zeichnerisch nicht erfassen lässt. Die Funktion würde (in Analogie zu dem Fall von zwei Veränderlichen) eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, die im vierdimensionalen Raum eingebettet ist, darstellen. Man spricht dann von einer Hyperfläche im \mathcal{R}_4 . Es gibt in diesem Fall noch zwei Behelfsmethoden, mit denen man eine gewisse anschauliche Darstellung gewinnen kann.

Man denkt sich in jedem Punkt des Definitionsbereiches den Funktionswert angeheftet. Man könnte sich in dieser Weise vorstellen, dass man z.B. eine Temperaturverteilung im Raum wiedergibt

$$T = T(x, y, z) .$$

Dies ist ein Beispiel für ein Skalarfeld (siehe Math.Kap. 5.1).

Eine kotierte Projektion von 4 auf 3 Dimensionen ist möglich. Die Gleichung

$$f(x, y, z) = \text{const.}$$

stellt, in impliziter Form, eine Fläche im dreidimensionalen Raum dar. Anstelle der vorher diskutierten Höhenlinien hat man in diesem Fall Flächenscharen im Raum. Diese Darstellung findet im Allgemeinen jedoch keine Anwendung.

Für Funktionen mit mehr als drei unabhängigen Veränderlichen

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{in der expliziten Form}) ,$$

ist keine Veranschaulichung mehr möglich. Der Definitionsbereich einer solchen Funktion ist ein Gebiet des n -dimensionalen Raumes. Die Funktion selbst stellt eine n -dimensionale Hyperfläche in einem $(n + 1)$ dimensionalen Raum dar. Außer der Tatsache, dass man keine zeichnerische Darstellung zur Verfügung hat, ist der Unterschied zu den einfachen Fällen jedoch nicht so groß. Man kann auch in höherdimensionalen, euklidischen Räumen Punkte, Abstände von Punkten etc. betrachten (siehe Math.Kap. 3.1.3).

Wie im Fall von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen ist auch für Funktionen von mehreren Variablen das Thema ‘Grenzwerte und Differentiation’ von besonderem Interesse.

4.2 Grenzwerte und Differentiation

Die Diskussion des Themas Grenzwerte wird sich auf wenige Bemerkungen beschränken, da sich die Begriffe und die Diskussion aus dem Bereich von Funktionen einer Veränderlichen im Wesentlichen übertragen lassen.

4.2.1 Grenzwerte

Eine der Grenzwertdefinitionen für Funktionen einer Veränderlichen lautete:

Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Grenzwert A , falls für jede Zahlenfolge $\{x_\nu\}$ mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x_0$ stets $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(x_\nu) = A$ ist.

Diese Definition ist (wie schon bemerkt) nicht sonderlich praktisch, da die Forderung ‘für *jede* Zahlenfolge’ lautet. Sie hat aber den Vorteil, dass man sie direkt auf den Fall von mehreren Variablen übertragen kann. Man muss nur die Aussage ‘Zahlenfolge’ durch den Ausdruck ‘Punktfolge’ ersetzen.

Für eine Funktion von zwei Veränderlichen ist der Definitionsbereich ein Gebiet der x - y Ebene. Im Unterschied zu einem Punkt auf einem Zahlenstrahl kann man einen Punkt P_0 in einer Ebene (oder im Raum) nicht nur aus zwei sondern aus beliebig vielen Richtungen annähern. Für eine Funktion von n (≥ 2) Variablen kann man also Punktfolgen der Form

$$P_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n}), P_2 = (x_{21}, \dots, x_{2n}), \dots, P_\infty = P_0$$

angeben, die sich aus beliebiger Richtung dem Grenzpunkt P_0 nähern. Die Übertragung des Grenzwertkriteriums lautet somit:

Konvergiert für jede Punktfolge $\{P_\nu\}$, mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu = P_0$ und P_ν im Definitionsbereich einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$, die entsprechende Funktionenfolge $f(P_\nu) = f(x_{\nu 1}, \dots, x_{\nu n})$ gegen den gleichen Wert A , so hat die Funktion an der Stelle P_0 den Grenzwert A .

Zur Erläuterung des Kriterium folgen zwei Beispiele. Für die Funktion

$$z = f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

ist der Definitionsbereich die x - y Ebene ohne den Punkt $(0, 0)$. Zur Diskussion des Grenzwertes der Funktion an der Stelle $(0, 0)$ betrachtet man die Punktfolgen:

Für jede Punktfolge entlang der x -Achse gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Für jede Punktfolge entlang der y -Achse gilt

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{y^2}{y^2} \right) = -1 .$$

Verschiedene Folgen ergeben einen verschiedenen Wert. Der Grenzwert an der Stelle $(0, 0)$ existiert nicht.

Der Definitionsbereich der Funktion

$$z = f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

ist ebenfalls die x - y Ebene ohne den Punkt $(0, 0)$. Für die Betrachtung des Grenzwertes an dieser Stelle benutzt man am einfachsten Polarkoordinaten

$$z = r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi .$$

Jede Punktfolge mit dem Grenzpunkt $(0, 0)$ ist durch $r \rightarrow 0$ charakterisiert. Es ist

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = 0 .$$

Der Grenzwert der Funktion an der Stelle $(0, 0)$ existiert und ist Null.

Es besteht die Möglichkeit die vollständige Liste von Grenzwertkriterien im Fall einer Variablen (z.B. das Cauchy-Kriterium, etc.) zu übertragen. Es soll hier jedoch nur eine Bemerkung zu dem Begriff Stetigkeit angefügt werden.

Die Übertragung dieses Begriffes lautet folgendermaßen:

Eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ ist an der Stelle $P_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ stetig, falls $f(P_0)$ existiert (die Funktion also an der Stelle P_0 definiert ist), falls $f(x_1, \dots, x_n)$ an der Stelle P_0 einen Grenzwert A besitzt und der Grenzwert und der Funktionswert übereinstimmen.

In diesem Sinn ist es z.B. nicht möglich, die Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

an der Stelle $(0, 0)$ stetig zu ergänzen, für die Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

ist dies hingegen möglich.

Das Thema, das im Rahmen der Grenzwertbetrachtungen für Funktionen von mehreren Veränderlichen hauptsächlich interessiert, ist die Differentiation.

4.2.2 Differentiation

Es geht hier um den Begriff der partiellen Ableitungen und ihrer Anwendung, zunächst für den Fall einer Funktion von zwei Variablen. Die Definition der partiellen Ableitung lautet in diesem Fall:

Eine in einem Gebiet D definierte Funktion $z = f(x, y)$ ist in dem Punkt $(x, y) \in D$ partiell nach x bzw. nach y differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \right]$$

bzw. der Grenzwert

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \left[\frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} \right]$$

existiert.

Die Definition deutet an, dass partielle Differentiation aus rechentechnischer Sicht nichts Neues bietet: Es wird jeweils nach der einen Variablen in der üblichen Weise differenziert, während die andere Variable als Konstante behandelt wird.

Einige Beispiele sollen die Technik erläutern:

$$\begin{array}{lll} f(x, y) = xy & f_x = y & f_y = x \\ f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)} & f_x = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} & f_y = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ f(x, y) = e^x(x^2 - y^5) & f_x = e^x(x^2 - y^5 + 2x) & f_y = e^x(-5y^4) \end{array}$$

Die geometrische Deutung der partiellen Ableitungen ist ebenso einfach. Bei der partiellen Ableitung nach x betrachtet man den Schnitt der vorgegebenen Fläche $f(x, y)$ mit der Ebene $y = \text{const.}$ (parallel zur x - z Ebene, Abb. 4.6a). Die partielle Ableitung beschreibt die Steigung der Schnittkurve in dem Punkt P oder, kurz gesagt, den Anstieg der Fläche in diesem Punkt in x -Richtung. Die Steigung der Tangente an die verschiedenen Schnittkurven in verschiedenen Punkten ist wieder eine Funktion von x und y . Die partielle Ableitung nach y beschreibt entsprechend ‘die Steigung der Fläche’ in y -Richtung (Abb. 4.6b).

Neben der partiellen Ableitung erster Ordnung kann man partielle Ableitungen höherer Ordnung bilden. Im Fall von Funktionen von zwei Veränderlichen gibt es vier partielle Ableitungen zweiter Ordnung

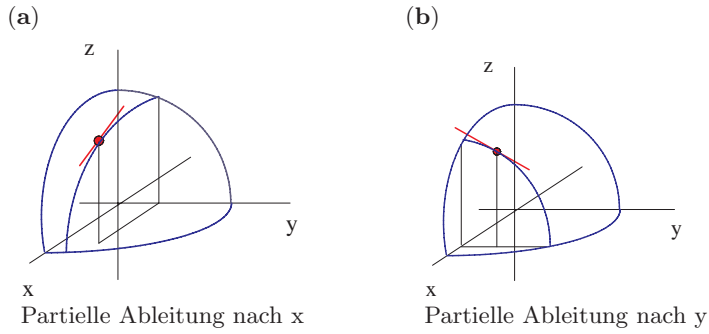


Abb. 4.6. Die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (\text{zuerst nach } y)$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (\text{zuerst nach } x)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad .$$

Die Reihenfolge der Indizes ist in der Literatur nicht standardisiert. Hier wird die Verabredung benutzt: Es wird zuerst nach der Variablen abgeleitet, die in der Kurzform (linke Spalte) und in der Standardschreibweise (rechte Spalte) auf der rechten Seite steht. Für die obigen Beispiele erhält man

$$f(x, y) = xy$$

$$f_{xx} = 0 \quad f_{xy} = f_{yx} = 1 \quad f_{yy} = 0$$

$$f(x, y) = [x^2 + y^2]^{-1/2}$$

$$f_{xx} = -\frac{2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{8x^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{8xy}{(x^2 + y^2)^3} \quad f_{yy} = -\frac{2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{8y^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$f(x, y) = e^x(x^2 - y^5)$$

$$f_{xx} = e^x(x^2 - y^5 + 4x + 2) \quad f_{xy} = f_{yx} = -5y^4 e^x$$

$$f_{yy} = -20y^3 e^x \quad .$$

In allen drei Beispielen stimmen die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung überein. Dies führt natürlich zu der Frage: Ist dies notwendi-

gerweise so, bzw. müssen dafür bestimmte Bedingungen erfüllt sein? Eine Antwort folgt in Kürze.

Für die partiellen Ableitung dritter Ordnung gibt es in dem Fall von Funktionen von zwei Veränderlichen acht Möglichkeiten

$$f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx}, f_{xyy}, f_{yxy}, f_{yyx}, f_{yyy}.$$

Die Anzahl der möglichen Ableitungen wächst mit der Ordnung k wie 2^k .

Die Erweiterung der Definition der partiellen Ableitungen erster Ordnung für Funktionen von n Veränderlichen ist nicht schwierig. Für eine Funktion von n Veränderlichen existieren n verschiedene Ableitungen erster Ordnung. Die Definition der entsprechenden Grenzwerte lautet

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h_i} \right\}$$

mit $i = 1, 2, \dots, n$.

Diese Definition legt wieder die Technik des partiellen Differenzierens fest. Es ist nach einer der Variablen in gewohnter Form zu differenzieren, alle anderen Variablen sind als Konstante zu betrachten. Es gibt n^2 partielle Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = f_{x_i, x_k} \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

n^3 Ableitungen dritter Ordnung, etc.

Es folgt ein Beispiel mit einer Funktion von drei Variablen, die in der theoretischen Physik oft benötigt wird. Es ist die Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} = \frac{1}{r},$$

die den inversen Abstand eines Punktes von dem Koordinatenursprung beschreibt (und in Polarkoordinaten eine einfache Form hat). Die drei partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$\begin{aligned} f_x &= -\frac{1}{2} \frac{2x}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = -\frac{x}{r^3} \\ f_y &= -\frac{1}{2} \frac{2y}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = -\frac{y}{r^3} \\ f_z &= -\frac{1}{2} \frac{2z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = -\frac{z}{r^3}. \end{aligned}$$

Es gibt neun partielle Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} & f_{yy} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} \\
f_{xy} &= f_{yx} = \frac{3xy}{r^5} & f_{zy} &= f_{yz} = \frac{3yz}{r^5} \\
f_{xz} &= f_{zx} = \frac{3xz}{r^5} & f_{zz} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} .
\end{aligned}$$

Die gemischten Ableitungen in zweiter Ordnung sind wieder unabhängig von der Reihenfolge der partiellen Differentiation. Für die Summe der doppelten Ableitungen nach den drei Variablen gilt

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0 .$$

Man kann diese Aussage in der folgenden Weise umkehren. Die Funktion $f(x, y, z) = 1/r$ wird durch eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

bestimmt. Dies ist eine **partielle Differentialgleichung**, für die die Funktion $1/r$ eine Partikulärlösung (d.h. keine allgemeine Lösung) ist¹. Die obige Kombination der partiellen Ableitungen sollte jedoch schon einmal festgehalten werden, da sie an vielen Stellen der theoretischen Physik (Elektrodynamik, Quantenmechanik) angetroffen wird. Man schreibt sie meist in der Operatorform

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$$

und bezeichnet den Differentialoperator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

als den **Laplaceoperator**. Die Differentialgleichung

$$\Delta f(x, y, z) = 0$$

bezeichnet man als die **Laplacesche Differentialgleichung**.

Es sieht zunächst nicht so aus, als ob zwischen der gewöhnlichen Differentiation und der partiellen Differentiation ein wesentlicher Unterschied besteht. Das ist nicht ganz der Fall, wie die folgenden Bemerkungen andeuten.

- (a) Eine Funktion von zwei Variablen ist über dem folgenden Gebiet definiert (Abb. 4.7)

¹ Partielle Differentialgleichungen werden in Band 2 ausführlich behandelt.

$$x^2 + y^2 \leq R^2 \quad x, y \geq 0$$

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \quad x, y \geq 0 \quad b < R.$$

Auch wenn die über diesem Gebiet definierte Funktion ‘vernünftig’ ist,

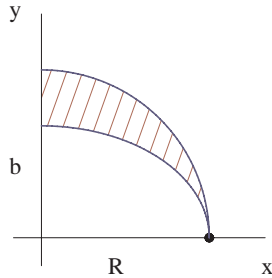


Abb. 4.7. Partielle Ableitungen: Ein problematisches Grundgebiet

existieren die partiellen Ableitungen in dem Zwickelpunkt auf der x -Achse nicht. Die Umgebung des Punktes gehört nicht zu dem Definitionsbereich und die Differentialquotienten können somit nicht definiert werden. Die Tatsache, dass der Definitionsbereich ein Gebiet ist, führt unter Umständen auf Besonderheiten.

- (b) Für Funktionen von einer Veränderlichen zeigt man: Aus der Existenz der Ableitung $f'(x)$ an der Stelle x_0 folgt die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ an dieser Stelle. Eine entsprechende Aussage ist im Fall mehrerer Variablen nicht möglich. Im Fall von zwei Variablen nähert man sich bei der Bildung der partiellen Ableitungen der fraglichen Stelle von zwei Richtungen. Dies beinhaltet im Allgemeinen noch keine Aussage über eine Annäherung aus einer beliebigen Richtung, die bei der Betrachtung der Stetigkeit notwendig ist. Es existiert jedoch auch im Fall von Funktionen von mehreren Veränderlichen ein (etwas komplizierterer) Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit, der in dem Abschnitt über Richtungsableitungen (Math.Kap. 4.2.3) kurz angesprochen wird.

Die Tatsache, dass die gemischten Ableitungen in allen Beispielen, die betrachtet wurden, unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation das gleiche Resultat ergaben, wird durch den **Satz von Schwarz** erklärt. In der Form einer hinreichenden Bedingung lautet dieser Satz:

Sind für eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ alle Ableitungen k -ter Ordnung stetig, so sind die gemischten Ableitungen in dieser Ordnung unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation.

Es existieren verschärfte Varianten dieses Theorems, doch soll auf deren Diskussion ebenso wie auf die Durchführung des Beweises der obigen Aussage verzichtet werden. Eine Konsequenz des Theorems ist jedoch noch erwähnenswert. Die Anzahl der unabhängigen, höheren Ableitungen wird deutlich reduziert. Für eine Funktion von n Variablen gibt es z.B. $n(n+1)/2$ Ableitungen zweiter Ordnung anstatt n^2 .

Die Tatsache, dass Ableitungen von Funktionen mit mehreren Veränderlichen über einem Gebiet definiert sind, eröffnet die Möglichkeit, weitere Ableitungsvarianten zu betrachten. Wichtige Begriffe in der Physik sind die Richtungsableitung und der Gradient.

4.2.3 Richtungsableitung und Gradient

Für eine Funktion von zwei Variablen wurde f_x als der Anstieg der entsprechenden Fläche in der x -Richtung und f_y als der Anstieg der Fläche in y -Richtung interpretiert (Abb. 4.8a). Diese Interpretation legt die Frage nahe: Wie berechnet man den Anstieg in beliebiger Richtung? Zur Antwort betrachtet man eine Ebene, die durch einen Punkt der x - y Ebene verläuft und senkrecht auf dieser Koordinatenebene steht. Der Winkel der Schnittgeraden in der x - y Ebene mit der x -Achse ist α . Die Ebene schneidet eine vorgegebene Fläche $f(x, y)$ in einer Kurve K . Als Richtungsableitung (bzw. als Anstieg dieser Fläche in dem Punkt P in der Richtung α) bezeichnet man die Steigung der Tangente an K über dem Punkt P (Abb. 4.8b). Diese Größe ist wie folgt definiert

$$D^{(\alpha)}f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \sin \alpha) - f(x, y)}{\rho} \right\}.$$

Man nähert sich also entlang der Geraden in der x - y Ebene dem Punkt $P = (x, y)$.

Man kann beweisen, dass dieser Grenzwert existiert, falls

1. die partiellen Ableitungen f_x und f_y existieren,
2. die partiellen Ableitungen auch stetig sind.

Der Beweisgang ist, in Andeutung, der folgende:

Man erweitert den Zähler des Differenzenquotienten in der folgenden Weise

$$\begin{aligned} \{f(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \sin \alpha) - f(x, y)\} = \\ \{f(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \sin \alpha) - f(x + \rho \cos \alpha, y)\} \\ + \{f(x + \rho \cos \alpha, y) - f(x, y)\}. \end{aligned}$$

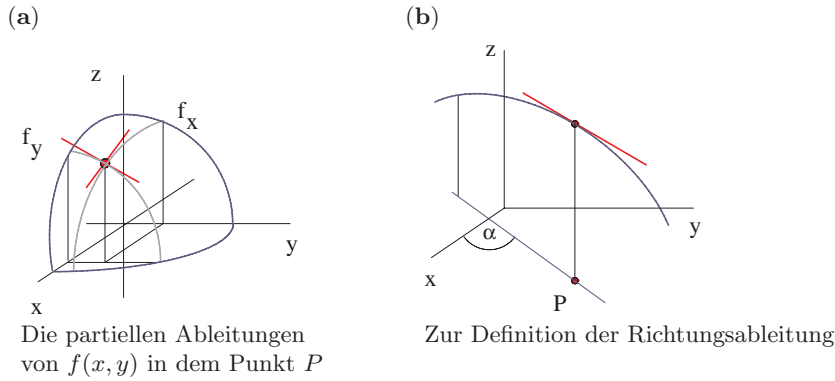


Abb. 4.8. Richtungsableitungen

Auf die beiden Klammerausdrücke wird, für die jeweilige Variable, der Mittelwertsatz der gewöhnlichen Differentialrechnung angewandt

$$g(x+h) - g(x) = hg'(x+ch) \quad 0 \leq c \leq 1.$$

Man erhält damit unter Benutzung der ersten Voraussetzung

$$= \rho \sin \alpha f_y(x + \rho \cos \alpha, y + \rho c \sin \alpha) + \rho \cos \alpha f_x(x + \rho c' \cos \alpha, y).$$

Mit der zweiten Voraussetzung kann man, nach Division durch ρ , den Grenzübergang direkt durchführen

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)} f(x, y) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \{ \cos \alpha f_x(x + \rho c' \cos \alpha, y) + \sin \alpha f_y(x + \rho \cos \alpha, y + \rho c \sin \alpha) \} \\ &= \cos \alpha f_x(x, y) + \sin \alpha f_y(x, y) \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist nur gültig, wenn die auftretenden partiellen Ableitungen stetige Funktionen von x und y sind. Insbesondere gilt

$$D^{(0)} f(x, y) = f_x(x, y) \quad D^{(\pi/2)} f(x, y) = f_y(x, y).$$

Diese Betrachtungen können auf den Fall von Funktionen mit einer größeren Anzahl von Variablen verallgemeinert werden. Bei einer Funktion von drei unabhängigen Variablen $f(x, y, z)$ ist die Charakterisierung einer Richtung im Raum erforderlich. Diese kann durch die Vorgabe eines geeigneten Einheitsvektors, dessen Projektionen auf die Koordinatenrichtungen durch

$$(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_x) = \cos \alpha_x \quad (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_y) = \cos \alpha_y \quad (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_z) = \cos \alpha_z$$

gegeben sind, geschehen. Die Winkel α_i sind die Winkel zwischen den Koordinatenachsen und dem Vektor \mathbf{e}_α . Man bezeichnet jedes der drei Skalarprodukte als den Richtungskosinus (in der jeweiligen Richtung). Wegen der Darstellung

$$\mathbf{e}_\alpha = \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \mathbf{e}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha = 1$$

folgt

$$\sum_{i=1}^3 (\cos \alpha_i)^2 = 1 .$$

Für die Festlegung einer Richtung im \mathcal{R}_3 benötigt man nur zwei Winkel. Der dritte ist dann (eindeutig) bestimmt.

Für die Ableitung der Funktion $f(x, y, z)$ in der durch \mathbf{e}_α vorgegebenen Richtung erhält man aus der Definition

$$\begin{aligned} & D^{(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)} f(x, y, z) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\rho} (f(x + \rho \cos \alpha_x, y + \rho \cos \alpha_y, z + \rho \cos \alpha_z) - f(x, y, z)) \right\} \end{aligned}$$

unter den gleichen Voraussetzungen wie im Fall von zwei Veränderlichen den Grenzwert

$$= \cos \alpha_x f_x(x, y, z) + \cos \alpha_y f_y(x, y, z) + \cos \alpha_z f_z(x, y, z) .$$

Dieser Grenzwert beschreibt den Anstieg der Funktion $f(x, y, z)$ in dem Punkt $P = (x, y, z)$ in der Richtung \mathbf{e}_α .

Im allgemeinen Fall $z = f(x_1, \dots, x_n)$ charakterisiert man eine beliebige Richtung in einem n -dimensionalen euklidischen Raum durch einen Einheitsvektor

$$\mathbf{e}_\alpha = \sum_{i=1}^n (\cos \alpha_i) \mathbf{e}_i .$$

Die n Richtungskosinuswerte beschreiben (eine orthonormale Basis vorausgesetzt) die Projektion des Vektors \mathbf{e}_α auf die Koordinatenachsen (siehe Math.Kap. 3.1.3)

$$\cos \alpha_i = (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_i) ,$$

wobei wegen $(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha) = 1$ die Einschränkung

$$\sum_i (\cos \alpha_i)^2 = 1$$

gilt. Eine beliebige Richtung im n dimensionalen Raum wird durch $(n - 1)$ Größen (Winkel) festgelegt.

Für die Richtungsableitung gilt dann, unter der Voraussetzung, dass alle partiellen Ableitungen erster Ordnung in dem Punkt $P = (x_1, \dots, x_n)$ stetig sind

$$\begin{aligned}
& D^{(\alpha_1 \dots \alpha_n)} f(x_1, \dots, x_n) \\
&= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\rho} (f(x_1 + \rho \cos \alpha_1, \dots, x_n + \rho \cos \alpha_n) - f(x_1, \dots, x_n)) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n (\cos \alpha_i) f_{x_i}(x_1, \dots, x_n) .
\end{aligned}$$

Diese Aussage stimmt mit dem Ergebnis für $n = 2$ überein, nur muss man wegen $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$ die Umschreibung $\cos \alpha_2 = \cos(\pi/2 - \alpha_1) = \sin \alpha_1$ vornehmen.

Es ist nützlich, den Begriff der Richtungsableitung in einer alternativen Form zu fassen. Man definiert zu diesem Zweck den **Gradientenoperator**

$$\nabla = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} ,$$

in Komponentenform schreibt man

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) .$$

Dies ist ein Differentialoperator mit Vektorcharakter. Eine andere, übliche Schreibweise ist

$$\nabla = \text{grad} .$$

Die Anwendung dieses Operators auf eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$, d.h. eine skalare Funktion, ergibt eine Vektorfunktion (eine Funktion mit n Komponenten, vergleiche Math.Kap. 5.1)

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i f_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

oder in Komponentenform

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = (f_{x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{x_n}(x_1, \dots, x_n)) .$$

Die Komponenten der Vektorfunktion sind die n partiellen Ableitungen der Skalarfunktion. Mit Hilfe des Gradientenbegriffes kann man die Richtungsableitung in der Form

$$\begin{aligned}
D^{(\alpha_1 \dots \alpha_n)} f(x_1, \dots, x_n) &= \mathbf{e}_\alpha \cdot \nabla f(x_1, \dots, x_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_i) f_{x_i}(x_1, \dots, x_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (\cos \alpha_i) f_{x_i}(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

darstellen. Die Richtungsableitung entspricht dem Skalarprodukt des Gradienten von f mit dem vorgegebenen Richtungsvektor e_α . Die Richtungsableitung ist somit eine skalare Größe.

Zwei einfache Beispiele sollen die Antwort auf die Frage nach der anschaulichen Bedeutung des Gradientenoperators vorbereiten. In dem ersten Beispiel ist der Definitionsbereich die x_1 - x_2 Ebene². Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

stellt ein Drehparaboloid im \mathcal{R}_3 dar (Abb. 4.9a). Die Höhenlinien dieser Funktion sind konzentrische Kreise um den Koordinatenursprung. Der Gradientenvektor ist in diesem Fall

$$\text{grad } f = \nabla f = 2x_1 e_1 + 2x_2 e_2 .$$

Benutzt man ebene Polarkoordinaten, so findet man

$$\nabla f = 2r(\cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2) = 2r e_r .$$

Der Gradientenvektor zeigt in die Radialrichtung (Abb. 4.9b). Dies ist offensichtlich die Richtung des stärksten Anstiegs der vorgegebenen Funktion. Für

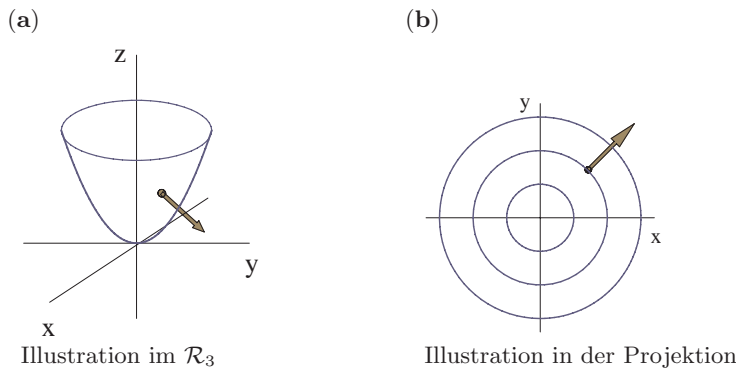


Abb. 4.9. Der Gradientenvektor für ein Drehparaboloid

die Richtungsableitung (den Anstieg der Funktion in beliebiger Richtung α) gilt bei diesem Beispiel

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)} f(x_1, x_2) &= e_\alpha \cdot \nabla f(x_1, x_2) \\ &= 2r \{ \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha \} \\ &= 2r \cos(\varphi - \alpha) . \end{aligned}$$

Die Richtungsableitung ist maximal für $\alpha = \varphi$, sie verschwindet für $\alpha = \varphi \pm \pi/2$, d.h. für eine Richtung tangential an die Höhenlinie (Abb. 4.10).

² Benutze x_1 und x_2 anstelle von x und y .

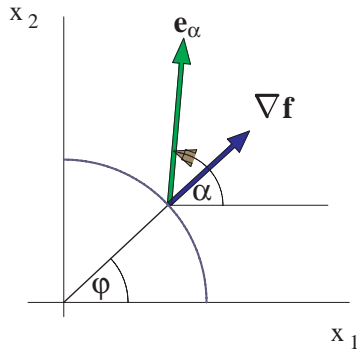


Abb. 4.10. Zu der Beziehung zwischen Richtungsableitung und Gradient

In dem zweiten Beispiel ist der Definitionsbereich der \mathcal{R}_3 , die Funktion ist die Abstandsfunktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{1/2} = r .$$

Die Niveaulächen dieser Funktion sind konzentrische Kugelschalen um den Koordinatenursprung. Für den Gradienten dieser Funktion gilt

$$\text{grad} f = \frac{x_1}{r} \mathbf{e}_1 + \frac{x_2}{r} \mathbf{e}_2 + \frac{x_3}{r} \mathbf{e}_3$$

bzw. in Kugelkoordinaten

$$(\sin \theta \cos \varphi) \mathbf{e}_1 + (\sin \theta \sin \varphi) \mathbf{e}_2 + (\cos \theta) \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_r .$$

Auch hier zeigt der Gradientenvektor in Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion.

Für eine allgemeinere Diskussion der Situation im \mathcal{R}_2 (Abb. 4.11) betrachtet man die Richtungsableitung einer Funktion $z = f(x_1, x_2)$ in einem Punkt $P = (x_{10}, x_{20})$

$$D^{(\alpha)} f(x_{10}, x_{20}) = \cos \alpha f_{x_1}(x_{10}, x_{20}) + \sin \alpha f_{x_2}(x_{10}, x_{20}) .$$

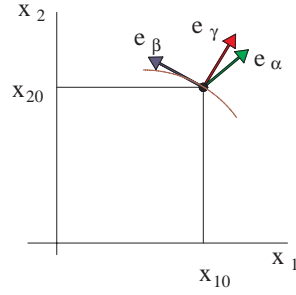
In Richtung der Tangente an die Höhenlinie durch P gibt es keinen Anstieg. Die Richtung der Tangente wird also durch

$$D^{(\beta)} f(x_{10}, x_{20}) = \cos \beta f_{x_1}(x_{10}, x_{20}) + \sin \beta f_{x_2}(x_{10}, x_{20}) = 0$$

charakterisiert. Daraus ergibt sich

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = - \frac{f_{x_1}(x_{10}, x_{20})}{f_{x_2}(x_{10}, x_{20})}$$

und

**Abb. 4.11.** Zur Interpretation des Gradienten

$$\sin \beta = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = - \frac{f_{x_1}}{[f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2]^{1/2}}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{f_{x_2}}{[f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2]^{1/2}}.$$

Die Richtungsableitung in Richtung der Tangente kann auf der anderen Seite mittels

$$\mathbf{e}_\beta \cdot \nabla f = (\cos \beta \mathbf{e}_1 + \sin \beta \mathbf{e}_2) \cdot (f_{x_1} \mathbf{e}_1 + f_{x_2} \mathbf{e}_2) = 0$$

berechnet werden, woraus die Aussage folgt: Der Vektor ∇f steht senkrecht auf der Tangente an der Höhenlinie.

Das Betragsquadrat des Gradientenvektors ist $|\nabla f|^2 = f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2$. Vergleicht man dies mit dem Betragsquadrat der Richtungsableitung in der Richtung α

$$\begin{aligned} \left(D^{(\alpha)} f\right)^2 &= (\cos \alpha f_{x_1} + \sin \alpha f_{x_2})^2 \\ &= \cos^2 \alpha f_{x_1}^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha f_{x_1} f_{x_2} + \sin^2 \alpha f_{x_2}^2 \\ &= f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 - (\sin^2 \alpha f_{x_1}^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha f_{x_2} f_{x_1} + \cos^2 \alpha f_{x_2}^2) \\ &= f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 - (\sin \alpha f_{x_1} - \cos \alpha f_{x_2})^2 \\ &\leq f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2, \end{aligned}$$

so findet man, dass der Anstieg in Richtung \mathbf{e}_α kleiner ist als der Anstieg in Richtung von ∇f .

Dieses Argument demonstriert in allgemeiner Weise, dass ∇f senkrecht auf der Tangente an die Höhenlinien steht und die Richtung des stärksten Anstiegs markiert.

Entsprechend zeigt man für $z = f(x_1, x_2, x_3)$: Der Vektor

$$\text{grad} f = f_{x_1} e_1 + f_{x_2} e_2 + f_{x_3} e_3$$

steht in jedem Punkt senkrecht auf der Niveauläche durch den Punkt P (Abb. 4.12).

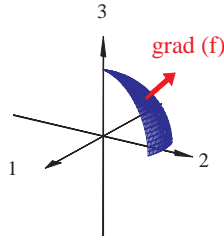


Abb. 4.12. Illustration des Gradientenvektors

Der Gradient kann mit einem weiteren Ableitungsbegriff in Verbindung gebracht werden. Diese Größe ist das totale Differential.

4.2.4 Das totale Differential

Für eine Funktion von zwei Veränderlichen $z = f(x, y)$ kann man den Zuwachs der Funktion für zwei infinitesimal benachbarte Punkte der x - y Ebene durch

$$dz = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$$

darstellen und in gewohnter Weise umschreiben

$$dz = f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy) + f(x, y + dy) - f(x, y) .$$

Mit dem Mittelwertsatz folgt daraus in linearer Näherung

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy + O(d^2) .$$

Die lineare Näherung des Zuwachses bezeichnet man als das **erste totale Differential** der Funktion $f(x, y)$ (Abb. 4.13).

Eine geometrische Deutung dieses Ausdruckes gewinnt man, indem man die Differentiale durch Differenzen (endliche Größen) ersetzt. Die resultierende Gleichung

$$(z - z_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

beschreibt eine Ebene durch den Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$. Diese Ebene ist die Tangentialebene an die Fläche $f(x, y)$ in dem Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Das totale Differential (eine Funktion der vier Variablen x, y, dx, dy) stellt somit

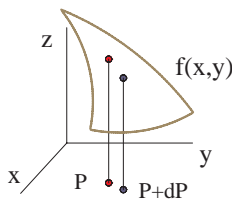


Abb. 4.13. Zur Definition des totalen Differentials

eine infinitesimale Tangentialebene an die Fläche $f(x, y)$ dar.

Zusätzlich ist zu dem Begriff des totalen Differentials folgendes zu bemerken.

- Die rechte Seite der obigen Definitionsgleichung kann man in der Form schreiben

$$dz = \nabla f \cdot d\mathbf{r} \quad \text{mit} \quad d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y .$$

Den linear genäherten Zuwachs der Funktion für eine infinitesimale Verschiebung $d\mathbf{r}$ in beliebiger Richtung erhält man als das Skalarprodukt von $\text{grad} f$ mit $d\mathbf{r}$. Ein derartiger Ausdruck

Vektorfunktion mal (infinitesimaler) Verschiebung

spielt (mit der entsprechenden Vektorfunktion) in der Physik bei der Diskussion des Arbeitsbegriffes eine Hauptrolle (siehe Buch.Kap. 3.2.3).

- Die Fehlerrechnung (z.B. im physikalischen Praktikum) basiert auf dem Begriff des totalen Differentials. Für eine mit einer Funktion $f(x, y)$ angesprochenen Situation würde die Aussage gelten:

Zwei Messgrößen x, y bestimmen über den Zusammenhang $z = f(x, y)$ die Größe z . Interpretiert man die Differentiale dx, dy als Messfehler, so ergibt sich aus dem totalen Differential die Aussage

$$|dz| = |f_x dx + f_y dy| .$$

Benutzt man die Dreiecksungleichung $|a + b| \leq |a| + |b|$, so folgt die Abschätzung

$$|dz| \leq |f_x| |dx| + |f_y| |dy| .$$

Diese Fehlerabschätzung ist nur sinnvoll, wenn die Messfehler $|dx|$ und $|dy|$ nicht zu groß sind. Man muss immer im Auge behalten, dass die Basis für diese Abschätzung die lineare Näherung des Zuwachses ist.

- Die Bezeichnung ‘erstes’ totales Differential deutet an, dass man totale Differentiale höherer Ordnung betrachten kann. Für den Fall von Funktionen mit zwei Variablen lautet das zweite totale Differential (man beachte, dass x, y, dx und dy unabhängige Größen sind)

$$d^2z = \frac{\partial}{\partial x}(dz) dx + \frac{\partial}{\partial y}(dz) dy .$$

Setzt man die Vertauschbarkeit der gemischt partiellen Ableitungen voraus, so ergibt sich in zweiter Ordnung in den Differentialen

$$d^2z = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}(dx dy) + f_{yy}(dz)^2 .$$

Mit dem zweiten totalen Differential nähert man die Fläche f durch eine (infinitesimale) Tangentialfläche zweiter Ordnung.

Die Definition der totalen Differentiale kann man auch auf den Fall von Funktionen mit n Variablen übertragen. Das erste totale Differential einer Funktion $z = f(x_1, \dots, x_n)$

$$dz = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_i = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

stellt den Zuwachs der Funktion in linearer Näherung dar. Die geometrische Interpretation ist nicht sehr anschaulich. In Übertragung der Situation für $n = 2$ würde man sagen: Diese Gleichung beschreibt die (infinitesimale) tangentiale Hyperebene an die Hyperfläche f im $(n + 1)$ -dimensionalen Raum.

4.2.5 Die Kettenregel

Im Allgemeinen bedürfen die Rechenregeln bei der partiellen Differentiation keiner besonderen Diskussion. Die Regeln der gewöhnlichen Differentiation können direkt übertragen werden. So gilt zum Beispiel die Produktregel

$$\frac{\partial}{\partial x} (u(x, y)v(x, y)) = u_x v + u v_x .$$

Zum Beweis greift man auf die Definition der partiellen Ableitung zurück und wiederholt die Argumentation für die Herleitung der Produktregel bei der gewöhnlichen Differentiation.

Eine Ausnahme, die der Diskussion bedarf, ist die Kettenregel. Infolge der erhöhten Anzahl von Variablen kann die Kettenregel im Fall von Funktionen mit mehreren Veränderlichen einigermaßen komplizierte Formen annehmen. Auf der anderen Seite bietet die größere Auswahl eine Vielfalt von Anwendungsmöglichkeiten.

Ein Beispiel soll die Thematik einführen. Hat man neben einer Funktion $z = f(x, y)$ die zusätzliche Aussage $x = x(t)$, $y = y(t)$ und setzt man die Funktionen zusammen, so ergibt sich eine Funktion der Variablen t

$$z = f(x(t), y(t)) = F(t) .$$

Interpretiert man $(x(t), y(t))$ als die Parameterdarstellung einer Kurve K in der x - y Ebene, so stellt die Funktion $F(t)$ den über dieser Kurve liegenden

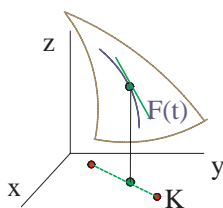


Abb. 4.14. Illustration der Kettenregel

‘Ausschnitt‘ aus der Fläche $f(x, y)$ dar (Abb. 4.14).

Möchte man die gewöhnliche Ableitung dF/dt (die Tangente an die Raumkurve) durch die partiellen Ableitungen von f und die gewöhnlichen Ableitungen von $x(t)$ und $y(t)$ ausdrücken, so benötigt man die Kettenregel. Deren Herleitung sieht für den vorliegenden Fall folgendermaßen aus:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

ist in linearer Näherung

$$dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy .$$

Es gilt außerdem für die Verschiebung entlang der Kurve K

$$dx = \dot{x}(t) dt \quad dy = \dot{y}(t) dt .$$

Zusammensetzung ergibt im Grenzfall $dt \rightarrow 0$

$$\frac{dF}{dt} = f_x \dot{x} + f_y \dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} .$$

Dieses Resultat kann zum Beispiel dazu benutzt werden, um die Ableitung von Funktionen wie $F(t) = (\cos t)^{\sin t}$ oder allgemeiner $F(t) = x(t)^{y(t)}$ zu bestimmen. Diese Aufgabe ist mit normalen Methoden gar nicht so einfach zu lösen. Mit der Kettenregel folgt jedoch

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= (yx^{y-1}) \dot{x} + (x^y \ln x) \dot{y} \\ &= x^{y-1} (y\dot{x} + x\dot{y} \ln x) , \end{aligned}$$

für das konkrete Beispiel also

$$\frac{d}{dt} ((\cos t)^{\sin t}) = (\cos t)^{(\sin t - 1)} \{ -\sin^2 t + \cos^2 t \ln(\cos t) \} .$$

Weitere Varianten, die zu anderen Formen der Kettenregel führen, sind z.B.

$$z = f(x) \quad x = g(t_1, t_2) \quad \longrightarrow z = F(t_1, t_2)$$

$$z = f(x, y) \quad x = x(t_1 t_2), y = y(t_1 t_2) \quad \longrightarrow z = F(t_1, t_2)$$

Die allgemeine Aufgabenstellung lautet: Gegeben ist $z = f(x_1, \dots, x_n)$ sowie für jede Variable $x_i = x_i(t_1, \dots, t_m)$. Berechne die Ableitungen der

zusammengesetzten Funktion $z = F(t_1, \dots, t_m)$.

Die Herleitung der entsprechenden Formeln basiert³, wie in dem einführenden Beispiel, auf der Zusammensetzung von totalen Differentialen. Die Ergebnisse bis zur zweiten Ableitung, vorausgesetzt alle auftretenden Ableitungen existieren und sind stetig, lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t_l} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_l} \quad l = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t_l \partial t_k} &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial t_l} \frac{\partial x_j}{\partial t_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t_l \partial t_k} \quad l, k = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}$$

Man muss noch die Verabredung treffen, dass das partielle Differentiationsymbol durch das gewöhnliche zu ersetzen ist, falls nur eine x - oder nur eine t -Variable auftritt.

Von den vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten der Kettenregel soll nur ein Beispiel vorgestellt werden, das in der Physik besonders wichtig ist: Die Umrechnung des Laplaceoperators und des Gradientenoperators in krummlinige Koordinaten.

Schon in der zweidimensionalen Welt erfordert die direkte Antwort einige Schreibarbeit, deswegen werden die expliziten Ausführungen auf diesen Fall beschränkt bleiben. Für eine Funktion von zwei Variablen sind die folgenden Größen von Interesse

$$\begin{aligned}\nabla U(x, y) &= U_x e_x + U_y e_y \\ \Delta U(x, y) &= U_{xx} + U_{yy}.\end{aligned}$$

Nimmt man an, dass U eine zusammengesetzte Funktion ist, z.B.

$$U(x, y) = U(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = u(r, \varphi)$$

mit den Funktionen

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi(x, y) = \arctan \frac{y}{x},$$

so kann man die vier Ableitungen U_x, U_y, U_{xx}, U_{yy} nach der Kettenregel berechnen. Man erhält für die ersten Ableitungen

$$\begin{aligned}U_x &= u_r r_x + u_\varphi \varphi_x \\ U_y &= u_r r_y + u_\varphi \varphi_y.\end{aligned}$$

Zu notieren sind die Ableitungen von r und φ

³ Siehe Literaturliste.

$$r_x = \frac{x}{r} = \cos \varphi \quad r_y = \frac{y}{r} = \sin \varphi$$

$$\varphi_x = \frac{1}{(1 + (y/x)^2)} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}$$

$$\varphi_y = \frac{1}{(1 + (y/x)^2)} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Damit ergibt sich (nach einfacher Sortierung)

$$\begin{aligned} \nabla U(x, y) &= u_r (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) + \frac{1}{r} u_\varphi (-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) \\ &= u_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} u_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Die Darstellung des Gradientenoperators in ebenen Polarkoordinaten kann daraus extrahiert werden

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Die Rechnung für den Laplaceoperator ist ein wenig länglicher. Der Ausgangspunkt ist die Kettenregel

$$U_{xx} = u_{rr} r_x r_x + 2u_{r\varphi} r_x \varphi_x + u_{\varphi\varphi} \varphi_x \varphi_x + u_r r_{xx} + u_\varphi \varphi_{xx}$$

$$U_{yy} = u_{rr} r_y r_y + 2u_{r\varphi} r_y \varphi_y + u_{\varphi\varphi} \varphi_y \varphi_y + u_r r_{yy} + u_\varphi \varphi_{yy}.$$

Setzt man hier alle benötigten Ableitungen von r und φ ein

$$\begin{aligned} r_{xx} &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3} = \frac{\sin^2 \varphi}{r} \\ r_{yy} &= \frac{x^2}{r^3} = \frac{\cos^2 \varphi}{r} \\ \varphi_{xx} &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \\ \varphi_{yy} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2}, \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta U(x, y) &= u_{rr} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 2u_{r\varphi} \left(-\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \right) \\ &\quad + u_{\varphi\varphi} \left(\frac{1}{r^2} \right) (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + u_r \left(\frac{1}{r} \right) (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \\ &\quad + u_\varphi \frac{2}{r^2} (\cos \varphi \sin \varphi - \cos \varphi \sin \varphi) \\ &= u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}. \end{aligned}$$

Daraus entnimmt man die Form des Laplaceoperators in ebenen Polarkoordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} .$$

Die Gewinnung entsprechender Formeln für die Umrechnung der zwei Differentialoperatoren von dreidimensionalen kartesischen Koordinaten in **Zylinderkoordinaten** enthält keine wesentlich neuen Elemente. Die entsprechenden Rechnungen für dreidimensionale kartesische Koordinaten in **Kugelkoordinaten** (oder andere krummlinige Koordinaten) sind unter Umständen einigermaßen aufwendig (Ein allgemeiner Zugang wird in Band 2, Math. Kap. 5 erläutert). Diese Formeln werden jedoch in der Physik oft benötigt. Für Kugelkoordinaten ist der Gradientenoperator

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} ,$$

der Laplaceoperator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} .$$

Jeder theoretische Physiker sollte, nach dem angedeuteten Muster, wenigstens die entsprechenden Rechnungen für Kugelkoordinaten durchgeführt haben⁴.

Eine abschließende Bemerkung ist vielleicht noch nützlich, um einem häufigen Missverständnis vorzubeugen. Für die Funktion

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad \text{mit} \quad x_i = x_i(t)$$

wird bei Bildung der partiellen Ableitung nach t

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{\partial t}$$

nur nach der *explizit* auftretenden Variablen t differenziert. Die totale Ableitung von f nach t ist hingegen

⁴ Formelsammlungen sind in der Literaturliste aufgeführt.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}.$$

In diesem Fall greift die Kettenregel.

4.3 Integration

Auch bei der Diskussion der Integration findet man im Fall von Funktionen von mehreren Veränderlichen eine große Vielfalt von Möglichkeiten. Neben der Wahl der Integrationsbereiche in der Form von Kurven, Flächen, Volumina und höher dimensional Bereichen kann man, als Äquivalent zu bestimmten und unbestimmten Integralen für Funktionen von einer Veränderlichen, Integrale mit festen und mit offenen (von Variablen abhängige) Grenzen betrachten. Die Ergebnisse der Integration können dann Flächeninhalte, Volumeninhalte oder wieder Funktionen sein. Integriert man z.B. eine Funktion von zwei Veränderlichen nur über eine der Variablen, so kann man eine Vielfalt von ‘höheren Funktionen’ definieren und darstellen. Die elliptischen Integrale, die in einem eigenen Abschnitt vorgestellt werden, sind ein Beispiel solcher Funktionen, die für die Belange der Physik wichtig sind. Der erste Diskussionspunkt betrifft Integrale mit Funktionen von zwei Veränderlichen.

4.3.1 Einfache Integrale von $f(x, y)$

Eine Funktion $z = f(x, y)$ ist über einem Bereich definiert (und stetig). Mit dieser Funktion berechnet man das (bestimmte) Integral

$$F_{ab}(x) = \int_a^b f(x, y) dy.$$

Die Variable x wird während der Integration wie eine Konstante behandelt. Die Integrationsgrenzen liegen im Innern des Definitionsbereiches (Abb. 4.15a). Die geometrische Deutung des Integrals ist einfach: Die Funktion $f(x_{\text{fest}}, y)$

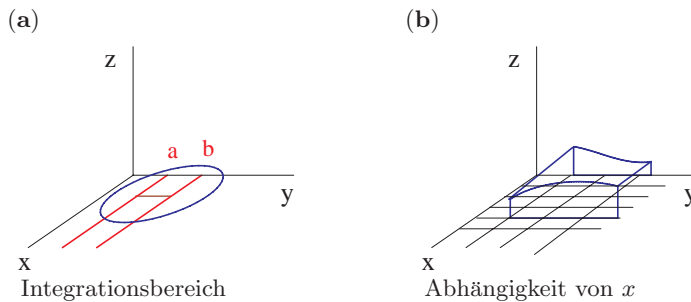


Abb. 4.15. Das Integral $F_{ab}(x)$

beschreibt die Schnittkurve der Fläche f mit der Ebene $x = x_{\text{fest}}$. Das Integral stellt dann den Inhalt einer ebenen Fläche dar, die von der Strecke ab in der x - y Ebene, der Schnittkurve und den entsprechenden Parallelen zu der z -Achse begrenzt ist. Es liegt das bekannte Integral vor, nur ist es in eine dreidimensionale Welt eingebettet. Für verschiedene x -Werte erhält man verschiedene Schnittkurven und somit verschiedene Flächen. Man berechnet also nicht nur eine Fläche, sondern eine ganze Schar von Flächen (Abb. 4.15b).

Ein konkretes Beispiel ist (Abb. 4.16)

$$\int_0^1 (x^2 + y^2) dy = \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 = x^2 + \frac{1}{3}.$$

Das Ergebnis kann man folgendermaßen veranschaulichen: Für $x = 0$ ist die Schnittkurve die Parabel $z = y^2$. Die Fläche unter der Parabel (zwischen den Punkten 0 und 1) hat den Wert $1/3$ (Abb. 4.16a). Für $x \neq 0$ ist die Schnittkurve $z = x^2 + y^2$. Die Fläche unter dieser Kurve setzt sich zusammen aus dem Rechteck $x^2 \cdot 1$ und der Fläche unter dem Parabelbogen (Abb. 4.16b).

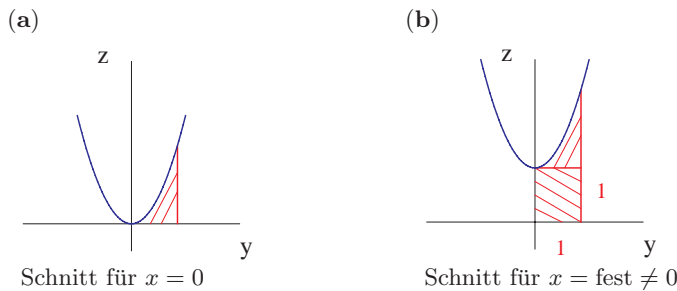


Abb. 4.16. Integration unter einem Paraboloid

Es besteht natürlich kein Grund, die y -Koordinate auszuzeichnen. Für das Integral

$$G_{\alpha\beta}(y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx$$

lautet die entsprechende Interpretation: Es stellt die Fläche zwischen der Schnittkurve von f mit der Ebene $y = y_{\text{fest}}$ dar. Als ein weiteres Beispiel kann man für die Funktion y^x zwei Integrale berechnen

$$\int_0^1 y^x dy = \frac{y^{x+1}}{(x+1)} \Big|_0^1 = \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1)$$

$$\int_0^1 y^x dx = \frac{y^x}{\ln y} \Big|_0^1 = \frac{(y-1)}{\ln y} \quad (y \neq 0).$$

(Setze $y = e^{\ln y}$ in dem zweiten Integral).

Unabhängig von der geometrischen Anschauung, ist das Ergebnis solcher Integrationen eine Funktion von einer Veränderlichen, die über ein Integral definiert (oder dargestellt) ist. Es gibt in der Tat höhere Funktionen, die auf diese Weise definiert werden, wie z.B. die **elliptischen Integrale**

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} [1 - k^2 \sin^2 y]^{-1/2} dy \quad (\text{erster Art})$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} [1 - k^2 \sin^2 y]^{1/2} dy \quad (\text{zweiter Art}).$$

Diese Funktionen treten bei der Diskussion verschiedener physikalischer Probleme auf, so bei der Diskussion der Pendelbewegung für große Ausschläge (Buch.Kap. 4.2.1) oder in der Kreiseltheorie (Buch.Kap. 6.3.5). Diese Funktionen werden in dem nächsten Abschnitt gesondert diskutiert.

Zwei weitere, etwas einfachere Beispiele von Funktionen, die durch solche Integrale dargestellt werden, sollen hier noch vorgestellt werden. Die erste Funktion wird durch das Integral (Abb. 4.17)

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{y} dy = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin xy}{y} dy$$

definiert. Der Integrand ist für $y = 0$ stetig

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin xy}{y} = x \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin xy}{y} = 0 \right).$$

Die Fläche, die durch den Integranden dargestellt wird, ist einigermaßen kompliziert. Der Schnitt der Fläche mit einer Ebene $x = \text{const.}$ ist in der Abb. 4.17 dargestellt.

Bei der Berechnung des Integrals muss man die Fälle unterscheiden:

Für $x > 0$ ergibt die Substitution $u = xy \quad du = x dy$

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Der Wert ist einer Tabelle bestimmter Integrale entnommen. Für die explizite Berechnung benötigt man den Cauchyschen Integralsatz aus der Analysis im Komplexen.

Ist $x = 0$, so folgt wegen $f(0, y) = 0$ das Resultat $F(0) = 0$.

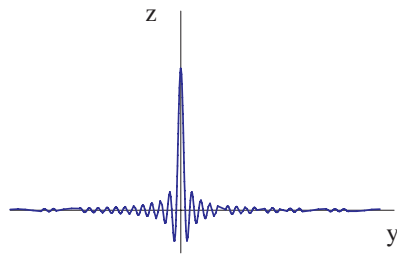


Abb. 4.17. Die Funktion $(\sin xy)/y$ für $x = \text{const.}$

Im Fall von negativen x -Werten ($x < 0$) erhält man mit der Substitution $u = |x|y$ $du = |x|dy$

$$F(x) = - \int_0^\infty \frac{\sin |x|y}{y} dy = - \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = -\frac{\pi}{2}.$$

Die Funktion $F(x)$ ist eine Sprungfunktion (Abb. 4.18). Die Funktion ist unstetig, obschon der Integrand stetig ist und das uneigentliche Integral konvergiert.

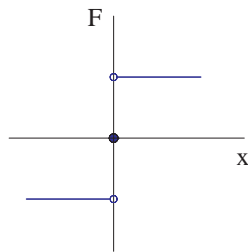


Abb. 4.18. Das Integral mit $(\sin xy)/y$ definiert eine Stufenfunktion

Das nächste Beispiel ist die vielbenutzte Γ -Funktion (Gammafunktion), die durch das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$$

definiert ist (siehe auch Band 2, Math. Kap. 4.1). Anhand der Definition gewinnt man z.B. die Aussagen:

- Das Integral für $x = 1$ ist einfach.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-y} dy = [-e^{-y}]_0^\infty = 1.$$

- Partielle Integration von

$$x\Gamma(x) = x \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy \quad (x > 0)$$

ergibt

$$= y^x e^{-y} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty y^x e^{-y} dy .$$

Der erste Term verschwindet für $x > 0$. Der zweite Term stellt die Funktion $\Gamma(x+1)$ dar. Das Resultat ist also eine alternative Definition (für $x > 0$) in der Form einer Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) .$$

Für ganzzahlige Werte von x folgt

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) .$$

Die Auswertung dieser Rekursion mit $\Gamma(1) = 1$ ergibt

$$\Gamma(2) = 1 \quad \Gamma(3) = 2 \cdot 1 \quad \Gamma(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ etc.} \quad \rightarrow \quad \Gamma(n) = (n-1)! .$$

Die Γ -Funktion ist eine Verallgemeinerung des Begriffes ‘Fakultät’.

Hat man eine Funktion auf diese Weise durch ein bestimmtes Integral definiert, so ist es nützlich, die Frage zu stellen, ob und wie man diese Funktion differenzieren kann. Man beweist die folgende Differentiationsregel:

Sind $f(x, y)$ und $f_x(x, y)$ stetig, so gilt für die Ableitung der Funktion $F_{ab}(x) = \int_a^b f(x, y) dy$

$$\frac{dF_{ab}(x)}{dx} = \int_a^b f_x(x, y) dy .$$

Man darf also (unter den genannten Voraussetzungen) Differentiation und Integration vertauschen. Eine entsprechende Regel gilt für

$$G_{\alpha\beta}(y) = \int_\alpha^\beta f(x, y) dx .$$

Zur Illustration dieser Regeln kann das Beispiel

$$\frac{1}{(x+1)} = \int_0^1 y^x dy, \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(x+1)} \right) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

betrachten. Gemäß der Differentiationsregel gilt

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(x+1)} \right) = \int_0^1 (y^x \ln y) dy ,$$

so dass man bei partieller Integration in der Tat

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(x+1)} \right) &= \frac{1}{(x+1)} y^{x+1} \ln y \Big|_0^1 - \frac{1}{(x+1)} \int_0^1 y^x dy \\ &= 0 - \frac{1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

erhält.

Man kann die Diskussion der Integration über eine der Variablen erweitern, indem man Integrale der Form

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy = g(x, a(x), b(x)) = F(x)$$

betrachtet. Die Integrationsgrenzen sind keine Konstanten sondern Funktionen von x (Abb. 4.19). Sowohl die Funktion $y = a(x)$ als auch die Funktion $y = b(x)$ stellen Kurven in der x - y Ebene dar. Bei der Integration über y ist das Integrationsintervall (für jeden Wert von x) durch diese Kurven begrenzt.

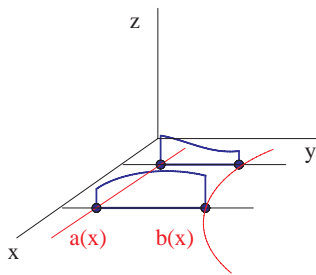


Abb. 4.19. Integration über y mit variablen Grenzen

Als ein direktes Beispiel kann die folgende Vorgabe dienen. Die Funktion $z = 3 - x^2 - y^2$ stellt ein umgestülptes Drehparaboloid dar. Die variablen Integrationsgrenzen sind zwei Halbkreisbögen

$$a(x) = -\sqrt{1-x^2} \quad b(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Die berechneten Flächen, eingebettet in die dreidimensionale Welt, sind in Abb. 4.20a-c für $x = 0, 1/2$ und 1 dargestellt.

Die Auswertung des Integrals ergibt

$$F(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x^2 - y^2) dy$$

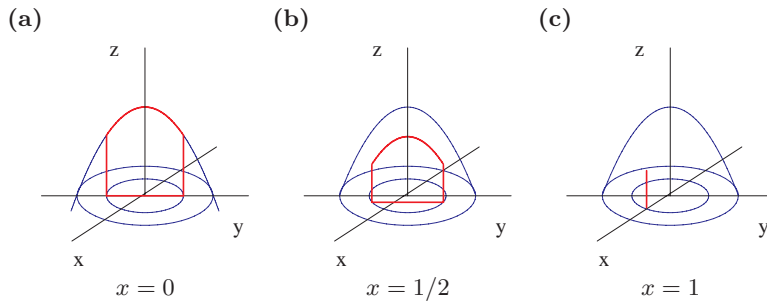


Abb. 4.20. Integration unter einem Paraboloid bei Begrenzung des Integrationsbereiches durch Halbkreisbogen. Illustration des Integrals für verschiedene, feste Werte von x .

$$\begin{aligned}
 &= \left[(3 - x^2)y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \\
 &= \frac{4}{3}(4 - x^2)\sqrt{1 - x^2}.
 \end{aligned}$$

Für Integrale mit variablen Grenzen muss man die Differentiationsregeln erweitern. Man benötigt dazu die Aussagen

(i) Aus der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dx}g(x, a(x), b(x)) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial a} \frac{da}{dx} + \frac{\partial g}{\partial b} \frac{db}{dx}.$$

(ii) Für die Ableitung nach den Integrationsgrenzen gilt

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} = f(x).$$

Daraus ergibt sich die erweiterte Differentiationsregel

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy &= \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(x, y) dy \\
 &\quad + f(x, b(x)) \frac{db(x)}{dx} - f(x, a(x)) \frac{da(x)}{dx}.
 \end{aligned}$$

Das Minuszeichen tritt infolge der Ableitung nach der unteren Grenze auf. (Man überprüfe die Gültigkeit dieser Regel für das obige Beispiel).

Integriert man über beide Variablen einer Funktion $f(x, y)$, so erhält man Doppelintegrale, die in dem nächsten Abschnitt näher betrachtet werden.

4.3.2 Doppel- und Bereichsintegrale von $f(x, y)$

Ausgangspunkt ist das Integral

$$I_1 = \int_{\alpha}^{\beta} dx F_{ab}(x) ,$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die Funktion $F_{ab}(x)$ durch Integration über eine zweite Variable y gewonnen wurde

$$I_1 = \int_{\alpha}^{\beta} dx F_{ab}(x) = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_a^b dy f(x, y) .$$

Es liegt ein **Doppelintegral** vor. Mit diesem Integral berechnet man ein Volumen, dessen Grundfläche ein Rechteck in der x - y Ebene ist. Von oben wird das Volumen durch die Fläche f begrenzt. Die Seitenflächen sind eben (Abb. 4.21).

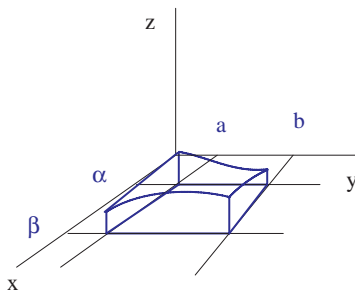


Abb. 4.21. Integration über einen Rechteckbereich: Darstellung des Integrals

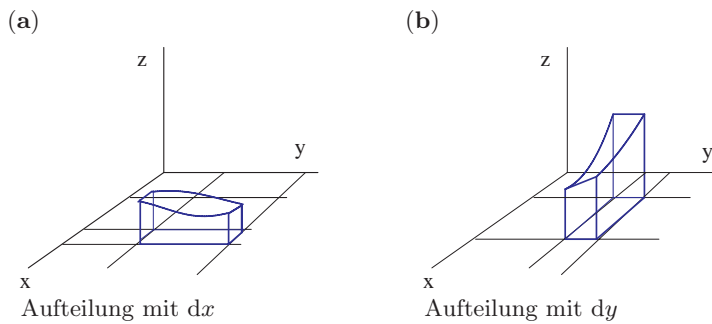
Die Form des Integrals deutet an, wie dieses Volumen berechnet wird: Man berechnet zunächst die Fläche $F_{ab}(x)$ (innere Integration), bildet dann die infinitesimalen Scheibchen $F_{ab}(x) dx$ und addiert diese zu dem Gesamtvolumen (äußere Integration) (Abb. 4.22a). Es bestehen weitere Möglichkeiten, dieses Volumen zu unterteilen. Die zweite Möglichkeit wird durch die folgende Schreibweise ausgedrückt

$$I_2 = \int_a^b dy \int_{\alpha}^{\beta} dx f(x, y) .$$

Hier berechnet man zuerst Flächen parallel zur x - z Ebene, bildet infinitesimale Scheibchen in der y -Richtung und addiert diese (in einem Grenzprozess, Abb. 4.22b).

Man würde erwarten, daß $I_1 = I_2$ ist. Die mathematischen Voraussetzungen für die Vertauschbarkeit der beiden Integrationen lautet: $f(x, y)$ muss über dem Integrationsbereich bis auf endlich viele Unendlichkeitsstellen beschränkt sein:

$$|f(x, y)| < M \quad \text{bis auf endlich viele Unendlichkeitsstellen} .$$

**Abb. 4.22.** Integration über einen Rechteckbereich

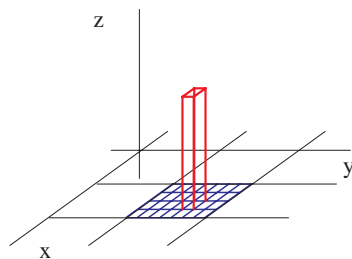
Eine dritte Berechnungsmöglichkeit wird durch die Schreibweise angedeutet

$$I_3 = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy ,$$

wobei R die bei den anderen Optionen benutzte Grundfläche, ein Rechteck, bezeichnet. Für dieses **Bereichsintegral** betrachtet man die folgende Unterteilung des Volumens: Man unterteilt den Integrationsbereich in infinitesimale Rechtecke und berechnet für jedes dieser Rechtecke das Volumen einer Säule (Abb. 4.23)

$$dV = dx \, dy \, f(\text{geeignete Zwischenstelle}) .$$

Die Summe der Beiträge dieser infinitesimalen Säulen ergibt im Grenzfalle das Volumen.

**Abb. 4.23.** Integration über einen Rechteckbereich: Aufteilung in infinitesimale Säulen

In Erweiterung des oben angedeuteten Theorems gilt $I_1 = I_2 = I_3$, falls f , wie angegeben, über dem Bereich R beschränkt ist. Diese Aussage hat durchaus praktische Bedeutung. Im Allgemeinen ist die Berechnung des Bereichsintegrals nur möglich, wenn man es auf ein Doppelintegral (mit zwei gewöhn-

lichen Integrationen, die hintereinander ausgeführt werden) zurückführen kann.

Das folgende Beispiel mit der Vorgabe

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad R: -2 \leq y \leq 2 \quad -1 \leq x \leq 1$$

illustriert die einzelnen Rechenschritte. Der Integrationsbereich ist ein Rechteck um den Koordinatenursprung. Das Integral stellt das Volumen zwischen der Rechteckfläche und dem Drehparaboloid $f(x, y)$ dar (Abb. 4.24). Die Rechnung kann z.B. in der folgenden Weise durchgeführt werden

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 dx \int_{-2}^2 dy (x^2 + y^2) = \int_{-1}^1 dx \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{-2}^2 \\ &= \int_{-1}^1 dx \left(4x^2 + \frac{16}{3} \right) = \left[\frac{4}{3} x^3 + \frac{16}{3} x \right]_{-1}^1 = \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Man erhält das gleiche Resultat, wenn man die Reihenfolge der Integrationen vertauscht.

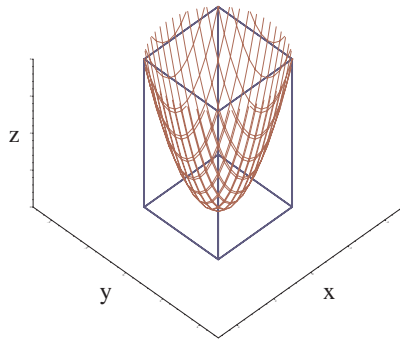


Abb. 4.24. Integration über ein Rechteck unter einem Drehparaboloid

Der nächste Schritt ist die Berechnung von Volumina über einem beliebigen Grundbereich. Zu diesem Zweck betrachtet man zuerst die Integrale

$$I_1 = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{a(x)}^{b(x)} dy f(x, y) = \iint_{B_1} f(x, y) dx dy$$

bzw.

$$I_2 = \int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} dx f(x, y) = \iint_{B_2} f(x, y) dx dy.$$

In dem ersten Fall ist der Integrationsbereich von den Geraden $x = \alpha$ und $x = \beta$, sowie den Kurven $y = a(x)$ und $y = b(x)$ begrenzt (Abb. 4.25a).

Das Integral stellt das Volumen zwischen dieser ebenen Fläche in der x - y Ebene und der Fläche f über diesem Bereich dar. In dem zweiten Fall wird der Integrationsbereich von den Kurven $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ und den Geraden $y = a$ bzw. $y = b$ begrenzt (Abb. 4.25b). Die Integrationsbereiche der Integrale I_1 und I_2 sind im Allgemeinen verschieden. Deswegen ist auch $I_1 \neq I_2$. Im ersten Fall ist es am günstigsten, den Integrationsbereich in Scheibchen parallel der y -Achse zu zerlegen, im zweiten Fall in Scheibchen parallel der x -Achse. Unabhängig von der Zerlegung schreibt man für die beiden Integrale auch

$$\iint_{B_i} f(x, y) \, dx dy \quad i = 1, 2,$$

wobei die Art der Zerlegung in ein Doppelintegral sich aus der Vorgabe des Bereiches B_i ergibt.

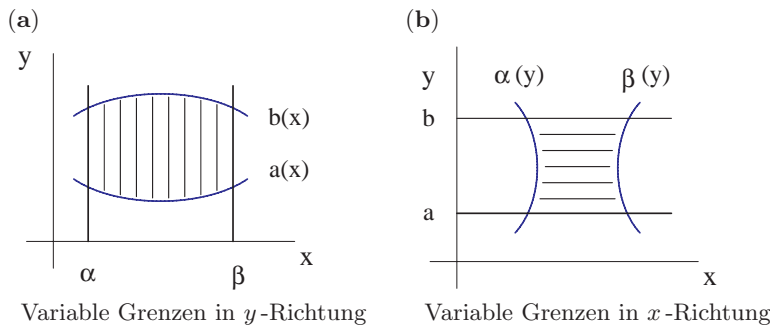


Abb. 4.25. Integrationsbereiche mit variablen Grenzen

Die obigen Integrale decken auch den allgemeinen Fall eines Grundbereiches, der nur von krummlinigen Kurven begrenzt ist, ab.

- Schneiden sich zum Beispiel die Kurven $y = a(x)$ und $y = b(x)$ in den Punkten mit $x = \alpha$ und $x = \beta$, so ist der Gesamtbereich von krummlinigen Kurven begrenzt (Abb. 4.26a).
- Entsprechendes gilt, wenn sich die Kurven $x = a(y)$ und $x = b(y)$ in den Punkten mit $y = a$ und $y = b$ schneiden (Abb. 4.26b).
- Kompliziertere Fälle kann man behandeln, indem man einen beliebigen Bereich in geeignete Teilbereiche zerlegt, wie z. B. für den in Abb. 4.27 gezeigten Bereich B mit Nierenform. Die Zerlegung kann man sowohl in Bezug auf die x -Richtung als auch die y -Richtung vornehmen. Wählt man die y -Integration als die innere Integration, so bietet sich die Unterteilung an

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy = \iint_{B_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{B_2} f(x, y) \, dx dy$$

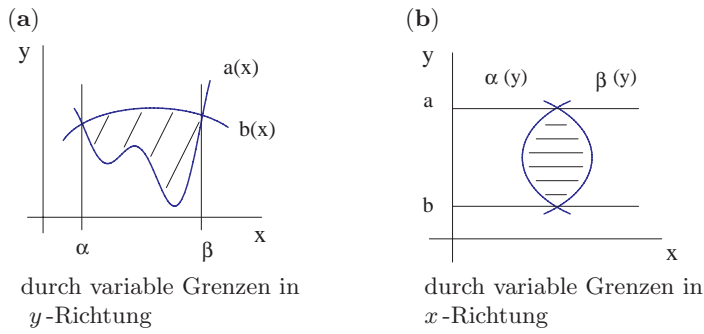


Abb. 4.26. Beispiele für Bereiche mit vollständig krummliniger Begrenzung

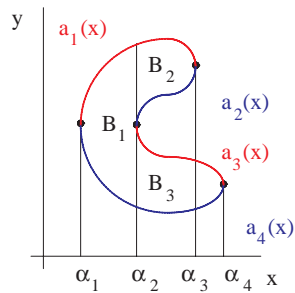


Abb. 4.27. Zerlegung eines nierenförmigen Bereiches

$$+ \iint_{B_3} f(x, y) \, dx dy .$$

In vollem Detail müsste man schreiben

$$\begin{aligned} \iint_B f(x, y) \, dx dy &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx \int_{a_4(x)}^{a_1(x)} dy f(x, y) \\ &+ \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} dx \int_{a_2(x)}^{a_1(x)} dy f(x, y) \\ &+ \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} dx \int_{a_4(x)}^{a_3(x)} dy f(x, y) . \end{aligned}$$

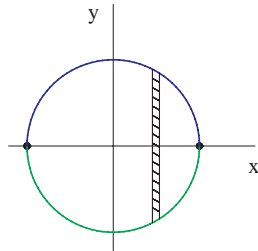
Die folgenden Beispiele vermitteln einen Eindruck von den Möglichkeiten für die Vorgabe von allgemeineren Integrationsbereichen. Das erste Beispiel ist eine Kreisfläche mit Radius R um den Koordinatenursprung. Die folgenden Zerlegungen sind möglich:

$$\iint_K f(x, y) \, dx dy = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy f(x, y) .$$

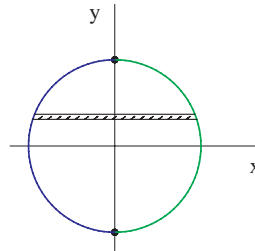
Dies entspricht der Zerlegung in Streifen parallel zur y -Achse. Die Grenzkurven sind Halbkreise in der oberen und unteren Halbebene (Abb. 4.28a). Ist der Integrand beschränkt, so gilt auch

$$\iint_K f(x, y) \, dx dy = \int_{-R}^R dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx f(x, y) .$$

(a)

Zerlegung mit dx

(b)

Zerlegung mit dy **Abb. 4.28.** Integration über eine Kreisfläche

Hier benutzt man eine Zerlegung in Streifen parallel zu der x -Achse und addiert alle Scheibchenbeiträge zwischen $-R$ und R in der y -Richtung (Abb. 4.28b).

Eine ganz konkrete Aufgabe ist die Berechnung des Volumens eines Zylinders mit einem paraboloidförmigen Deckel, der durch die Funktion $f = 3 - x^2 - y^2$ und den Radius $R = 1$ charakterisiert wird. Dieses Volumen ist

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy (3 - x^2 - y^2) \\ &= \int_{-1}^1 dx \frac{4}{3} (4 - x^2) \sqrt{1 - x^2} , \end{aligned}$$

wie schon berechnet. Die bei der zweiten Integration auftretenden Integrale sind oft kompliziert. Gemäß den Integraltafeln ergeben die noch anstehenden Integrale

$$\begin{aligned} V &= \left[\frac{16}{3} \left\{ \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} \left\{ \frac{x}{4} (x^2 - 1) \sqrt{1-x^2} + \frac{x}{8} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8} \arcsin x \right\} \right]_{-1}^1 . \end{aligned}$$

Für die vorliegenden Grenzen tragen nur die Terme mit \arcsin bei. Wegen $\arcsin 1 = -\arcsin(-1) = \pi/2$ ist das Endergebnis

$$V = \frac{8}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{2}\pi .$$

Dies entspricht dem Zylindervolumen $V_Z = \pi R^2 h = 2\pi$ plus dem Volumen der paraboloidförmigen Kappe $V_K = (1/2)\pi$.

In dem zweiten Beispiel ist der Mittelpunkt einer Kreisfläche mit Radius R der Punkt (A, B) . Bei einer Zerlegung in Streifen parallel zur y -Achse erhält man

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_{A-R}^{A+R} dx \int_{B-\sqrt{R^2-(x-A)^2}}^{B+\sqrt{R^2-(x-A)^2}} dy f(x, y) .$$

Das dritte Beispiel ist ein Dreiecksbereich zwischen den Punkten $(0, 0)$, $(0, 2)$ und $(1, 2)$. Wählt man wieder die y -Integration als innere Integration (Abb. 4.29), so lautet das Doppelintegral

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_0^1 dx \int_{2x}^2 dy f(x, y) .$$

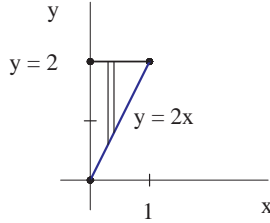


Abb. 4.29. Integration über einen Dreiecksbereich

Für einen Kreisring (Beispiel 4) mit den Radien R_1 und R_2 ($R_1 < R_2$) um den Koordinatenursprung gibt es die folgenden Optionen. Ist die Funktion f auch über dem Innengebiet des Kreisringes definiert und beschränkt, so ist die Zerlegung einfach (Abb. 4.30a)

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy = \iint_{K_2} f(x, y) \, dx dy - \iint_{K_1} f(x, y) \, dx dy .$$

Zur Berechnung der Integrale über die beiden Kreisflächen benutzt man das erste Beispiel. Ist die Funktion f in dem Innengebiet jedoch nicht definiert oder dort nicht beschränkt, so ist eine Aufteilung des Ringes in Teilbereiche notwendig. Wie in Abb. 4.30b angedeutet, muss man den äußeren Kreisring in die Beträge

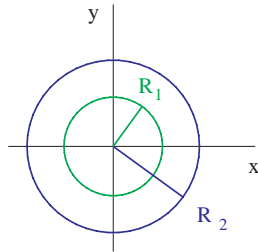
$$a_1(x) = \sqrt{R_2^2 - x^2} \quad \text{und} \quad a_3(x) = -\sqrt{R_2^2 - x^2} ,$$

den inneren entsprechend in

$$a_2(x) = \sqrt{R_1^2 - x^2} \quad \text{und} \quad a_4(x) = -\sqrt{R_1^2 - x^2}$$

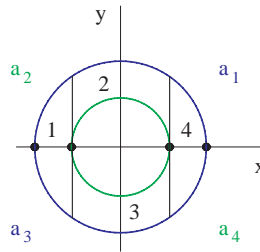
aufteilen

(a)



$f(x, y)$ im Innern begrenzt

(b)



$f(x, y)$ im Innern singulär
oder nicht definiert

Abb. 4.30. Integrationsbereiche bei der Integration über einen Kreisring

$$\begin{aligned} \iint_B f(x, y) \, dx dy &= \int_{-R_2}^{-R_1} dx \int_{-\sqrt{R_2^2 - x^2}}^{\sqrt{R_2^2 - x^2}} dy f(x, y) \\ &+ \int_{-R_1}^{R_1} dx \int_{\sqrt{R_1^2 - x^2}}^{\sqrt{R_2^2 - x^2}} dy f(x, y) \\ &+ \int_{-R_1}^{R_1} dx \int_{-\sqrt{R_2^2 - x^2}}^{-\sqrt{R_1^2 - x^2}} dy f(x, y) \\ &+ \int_{R_1}^{R_2} dx \int_{-\sqrt{R_2^2 - x^2}}^{\sqrt{R_2^2 - x^2}} dy f(x, y) . \end{aligned}$$

Zwei zusätzliche Punkte sind zu der angedeuteten Volumenberechnung noch anzumerken:

- (1) Ist die Funktion f über dem gesamten Grundbereich kleiner als Null, so ist das berechnete Volumen negativ (wie es auch für Flächen bei der Integration von Funktionen $f(x)$ der Fall sein kann).
- (2) Mit Hilfe der Bereichsintegrale kann man auch den Flächeninhalt der Grundfläche berechnen. Setzt man $f = 1$, so ist

$$F_B = \iint_B dx dy .$$

Einige Beispiele sind

(i) Kreisfläche um Ursprung:

$$\begin{aligned} F_K &= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = 2 \int_{-R}^R dx \sqrt{R^2-x^2} \\ &= \left\{ x\sqrt{R^2-x^2} + R^2 \arcsin \frac{x}{R} \right\}_{-R}^R = \pi R^2 . \end{aligned}$$

(ii) Kreisfläche um (A, B) :

$$f_{K'} = 2 \int_{A-R}^{A+R} dx [R^2 - (x-A)^2]^{1/2} = \pi R^2 .$$

(iii) Dreiecksfläche in dem oben angegebenen Beispiel:

$$F_D = \int_0^1 dx \int_{2x}^2 dy = \int_0^1 dx (2-2x) = (2x-2x^2)_0^1 = 1 .$$

(iv) Kreisring:

$$F_O = \pi(R_2^2 - R_1^2) ,$$

da die Funktion $f = 1$ in dem gesamten Gebiet beschränkt ist.

Folgende **Rechenregeln** wurden bei den Rechnungen zu den obigen Beispielen benutzt:

$$\begin{aligned} \iint_B c f(x, y) \, dx dy &= c \iint_B f(x, y) \, dx dy \\ \iint_B (f(x, y) \pm g(x, y)) \, dx dy &= \iint_B f(x, y) \, dx dy \pm \iint_B g(x, y) \, dx dy \\ \iint_{B_1+B_2} f(x, y) \, dx dy &= \iint_{B_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{B_2} f(x, y) \, dx dy . \end{aligned}$$

Sie entsprechen den Regeln der einfachen Integration und folgen direkt aus der Definition des Bereichsintegrals. Etwas ausführlicher muss man sich mit der Erweiterung der Substitutionsregel auseinandersetzen. Anwendung dieser Regel kann, wie das folgende Beispiel zeigt, die Auswertung von Bereichsintegralen vereinfachen.

Der Integrationsbereich soll eine Kreisfläche um den Koordinatenursprung sein. Bei der Benutzung von kartesischen Koordinaten zerlegt man die Kreisfläche in infinitesimale Rechtecke $I = \iint_B f(x, y) \, dx dy$. Für eine Kreisfläche bietet sich jedoch eine Zerlegung mit Hilfe von Polarkoordinaten, d.h. eine Aufteilung der Fläche durch Strahlen und konzentrische Kreise (Abb. 4.31), an. Ein infinitesimales Flächenelement hat dann die Größe $dS = (dr)(r d\varphi)$. Substituiert man in dem Integranden $f(x, y)$

$$f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = F(r, \varphi) ,$$

bildet die infinitesimalen Volumina

$$dV = F(r, \varphi) r \, dr d\varphi$$

und addiert alle Beiträge im Sinne des üblichen Grenzprozesses, so erhält man das gleiche Volumen wie zuvor in der Form

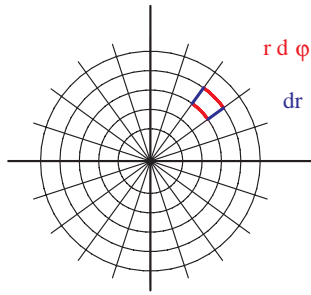


Abb. 4.31. Aufteilung einer Kreisfläche mit ebenen Polarkoordinaten

$$I = \iint_{B'} F(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi .$$

Die Indizierung B' entspricht der Angabe des Bereiches in Polarkoordinaten. Man bildet die gesamte Kreisfläche ab, wenn man als Integrationsgrenzen ansetzt

$$B' : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad 0 \leq r \leq R .$$

Trägt man die krummlinigen (orthogonalen) Koordinaten in kartesischer Weise auf, so ist das Abbild der Kreisfläche (der Bereich B') ein Rechteck (Abb. 4.32). Bei der Benutzung von Polarkoordinaten wird dieses Rechteck

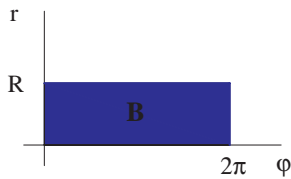


Abb. 4.32. Das Bild eines Kreises in ebenen Polarkoordinaten

durch ein Rechtecknetz unterteilt und man kann (Beschränktheit des Integranden vorausgesetzt) das Bereichsintegral als Doppelintegral auswerten

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R dr \, r \int_0^{2\pi} [f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)] \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R [r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)] \, dr . \end{aligned}$$

Hier erkennt man den Vorteil der Variablensubstitution: Bei dem Übergang zu Koordinaten, die der Umrandung angepasst sind, sind die Integrationsgrenzen konstant und die Ausführung der Doppelintegration wird im Allgemeinen einfacher.

So faktorisiert das Doppelintegral in den folgenden Beispielen vollständig, da der Integrand nur von der Abstandsvariablen abhängt.

Berechnung der Kreisfläche ($f = 1$):

$$F = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr = (2\pi) \left(\frac{R^2}{2} \right) .$$

Berechnung des Volumens einer Halbkugel ($f = (R^2 - x^2 - y^2)$):

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r [R^2 - r^2]^{1/2} dr = (2\pi) \left[-\frac{1}{3} [R^2 - r^2]^{3/2} \right]_0^R = \frac{2\pi}{3} R^3 .$$

Die Diskussion der allgemeinen Substitutionsregel ist etwas langatmiger. Die Kernpunkte kann man folgendermaßen zusammenfassen.

Ein Bereich B der x - y Ebene soll mit einem Satz krummliniger Koordinaten

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y) \quad \Longleftrightarrow \quad x = x(u, v) \quad y = y(u, v)$$

überdeckt werden, so zum Beispiel durch die Koordinaten

$$u = \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad v = \arctan \left(\frac{ay}{bx} \right)$$

$$x = au \cos v \quad y = bu \sin v .$$

Die Kurven $u = \text{const.}$ sind Ellipsen, die Kurven $v = \text{const.}$ sind Halbgeraden (Abb. 4.33).

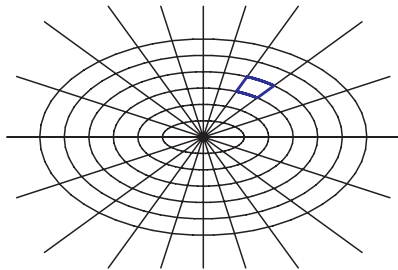


Abb. 4.33. Mögliche Aufteilung einer Ellipsenfläche

Für jeweils zwei infinitesimal benachbarte Kurven $u = \text{const.}$ und $u + du$ sowie $v = \text{const.}$ und $v + dv$ wird die Fläche zwischen diesen vier Kurven in linearer Näherung berechnet (Abb. 4.34a). In der linearen Näherung ist diese Fläche ein (unregelmäßiges) Viereck. Die Koordinaten der Eckpunkte sind

$$P_1 \quad x_1 = x(u, v) \quad y_1 = y(u, v)$$

$$P_2 \quad x_2 = x(u, v + dv) = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$y_2 = y(u, v + dv) = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

$$P_3 \quad x_3 = x(u + du, v + dv) = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$y_3 = y(u + du, v + dv) = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

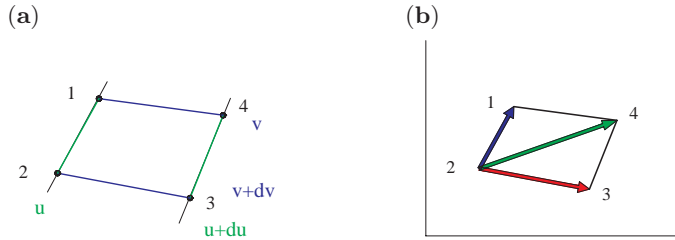
$$P_4 \quad x_4 = x(u + du, v) = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} du$$

$$y_4 = y(u + du, v) = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} du .$$

Zur Berechnung der Vierecksfläche benutzt man eine Aufteilung der Fläche in zwei Dreiecke (zum Beispiel wie in Abb. 4.34b) mit den Formeln

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{2} [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)] \\ &= \frac{1}{2} [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \times (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2)] , \end{aligned}$$

wobei die Vektoren \mathbf{r}_i die Vektoren zu den vier Eckpunkten darstellen. Da



Das infinitesimale Viereck

Vektorielle Darstellung der Vierecksfläche

Abb. 4.34. Zur infinitesimalen Unterteilung eines zweidimensionalen Bereiches in beliebigen, krummlinigen Koordinaten

nur der Betrag des Flächenelementes und nicht die Orientierung des Flächenvektors interessiert, genügt

$$dS = |dS_z| = \frac{1}{2} |(x_1 - x_3)(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2)(y_1 - y_3)| .$$

Setzt man die oben angegebenen Koordinaten der Eckpunkte ein, so erhält man

$$dS = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| du dv .$$

Den Absolutwert kann man als Absolutwert einer Determinante schreiben.

$$|D| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|.$$

Diese Determinante bezeichnet man als **Funktionaldeterminante** der Transformation $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Mit dieser Definition erhält man (analog zu den Argumenten im Fall der Polarkoordinaten) die Substitutionsregel

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy = \iint_{B'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Diese Regel entspricht einer Übertragung der Substitutionsregel der gewöhnlichen Integration

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{a'}^{b'} f(x(u)) \frac{dx}{du} du.$$

- (1) Die Erweiterung der einfachen Substitution

$$dx = \left(\frac{dx}{du} \right) du \quad \text{ist} \quad dx dy = |D| du dv.$$

Das Betragszeichen tritt auf, da die Reihenfolge der Koordinaten unwesentlich ist, die Determinante bei der Vertauschung von zwei Zeilen (oder Spalten) aber ihr Vorzeichen ändert. Das Vorzeichen entspricht geometrisch den zwei möglichen Orientierungen des infinitesimalen Flächenelementes.

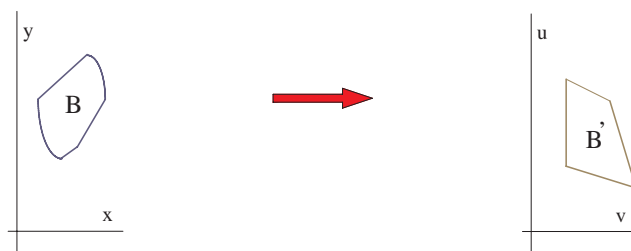
- (2) Die Substitution des Integranden bedarf keiner Diskussion.
 (3) Die Änderung der Integrationsgrenzen entspricht der Änderung des Bereiches. B' ist das Bild des ursprünglichen Bereiches in der $u-v$ Ebene (Abb. 4.35). Dem Bild des Bereiches kann man die Integrationsgrenzen für die Doppelintegration entnehmen. Die Substitution ist vor allem dann nützlich, wenn der Bildbereich B' ein Rechteck ist.

Das folgende Beispiel soll die Anwendung der Substitutionsregel erläutern.

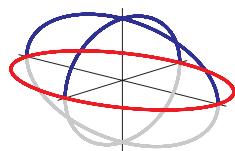
Der Integrationsbereich ist die Ellipsenfläche

$$B: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Die Aufgabe soll sein: Berechne durch Integration über diesen Bereich die Fläche der Ellipse und das Volumen eines halben Ellipsoids mit den Halbachsen a, b, c (Abb. 4.36), also das Bereichsintegral mit den Funktionen

**Abb. 4.35.** Zur Abbildung von Bereichen

$$f_1 = 1 \quad \text{und} \quad f_2 = c \left[1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right]^{1/2}.$$

**Abb. 4.36.** Ellipsenfläche und Ellipsoid

Bei der Substitution

$$x = au \cos v \quad y = bu \sin v$$

ist das Bild von B ein Rechteck in der u - v Ebene mit den Seitenlängen 1 und 2π . Die Funktionaldeterminante ist

$$|D| = \begin{vmatrix} a \cos v & -au \sin v \\ b \sin v & bu \cos v \end{vmatrix} = abu.$$

Somit berechnet man

$$\begin{aligned} I_1 = F_{(\text{Ellipse})} &= \iint_B dx dy = ab \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 u du \\ &= (ab)(2\pi) \left(\frac{u^2}{2} \right)_0^1 = ab\pi \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_2 = V_{(1/2\text{Ellipsoid})} &= \iint_B c \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right]^{1/2} dx dy \\ &= abc \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 u [1 - u^2]^{1/2} du \end{aligned}$$

$$= abc(2\pi) \left[-\frac{1}{3} [1 - u^2]^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} abc \pi .$$

4.3.3 Integrale mit $f(x, y, z)$

Die Diskussion der Integration von Funktionen mit drei Veränderlichen verläuft weitgehend analog zu dem Fall von Funktionen mit zwei Veränderlichen, wenn auch die Details infolge eines weiteren Integrationsschrittes etwas aufwendiger sein können. Die Darstellung wird sich auf einen gewissen Überblick beschränken.

Liegen feste Integrationsgrenzen vor, so kann man z.B. die folgende Hierarchie von Integralen betrachten

$$\begin{aligned} 1. \quad g(y, z) &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y, z) \, dx \\ 2. \quad h(z) &= \int_a^b dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y, z) \, dx \\ 3. \quad I &= \int_A^B dz \int_a^b dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y, z) \, dx . \end{aligned}$$

In keinem der Fälle ist eine anschauliche Darstellung möglich. Man kann sich jedoch eine Vorstellung von den Integrationsbereichen machen.

1. Der Integrationsbereich ist eine gerade Strecke. Die Gerade, auf der die Strecke abgetragen ist, verläuft durch den Punkt (y, z) der y - z Ebene und ist parallel zu der x -Achse (Abb. 4.37). Berechnet wird eine ‘Fläche’ über dieser Strecke in der nicht darstellbaren vierten Dimension.

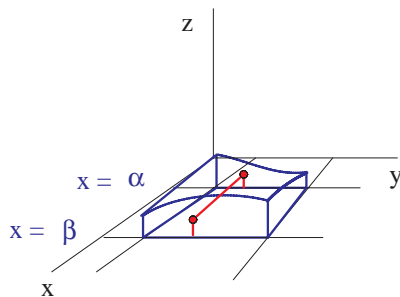
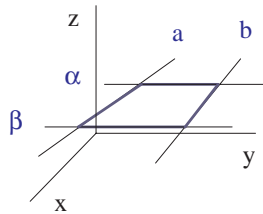


Abb. 4.37. Integration über eine Gerade im \mathcal{R}_3

2. Der Integrationsbereich ist ein Rechteck in der Ebene $z = \text{const.}$, das von Geraden parallel zu der x - und der y -Achse begrenzt ist (Abb. 4.7a). Berechnet wird ein Volumen über dieser Fläche und zwar in dem dreidimensionalen Unterraum, der von den Koordinaten x, y, u aufgespannt wird.

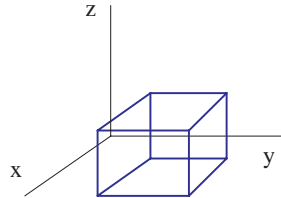
3. Der Integrationsbereich ist ein Quader (Abb. 4.38b) im \mathcal{R}_3 , begrenzt von den sechs Ebenen $x = \alpha, \beta$, $y = a, b$ und $z = A, B$. Das Resultat der Integration ist ein vierdimensionales Volumen.

(a)



Integration über eine ebene
Rechteckfläche im \mathcal{R}_3

(b)



Integration über einen Quader im \mathcal{R}_3

Abb. 4.38. Integration über zwei- und dreidimensionale Bereiche

In allen drei Fällen ergeben sich aus rechentechnischer Sicht keine neuen Gesichtspunkte, so ist z.B. mit $f(x, y, z) = x + y + z$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 dx (x + y + z) \\ &= \int_0^1 dz \int_0^1 dy \left(\frac{1}{2} + y + z \right) = \int_0^1 dz (1 + z) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

In den Fällen 2 und 3 steht wieder die Frage nach der Vertauschung der Reihenfolge der Integration an. Auch hier lautet die Bedingung: Die Vertauschung ist möglich, falls die Funktion $f(x, y, z)$ über dem jeweiligen Grundbereich beschränkt ist. Man benutzt dann auch die Kurzformen

$$h(z) = \iint_R f(x, y, z) \, dx dy = \iint_R f(x, y, z) \, dS_{xy}$$

bzw.

$$I = \iiint_Q f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_Q f(x, y, z) \, dV.$$

mit der Vorstellung, dass der Integrationsbereich in infinitesimale Rechtecke oder Quader aufgeteilt wird.

Für Integrale mit variablen Grenzen existiert eine entsprechende Hierarchie. Die Gestalt der Integrationsbereiche ist jedoch unter Umständen komplizierter. Benutzt man eine entsprechende Bezeichnung wie für die Integrale mit festen Grenzen, so sind die verschiedenen Integrale dieser Hierarchie

$$1. \quad g(y, z) = \int_{\alpha(y, z)}^{\beta(y, z)} f(x, y, z) \, dx.$$

Der Integrationsbereich ist immer noch eine Strecke parallel zur x -Achse. Die Strecken werden jedoch nicht durch die Ebenen $x = \alpha, \beta$ begrenzt, sondern (Abb. 4.39) durch die Flächen $x = \alpha(y, z)$ bzw. $y = \beta(y, z)$.

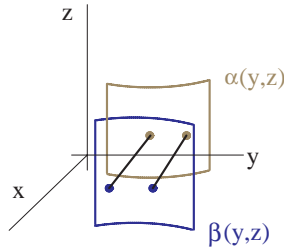
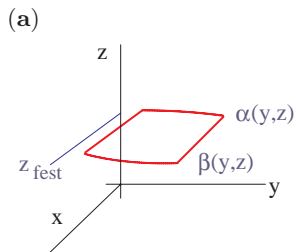


Abb. 4.39. Integration über eine gerade Strecke im \mathcal{R}_3 mit variabler Begrenzung

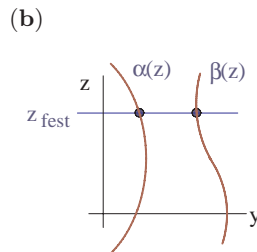
$$2. \quad h(z) = \int_{a(z)}^{b(z)} dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dx .$$

Der Integrationsbereich ist eine Fläche in der Ebene $z = \text{const.}$ Die Begrenzung der Fläche kann folgendermaßen beschrieben werden:

- (a) In der x -Richtung sind es die Schnittkurven der Flächen $x = \alpha(y, z)$ und $x = \beta(y, z)$ mit der Ebene $z = \text{const.}$ (Abb. 4.40a).
- (b) In der y -Richtung sind es Geraden parallel zur x -Achse, die durch die Schnittpunkte der Kurven $y = a(z)$ und $y = b(z)$ mit der Ebene (oder Geraden) $z = \text{const.}$ bestimmt werden (Abb. 4.40b).



Begrenzung in der x -Richtung



Variation der Grenzen mit z

Abb. 4.40. Zur Integration über eine ebene Fläche mit krummliniger Begrenzung im \mathcal{R}_3

Die Gestalt des Integrationsbereiches ändert sich demnach mit jedem z -Wert. Das Integral, das eigentlich interessiert, ist

$$3. \quad I = \int_A^B dz \int_{a(z)}^{b(z)} dy \int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x, y, z) dx .$$

Dieses Integral stellt wieder ein vierdimensionales Volumen dar, der Integrationsbereich ist dieses Mal ein ‘Standardbereich’ im \mathcal{R}_3 . Beliebige geformte dreidimensionale Integrationsbereiche lassen sich aus solchen Standardbereichen zusammensetzen. Ein Beispiel (Abb. 4.41) für einen Standardbereich soll etwas eingehender betrachtet werden, zur Abwechslung in einer Variante mit vertauschter Reihenfolge der Integrationen

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{a(x)}^{b(x)} dy \int_{A(x,y)}^{B(x,y)} f(x, y, z) dz .$$

Der durch die angegebene Begrenzung definierte Bereich kann folgendermaßen beschrieben werden: Die Grenzen der x -Integration sind die Ebenen $x = \alpha, \beta$. Die Grenzen der y -Integration sind die Ebenen $y = a(x), b(x)$. Projiziert man die Grundfläche, die auf diese Weise festgelegt ist, in den Raum und versieht sie mit einer Bodenfläche $z = A(x, y)$ und einer Deckelfläche $z = B(x, y)$, so erhält man den Integrationsbereich B_S .

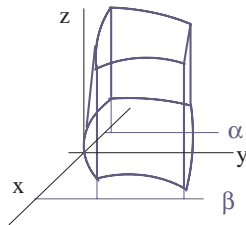


Abb. 4.41. Ein Standardbereich im \mathcal{R}_3

Ist der Integrand beschränkt, so kann man den vorgegebenen Bereich in beliebiger Weise in infinitesimale Volumenelemente zerlegen (infinitesimale Quader ist nur eine Möglichkeit) und über Bildung der infinitesimalen vierdimensionalen Volumina $f(x, y, z) dV$ zu dem Grenzwert

$$I = \iiint_{B_S} f(x, y, z) dV$$

gelangen.

In Erweiterung der Situation bei Integralen mit $f(x, y)$ ergibt sich hier die Möglichkeit den Rauminhalt von beliebigen dreidimensionalen Volumina zu berechnen. Für $f = 1$ erhält man

$$V_B = \iiint_B dx dy dz = \iiint_B dV .$$

Es folgen einige explizite Beispiele für dreidimensionale Integrationsbereiche, wobei zunächst die folgende Unterteilung des Integrationsbereiches benutzt wird

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{a(x)}^{b(x)} dy \int_{A(x,y)}^{B(x,y)} f(x, y, z) dz .$$

Für ein Kugelvolumen (Abb. 4.42) um den Koordinatenursprung (Radius R) erhält man bei dieser Reihenfolge die folgenden Integrationsgrenzen in den drei Koordinatenrichtungen:

In der z -Richtung (Boden und Deckel) sind es die Halbkugeln

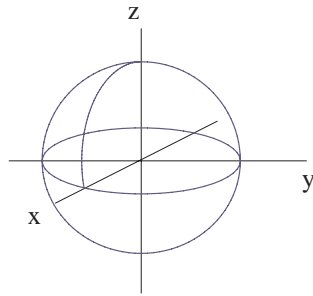


Abb. 4.42. Ein kugelförmiger Integrationsbereich

$$A(x, y) = -[R^2 - x^2 - y^2]^{1/2}$$

$$B(x, y) = [R^2 - x^2 - y^2]^{1/2} .$$

In der y -Richtung hat man zwei Kreisbogen

$$a(x) = -[R^2 - x^2]^{1/2}$$

$$b(x) = [R^2 - x^2]^{1/2} .$$

In der x -Richtung sind die Grenzen konstant

$$\alpha = -R \quad \beta = R .$$

Bei der symmetrischen Form des Bereiches ist eine Vertauschung der Reihenfolge der Integration bei entsprechender Variation der Grenzen ohne Weiteres möglich. Das Kugelvolumen könnte nun mit $f = 1$ berechnet werden, doch offensichtlich ist ein Übergang zu Kugelkoordinaten vorteilhaft.

2. Ein elliptischer Zylinder über der x - y Ebene mit parabolischer Kappe (Abb. 4.43) wird durch die folgenden Grenzen charakterisiert:

Der Boden ist die x - y Ebene $A(x, y) = 0$, der Deckel das Paraboloid $B(x, y) = h - x^2 - y^2$. In der y -Richtung wird das Integrationsvolumen durch die Ellipsenbogen

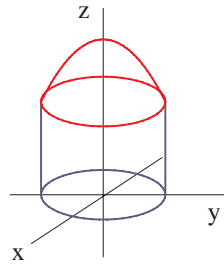


Abb. 4.43. Ein (elliptischer) Zylinder mit Parabolkappe

$$a(x) = -b \left[1 - \frac{x^2}{a^2} \right]^{1/2} \quad b(x) = b \left[1 - \frac{x^2}{a^2} \right]^{1/2}$$

begrenzt, in der x -Richtung durch die Konstanten

$$\alpha = -a \quad \beta = a .$$

3. In dem letzten Beispiel ist eine Unterteilung in Standardbereiche notwendig. Der Bereich ist eine Pyramide der Höhe h über einem Quadrat mit der Seitenlänge a in der Ecke des ersten Quadranten der x - y Ebene (Abb. 4.44). Die Pyramide ist von oben durch *vier* Dreiecksflächen begrenzt,

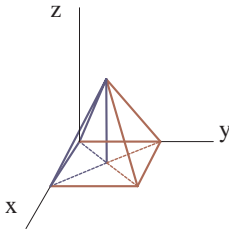


Abb. 4.44. Ein Bereich in der Form einer Viertelpyramide

ist also kein Standardbereich. Es ist notwendig, den Gesamtbereich in vier Teilbereiche zu zerlegen. Die vier entsprechenden ebenen Bereiche in der x - y Ebene müssen zweckmäßigerweise mit wechselnder Reihenfolge der Integration charakterisiert oder nochmals zerlegt werden. Hier werden nur zwei der vier Teilbereiche beschrieben:

1. Der Teilbereich, der an die x -Achse grenzt, wird in der z -Richtung durch die Ebene $A(x, y) = 0$ und durch eine Ebene, die durch die x -Achse und durch die Spitze der Pyramide $(a/2, a/2, h)$ verläuft, begrenzt

$$B(x, y) = \frac{2h}{a} y .$$

In der x -Richtung sind es die Geraden $\alpha(y) = y$ und $\beta(y) = a - y$, in der y -Richtung die festen Grenzen $a = 0$ und $b = a/2$.

2. Für den Teilbereich, der an die y -Achse grenzt, benötigt man

$$\text{in der } z\text{-Richtung: } A(x, y) = 0, \quad B(x, y) = \frac{2h}{a}x,$$

$$\text{in der } y\text{-Richtung: } a(x) = x \quad b(x) = a - x,$$

$$\text{in der } x\text{-Richtung: } \alpha = 0 \quad \beta = \frac{a}{2}.$$

Die Angaben für die zwei restlichen Teilbereiche bleiben dem Leser überlassen.

Für ein Viertel des Pyramidenvolumens erhält man somit

$$\begin{aligned} \frac{V}{4} = I &= \int_0^{a/2} dx \int_x^{a-x} dy \int_0^{2ax/h} dz = \int_0^{a/2} dx \int_x^{a-x} dy \frac{2h}{a}x \\ &= \frac{2h}{a} \int_0^{a/2} dx (ax - 2x^2) = \frac{2h}{a} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 \right)_0^{a/2} = \frac{1}{4} \left(\frac{ha^2}{3} \right). \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann man natürlich auch elementar gewinnen, das Ergebnis für die ersten zwei Beispiele jedoch bestimmt nicht.

Bei der Auswertung von Dreifachintegralen ist die Substitutionsregel äußerst nützlich. In diesem Fall lautet sie folgendermaßen: Das Integral

$$I = \iiint_B f(x, y, z) \, dx dy dz$$

geht bei der Transformation

$$x = x(u, v, w) \quad y = y(u, v, w) \quad z = z(u, v, w)$$

über in

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{B'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left\{ \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \right\} \\ &= \iiint_{B'} F(u, v, w) \, dV'. \end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminante der Transformation ist

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Die Reihenfolge der Koordinaten ist wieder unwesentlich, deswegen tritt auch hier der Betrag der Funktionaldeterminante auf. B' ist das Bild des Bereiches

B in dem u, v, w -System. So ist z.B. das Bild einer Kugel (in kartesischen Koordinaten) ein Quader in Kugelkoordinaten (Abb. 4.45).

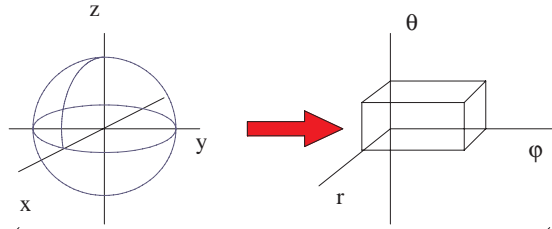


Abb. 4.45. Die Abbildung einer Kugel in kartesischen Koordinaten in einen Quader bei Benutzung von Kugelkoordinaten

Offensichtlich liegt eine direkte Erweiterung der entsprechenden Regeln für den Fall von Doppelintegralen vor. Man unterteilt den Bereich B durch Flächen $u(x, y, z) = \text{const.}$, $v(x, y, z) = \text{const.}$, $w(x, y, z) = \text{const.}$ und stellt ein unregelmäßiges Volumenelement, das durch infinitesimal benachbarte Flächen gebildet wird, in linearer Näherung dar.

Zwei wichtige Spezialfälle werden immer wieder benötigt:

Zylinderkoordinaten : $dV' = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$

Kugelkoordinaten : $dV' = r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta$.

Ein Kugelvolumen würde man somit nicht in kartesischen Koordinaten sondern in Kugelkoordinaten berechnen

$$\begin{aligned} V_{\text{Ku}} &= \iiint_{B'} dV' = \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \\ &= \left(\frac{R^3}{3} \right) (2\pi) (-\cos \theta)_0^\pi = \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

Das Volumen eines Kugelsegmentes mit dem Öffnungswinkel 2α erhält man entsprechend als (Abb. 4.46)

$$V_{\text{Seg}} = \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin \theta \, d\theta = \frac{2\pi}{3} R^3 (1 - \cos \alpha).$$

Als weitere Übung kann man das Volumen des elliptischen Zylinders mit Paraboloidkappe zu berechnen. Geeignete Koordinaten sind

$$x = au \cos v \quad y = bu \sin v \quad z = w.$$

Das Resultat ist

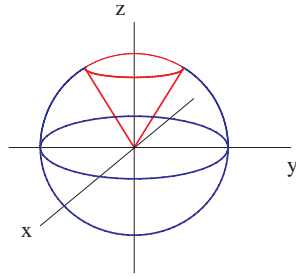


Abb. 4.46. Zur Berechnung des Volumens eines Kugelsegmentes

$$V = ab\pi \left(h - \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \right) .$$

Dreifachintegrale treten in der theoretischen Physik in fast allen Bereichen auf. Ein mögliche Aufgabe aus der Mechanik lautet: Vorgegeben ist die Dichte eines Objektes als Funktion des Ortes.

$$\rho = \begin{cases} \rho(x, y, z) & \text{für } (x, y, z) \in B \\ 0 & \text{für } (x, y, z) \notin B . \end{cases}$$

Dies beschreibt einen Körper mit scharfer Begrenzung und beliebiger Zusammensetzung. Es sind folgende Größen zu berechnen:

1. Die Gesamtmasse $M = \iiint_B \rho(x, y, z) \, dV$

2. Die Koordinaten des Schwerpunktes

$$X = \frac{1}{M} \iiint_B x \rho(x, y, z) \, dV$$

$$Y = \frac{1}{M} \iiint_B y \rho(x, y, z) \, dV$$

$$Z = \frac{1}{M} \iiint_B z \rho(x, y, z) \, dV$$

Diese Formeln ergeben sich aus der Überlegung: Bei einer infinitesimalen Zerlegung des Körpers summiert man über entsprechende Beiträge, die im Grenzfall ein Dreifachintegral ergeben, so z.B. für die Masse

$$M \Rightarrow \sum_i dm_i \Rightarrow \sum_i \rho(i) \, dV_i \Rightarrow \iiint \rho(x, y, z) \, dV .$$

Entsprechendes gilt für die Schwerpunktskoordinaten.

Ein konkretes Beispiel ist die Berechnung dieser Größen für eine Halbkugel mit uniformer Massenverteilung ρ_0 . Die Masse ist

$$M = \rho_0 \iiint dV = \frac{2\pi}{3} \rho_0 R^3 .$$

Für die Schwerpunktskoordinaten erhält man bei Auswertung in Kugelkoordinaten r, φ, θ mit $0 \leq \theta \leq \pi/2$ für eine Halbkugel:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\rho_0}{M} \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta (r \cos \varphi \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{\rho_0}{M} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta . \end{aligned}$$

Das Integral faktorisiert in drei gewöhnliche Integrale. Wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

ist $X = 0$. Entsprechend findet man

$$Y = \frac{\rho_0}{M} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = 0$$

und

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\rho_0}{M} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\rho_0}{M} \left(\frac{R^4}{4} \right) (2\pi) \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right)_0^{\pi/2} = \frac{\rho_0}{M} \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{3}{8} R . \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt liegt auf der z -Achse (eine Symmetrieachse), in einem Abstand von $(3/8) R$ Einheiten über dem Koordinatenursprung.

Integrale mit mehr als drei Integrationsvariablen

$$I = \int \dots \int_{B_n} f(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$$

findet man in allen Bereichen der Physik, von der klassischen Mechanik bis zu der Quantenfeldtheorie. Das Muster zu deren Diskussion und Auswertung ist jedoch durch die Betrachtung der einfacheren Situationen vorgegeben, rechentechnische Komplikationen nicht eingerechnet.

4.3.4 Ergänzung: Elliptische Integrale

In dem Math.Kap. 4.3.1 wurden als Beispiel für Funktionen, die durch ein Integral definiert werden, die elliptischen Integrale erwähnt. Diese Funktionen sollen in der folgenden ‘Ergänzung’ kurz angesprochen werden. Das Ziel ist nicht so sehr die Vorstellung aller möglichen Aspekte und Eigenschaften sondern nur eine Darstellung der üblichen Klassifikation und der verschiedenen Varianten, die in der Praxis auftreten.

Integrale der Form

$$\int dx R(x, \sqrt{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}; k)$$

oder

$$\int dx R(x, \sqrt{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4}; k),$$

wobei R eine rationale Funktion von x und den Quadratwurzeln ist, lassen sich im Allgemeinen nicht durch elementare Funktionen darstellen. Die ‘Variable’ k ist ein Parameter, der als **Modul** bezeichnet wird.

Die eigentliche Struktur der Funktion R wird durch das folgende Argument verdeutlicht. Eine rationale Funktion kann durch einen Quotienten aus zwei Polynomen dargestellt werden (der Modul ist bei der folgenden Diskussion nicht von Interesse)

$$R(x, y(x)) = \frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}.$$

Die Wurzeln mit dem Polynom dritter oder vierter Ordnung wurde dabei mit $y(x)$ bezeichnet. Erweitert man den Quotienten zu

$$R(x, y) = \frac{yP(x, y)Q(x, -y)}{yQ(x, y)Q(x, -y)},$$

so kann man feststellen: Das Produkt der beiden Polynome im Nenner ist eine ganzrationale Funktion von y^2 , da es sich bei der Transformation $y \rightarrow -y$ nicht verändert. Es ist dann aber eine ganzrationale Funktion von x , die Quadratwurzel tritt hier nicht mehr auf. Das Produkt im Zähler denkt man sich ausmultipliziert. Jeder Term der Form y^{2n} , wobei n eine ganze Zahl ist, entspricht wiederum einer ganzrationalen Funktion von x . Terme der Form y^{2n+1} faktorisieren in eine ganzrationale Funktion multipliziert mit y . Der Ausdruck für die Funktion R lautet also im Endeffekt

$$R(x, y) = \frac{R_1(x) + R_2(x)y}{y} = \frac{R_1(x)}{y} + R_2(x).$$

Ein Integral über die ganzrationale Funktion $R_2(x)$ ist nicht weiter von Interesse, es kann durch elementare Funktionen dargestellt werden. Zu diskutieren sind also einzig die Integrale der Form

$$\int \frac{R_1(x) dx}{[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4]^{1/2}},$$

wobei $R_1(x)$ eine ganzrationale Funktion ist und a_3 und a_4 nicht beide gleichzeitig gleich Null sein sollen.

Alle Integrale dieser Art lassen sich auf drei Grundtypen zurückzuführen. Diese Grundtypen werden als **elliptische Integrale erster, zweiter und**

dritter Art bezeichnet. Die Definitionen der einfachsten Varianten dieser Grundtypen (in mehr oder weniger physikalisch motivierter Form) sind

$$\text{erster Art:} \quad F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{[1 - k^2 \sin^2 \varphi']^{1/2}}$$

$$\text{zweiter Art:} \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi d\varphi' [1 - k^2 \sin^2 \varphi']^{1/2}$$

$$\text{dritter Art} \quad \Pi_h(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{(1 - h \sin^2 \varphi') [1 - k^2 \sin^2 \varphi']^{1/2}}$$

(h ist eine Zahl aus dem Intervall $-\infty < h < \infty$).

Der Parameter k ist auf das Intervall $0 \leq k^2 \leq 1$ beschränkt. Er wird meist in der Form $k^2 = \sin^2 \alpha$ geschrieben. Für Parameter, die größer als 1 sind, ist eine Umschreibung der Integrale mittels einer geeigneten Substitution notwendig. Für das elliptische Integral erster Art liefert z.B. die Substitution

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{1}{k} \sin \theta \right) \quad \text{mit} \quad d\varphi = \left[\frac{1}{[k^2 - \sin^2 \theta]^{1/2}} \cos \theta \right] d\theta$$

das Integral (mit $\kappa = 1/k$)

$$\begin{aligned} F(\varphi, k) &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{[1 - k^2 \sin^2 \varphi']^{1/2}} = \kappa \int_0^\theta \frac{\cos \theta' d\theta'}{\cos \theta' [1 - \kappa^2 \sin^2 \theta']^{1/2}} \\ &= \kappa \int_0^\theta \frac{d\theta'}{[1 - \kappa^2 \sin^2 \theta']^{1/2}} \end{aligned}$$

und somit die Möglichkeit k^2 -Werte, die größer als 1 sind, zu benutzen.

Eine in der Mathematik oft benutzte Form der elliptischen Integrale ergibt sich mit der Substitution

$$t = \sin \varphi \quad d\varphi = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Es ist dann

$$F(t, k) = \int_0^t dt' \left[(1 - t'^2)(1 - k^2 t'^2) \right]^{-1/2}$$

$$E(t, k) = \int_0^t dt' \left[\frac{1 - k^2 t'^2}{1 - t'^2} \right]^{1/2}$$

$$\Pi_h(t, k) = \int_0^t dt' (1 - h t'^2)^{-1} \left[(1 - t'^2)(1 - k^2 t'^2) \right]^{-1/2}.$$

Man erkennt hier die ursprünglich anvisierten Polynome unter der Quadratwurzel. Das elliptische Integral zweiter Art wird oft umgeschrieben

$$\begin{aligned} E(t, k) &= \int_0^t \frac{(1 - k^2 t'^2)}{[(1 - t'^2)(1 - k^2 t'^2)]^{1/2}} dt' \\ &= F(t, k) - k^2 \int_0^t \frac{t'^2 dt'}{[(1 - t'^2)(1 - k^2 t'^2)]^{1/2}} \\ &= F(t, k) - E_{\text{red}}(t, k), \end{aligned}$$

so dass man die reduzierte Form

$$E_{\text{red}}(t, k) = k^2 \int_0^t \frac{t'^2 dt'}{[(1 - t'^2)(1 - k^2 t'^2)]^{1/2}}$$

erhält.

Eine Verallgemeinerung der zitierten, einfachsten Varianten stellen die Integrale

$$\begin{aligned} 1. \text{ Art : } & \int dt' \left[(A_1 + B_1 t'^2) (A_2 + B_2 t'^2) \right]^{-1/2} \\ 2. \text{ Art : } & \int dt' t'^2 \left[(A_3 + B_3 t'^2) (A_4 + B_4 t'^2) \right]^{-1/2} \\ 3. \text{ Art : } & \int dt' (1 - t'^2)^{-1} \left[(A_5 + B_5 t'^2) (A_6 + B_6 t'^2) \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

mit konstanten Parametern A_i, B_i dar. Auch diese Verallgemeinerungen werden als elliptische Integrale erster bis dritter Art bezeichnet. Man kann zeigen, dass jedes kubische oder quadratische Polynom (mit kleinen Einschränkungen) mittels geeigneter Substitution in den angedeuteten Radikanden übergeführt werden kann

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \xrightarrow{\text{Substitution}} (A_i t^2 + B_i) (A_k t^2 + B_k) .$$

Elliptische Integrale mit (je nach Variante) den oberen Grenzen $\varphi = \pi/2$ bzw. $t = 1$ bezeichnet man als **vollständige elliptische Integrale** der jeweiligen Art. So ist z.B.

$$F(k) \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^1 \frac{dt}{[1 - k^2 t^2]^{1/2}}$$

ein vollständiges elliptisches Integral der ersten Art.

Für elliptische Integrale (unvollständig oder vollständig) existieren Zusammenstellungen von Eigenschaften (Verknüpfung mit anderen höheren

Funktionen, spezielle Werte, numerische Näherungen, etc.) sowie Wertetabellen⁵.

⁵ Siehe Literaturliste

5 Grundbegriffe der Vektoranalysis.

In der Analysis von Funktionen mit mehreren Veränderlichen diskutiert man die Situation: Jedem Punkt aus einem Gebiet des n -dimensionalen Raumes wird durch eine Vorschrift eine Zahl zugeordnet

$$(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{f} f(x_1, \dots, x_n) .$$

Eine natürliche Erweiterung dieser Aussage ist: Jedem Punkt eines Gebietes des \mathcal{R}_n wird durch einen Satz von Vorschriften ein m -Tupel von Zahlen zugeordnet

$$(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\{f_1, \dots, f_m\}} \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\} .$$

Man kann das m -Tupel von Funktionen als die Komponenten eines Vektors in einem m -dimensionalen euklidischen Raum (mit einer orthogonalen Basis) auffassen und schreiben

$$\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m f_k(x_1, \dots, x_n) \mathbf{e}_k .$$

Man spricht dann von einer **Vektorfunktion** oder einem **Vektorfeld**. Der Begriff Vektorfeld ist folgendermaßen zu verstehen: Der Anteil ‘Vektor’ nimmt Bezug auf das m -Tupel, der Anteil ‘Feld’ nimmt Bezug auf die Zuordnung des Vektors zu den Punkten des \mathcal{R}_n . Die Zuordnung einer Zahl zu jedem Raumpunkt

$$m = 1 \longrightarrow f((x_1, \dots, x_n))$$

bezeichnet man in diesem Zusammenhang als **Skalarfeld**. In diesem Kapitel werden die vielfältigen Möglichkeiten der Differential- und Integralrechnung mit Vektorfeldern angedeutet. Insbesondere die Integralsätze, die in dem letzten Abschnitt vorgestellt werden, sind in der Physik ein unentbehrliches Hilfsmittel.

5.1 Vektorfelder

Mit dem Begriff des Vektorfeldes ist eine Fülle von Möglichkeiten angesprochen. Einige Beispiele aus der Physik und Mathematik sind:

1. Der Ortsvektor eines Massenpunktes

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \rightarrow m = 3 \quad n = 1$$

entspricht drei Funktionen von einer Veränderlichen, die die Parameterdarstellung einer Kurve im Raum ergeben.

2. Kraftfelder, wie z.B. die Gravitationswirkung auf eine Probemasse

$$\mathbf{G}(x, y, z) = -\gamma m M \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) \rightarrow m = n = 3$$

$$\text{mit} \quad r = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2},$$

werden durch drei Funktionen von drei Veränderlichen dargestellt. Zur Veranschaulichung dient hier die Zuordnung von Vektorpfeilen zu jedem Punkt eines Gebietes im \mathcal{R}_3 .

3. Ein Satz von drei Funktionen von zwei Veränderlichen

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \rightarrow m = 3 \quad n = 2.$$

Man kann ein solches Vektorfeld als die Parameterdarstellung einer Fläche im Raum interpretieren. Explizite Beispiele sind z.B. Kugelflächen und Tori:

Bei der Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos u \sin v \\ y &= R \sin u \sin v \\ z &= R \cos v \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq u \leq 2\pi \quad 0 \leq v \leq \pi \quad R = \text{const.}$$

fährt der Endpunkt des Vektors \mathbf{r} die Oberfläche einer Kugel ab, wenn u und v in den angegebenen Grenzen variieren.

Ein Torus wird durch die Angaben

$$\left. \begin{aligned} x &= (a + R \cos v) \cos u \\ y &= (a + R \cos v) \sin u \\ z &= R \sin v \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq u \leq 2\pi \quad 0 \leq v \leq 2\pi \quad R, a \rightarrow \text{const.}$$

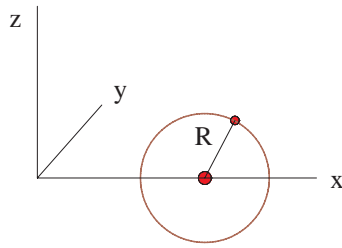
beschrieben. Betrachtet man zuerst die Situation in der (rechten) x - z Ebene, so findet man wegen

$$u = 0: \quad x = a + R \cos v \quad y = 0 \quad z = R \sin v,$$

die Parameterdarstellung eines Kreises um den Punkt $(a, 0, 0)$ (Abb. 5.1a). Dieser Kreis wird dann $(\cos u, \sin u)$ um die z -Achse gedreht und ergibt die Ringfläche (Abb. 5.1b).

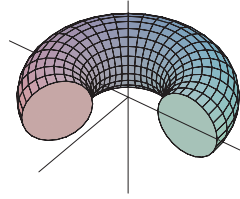
In der physikalischen Anwendung spielen die Fälle $n = 3 \quad m \leq 3$ aus offensichtlichen Gründen eine besondere Rolle. Die weitere Diskussion wird sich deswegen in der Hauptsache auf diese Fälle konzentrieren. Die Aufgabe, der man sich in der Vektoranalysis stellen muss, ist die Übertragung der verschiedenen Grenzwertbetrachtungen (Differentiation und Integration) von dem Fall von Skalarfeldern auf den Fall von Vektorfeldern.

(a)



Konstruktion

(b)



Ansicht

Abb. 5.1. Ein Torus

5.2 Differentiation von Vektorfeldern

Bei der Differentiation von Vektorfeldern muss man zunächst, mehr der Form wegen, die generelle Definition der Ableitung einer Vektorfunktion nach einer der Variablen betrachten. Die Definition dieses Grenzwertes (einschließlich Nomenklatur) ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) &= \mathbf{f}_{x_i}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \lim_{h_i \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h_i} [\mathbf{f}(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_n) - \mathbf{f}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)] \right\} \\ &= \lim_{h_i \rightarrow 0} \left\{ \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{h_i} (f_k(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_n) - f_k(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) \right] \mathbf{e}_k \right\}. \end{aligned}$$

Für eine endliche Summe (nur dieser Fall interessiert hier) kann man Summation und Grenzwertbetrachtung vertauschen und erhält

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m \mathbf{e}_k \frac{\partial f_k(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}.$$

Die (partielle) Ableitung einer Vektorfunktion ist, unter der genannten Voraussetzung, die Vektorfunktion aus den entsprechenden partiellen Ableitungen der Komponenten dieser Funktion.

Bei der Diskussion der Differentiation von Vektorfunktionen spielen drei Begriffe eine besondere Rolle. Neben dem schon andiskutierten Begriff des Gradienten eines Skalarfeldes sind die Begriffe der Divergenz und der Rotation eines Vektorfeldes einzuführen.

5.2.1 Gradient, Divergenz und Rotation

Diese Begriffe werden in diesem Abschnitt durch eine ad hoc Definition für den Fall $m = n = 3$ eingeführt. Erweiterungen auf den Fall von höheren Dimensionen sind möglich (und in der theoretischen Physik von Nutzen). Sie werden, ebenso wie die Frage der Veranschaulichung, erst in den Abschnitten von Math.Kap. 5.3 angesprochen.

Der Begriff des Gradienten wurde schon in Math.Kap. 4.2.3 eingeführt. Mit der Bildung des Gradienten ordnet man einer vorgegebenen Skalarfunktion $\phi(x_1, x_2, x_3)$ eine Vektorfunktion zu

$$\phi(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\text{grad}} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \nabla \phi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k}.$$

Die Komponenten der Vektorfunktion sind die partiellen Ableitungen der Skalarfunktion. Die anschauliche Interpretation ist, wie schon diskutiert: Der Vektor $\mathbf{f} = \text{grad } \phi$ steht in jedem Punkt einer Fläche $\phi = \text{const.}$ senkrecht auf der Tangentialebene an die Fläche (Abb. 5.2).

Die **Divergenz** eines Vektorfeldes \mathbf{f} ist definiert durch

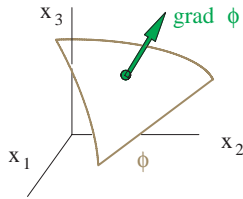


Abb. 5.2. Illustration des Gradientenvektors einer Funktion $\phi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$

$$\text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k}.$$

Diese Operation ordnet also einem Vektorfeld \mathbf{f} eine skalare Funktion zu.

$$\mathbf{f} \xrightarrow{\text{div}} \Phi = \text{div } \mathbf{f}.$$

Die **Rotation** eines Vektorfeldes \mathbf{f} ist durch die folgende Angabe definiert

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Mit der Bildung der Rotation eines Vektorfeldes ordnet man der Vektorfunktion \mathbf{f} eine Vektorfunktion $\text{rot } \mathbf{f}$ zu

$$\mathbf{f} \xrightarrow{\text{rot}} \mathbf{g} = \text{rot } \mathbf{f} .$$

Eine Bezeichnung, die oft in der angelsächsischen Literatur benutzt wird, ist curl anstelle von rot .

Die Reihenfolge der Indizes in der Definition merkt man sich am einfachsten anhand der symbolischen Determinantenform

$$\text{rot } \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1(x_1, \dots) & f_2 & f_3 \end{vmatrix} .$$

‘Auswertung’ dieser ‘Determinante’ ergibt die explizite Definition. Für formale Betrachtungen benutzt man die Summenschreibweise mit dem Levi-Civita Symbol

$$\text{rot } \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k .$$

Eine gewisse Analogie ist nicht übersehbar. Die Bildung der Divergenz entspricht einem Skalarprodukt, die Bildung der Rotation einem Vektorprodukt. Man kann diese Analogie formal zum Ausdruck bringen, indem man den schon bekannten Differentialoperator (mit Vektorcharakter)

$$\nabla = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} ,$$

den **Nablaoperator**, benutzt. Mit Hilfe dieses Operators schreibt man

- Die Gradientenbildung

$$\text{grad } \phi(x_1, x_2, x_3) = \nabla \phi(x_1, x_2, x_3)$$

entspricht der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (von rechts).

- Die Divergenz einer Vektorfunktion

$$\text{div } \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \nabla \cdot \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3)$$

entspricht dem Skalarprodukt von zwei Vektoren. Im Detail lautet es

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) &= \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k f_k(x_1, x_2, x_3) \right) \\ &= \sum_{i,k} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) \frac{\partial f_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial f_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k} . \end{aligned}$$

Die Reihenfolge der ‘Vektoren’ ist bei diesem ‘Skalarprodukt’ offensichtlich nicht vertauschbar.

- Die Rotation einer Vektorfunktion

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \nabla \times \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3)$$

ist dann das Vektorprodukt, mit der Detailauswertung

$$\nabla \times \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Die Nablaschreibweise lässt sich zu einem regelrechten Nablakalkül ausbauen. Die wichtigsten dieser Rechenregeln sind¹:

- (1) Es gibt einen Satz von Regeln für die Anwendung des Nablaoperators auf Produkte von Funktionen, wie z.B.

$$(a) \quad \nabla \cdot (\phi(\mathbf{r}) \mathbf{f}(\mathbf{r})) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{f} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{f})$$

oder in semiverbaler Form

$$\operatorname{div}(\phi \mathbf{f}) = \operatorname{grad} \phi \cdot \mathbf{f} + \phi \operatorname{div} \mathbf{f}.$$

$$(b) \quad \nabla \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{r}) \times \mathbf{g}(\mathbf{r})) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})$$

oder

$$\operatorname{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f} - \mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{g}.$$

Den Beweis dieser Regeln führt man, indem man die Ausdrücke explizit ausschreibt und die Regeln für die partielle Differentiation benutzt.

- (2) Ein weiterer Satz von Regeln betrifft die Mehrfachanwendung des Nablaoperators, so z.B.

- (a) Der Laplaceoperator, der schon in Math.Kap. 4.2.3 eingeführt wurde, lässt sich in der Form schreiben

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi).$$

Anwendung des inneren Nablaoperators liefert zunächst die Vektorfunktion $\operatorname{grad} \phi$, die dann bei der Divergenzbildung in eine andere Skalarfunktion übergeht. Im Detail kann man schreiben

$$\begin{aligned} \Delta \phi(\mathbf{r}) &= \sum_{ik} \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_{ik} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x_i}, \end{aligned}$$

so dass im Endeffekt der Operator

$$\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i}$$

auf die Skalarfunktion ϕ einwirkt.

- (b) Die Kombination $\nabla \times (\nabla \phi(\mathbf{r}))$ ergibt einen Nullvektor für jede zweimal differenzierbare Skalarfunktion

$$\nabla \times (\nabla \phi(\mathbf{r})) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = \mathbf{0}.$$

¹ Eine vollständige Sammlung der Regeln findet man z.B. in den Formelsammlungen, siehe Literaturliste.

- (c) Ebenso hat die Kombination $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{r}))$ für jede zweimal differenzierbare Vektorfunktion den Zahlenwert Null

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{r})) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = 0 .$$

Eine anschauliche Deutung der Begriffe Divergenz und Rotation einer Vektorfunktion gewinnt man über die Umkehroperation, die Integration von Vektorfunktionen. Die Veranschaulichung dieser Begriffe sollte man also zurückstellen bis das Thema Integration von Vektorfunktionen abgehandelt ist.

5.3 Integration von Vektorfunktionen

Der erste Typ von Integralen, der hier betrachtet werden sollen, sind die Kurvenintegrale. Diese sind, wie in dem zugehörigen Physikband ausgeführt, in der Mechanik von besonderer Bedeutung.

5.3.1 Kurvenintegrale

Eine Zusammenfassung der Definition und die bisherigen Aussagen zu diesem Thema in mehr mathematisch orientierter Form lautet wie folgt: Gegeben ist ein Kurvenstück K im \mathcal{R}_3 mittels der Parameterdarstellung (Abb. 5.3)

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i x_i(t) \quad t_a \leq t \leq t_b .$$

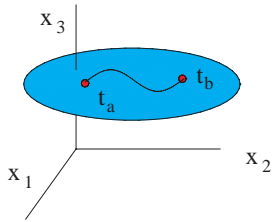


Abb. 5.3. Raumkurve im \mathcal{R}_3

Sind die drei Funktionen x_i differenzierbar, so ist das Kurvenstück glatt. In einem Raumgebiet G , das die Kurve umschließt, ist außerdem eine Vektorfunktion definiert

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \sum_i f_i(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_i .$$

Die Definition des Kurvenintegrals ist dann

$$\begin{aligned}
I &= \int_K \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_K (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3) \\
&= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_i f_i(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \dot{x}_i(t) \right\} dt.
\end{aligned}$$

Für die Kurvenintegration kann man eine Reihe von Rechenregeln bereitstellen:

1. Die Substitution $t = t(\tau)$ mit $dt = \left(\frac{dt}{d\tau}\right) d\tau$ ändert den Wert des Kurvenintegrals nicht

$$I = \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_i f_i(t) \frac{dx_i(t)}{dt} \right\} dt = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left\{ \sum_i f_i(t(\tau)) \frac{dx_i(t(\tau))}{d\tau} \right\} d\tau.$$

Für die Physik bedeutet dies: Bewegt man einen Massenpunkt in einem Kraftfeld entlang einer Kurve von A nach B , so spielt es bei der Berechnung der Arbeit keine Rolle, ob man den wirklichen Bewegungsablauf betrachtet ($t \rightarrow$ Zeit) oder den Massenpunkt in irgendeiner anderen Weise (τ) auf der gleichen Kurve bewegt.

2. Es gibt eine Reihe von Standardregeln wie

$$\begin{aligned}
\int_K (\mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_K \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_K \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} \\
\int_{-K} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_K \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung besagt: Wird das Kurvenstück in umgekehrter Richtung durchlaufen, so ändert das Kurvenintegral sein Vorzeichen. Die Regel folgt natürlich aus

$$\int_{t_a}^{t_b} F(t) dt = - \int_{t_b}^{t_a} F(t) dt.$$

3. Sind K_1 und K_2 zwei glatte Kurven, die aneinander anschließen, so gilt

$$\int_{K_1+K_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{K_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{K_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

Kurvenintegrale lassen sich also nicht nur über glatte Kurven, sondern auch über beliebige, zusammenhängende Kurven berechnen.

4. Sozusagen als Erweiterung der dritten Regel kann man Zerlegungssätze betrachten. Im Weiteren wird insbesondere der folgende Zerlegungssatz benötigt: Eine Vektorfunktion \mathbf{f} ist in einem Gebiet G des \mathcal{R}_3 definiert. In G existiert ein Flächenstück F , das von einer geschlossenen Kurve K , die in einem bestimmten Sinn durchlaufen wird, umrandet ist. Man zerlegt die Fläche

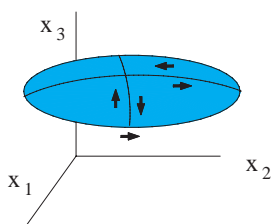


Abb. 5.4. Zerlegungssatz für Kurvenintegrale

durch einen Satz von Kurven in umrandete Teilbereiche (Abb. 5.4). Es gilt dann der Zerlegungssatz

$$\oint_K \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{K_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \oint_{K_n} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

Hier wurde die übliche Schreibweise für Integrale über geschlossene Kurven \oint_K (ohne oder mit Pfeil, um die Umlaufrichtung zu kennzeichnen) benutzt. Der Beweis dieser Aussage beruht auf der Bemerkung: Jede der Kurven innerhalb des Gebietes G , die zur Zerlegung benutzt wurde, wird zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Die Beiträge der Zwischenstücke heben sich heraus und es bleibt der Beitrag der Randkurve K .

Eine Frage spielt bei der Anwendung von Kurvenintegralen eine besondere Rolle: Unter welchen Bedingungen ist ein Kurvenintegral zwischen zwei Punkten unabhängig von dem Integrationsweg? Unter welcher Bedingung gilt für verschiedene Wege zwischen zwei Punkten A und B (solange diese Wege in dem Gebiet liegen, in dem die Vektorfunktion definiert ist)

$$\int_{K_1(A,B)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{K_2(A,B)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \quad ?$$

Das folgende Beispiel (Abb. 5.5) zeigt zunächst, dass Wegunabhängigkeit nicht unbedingt vorliegen muss. Bildet man das Kurvenintegral mit der Vek-

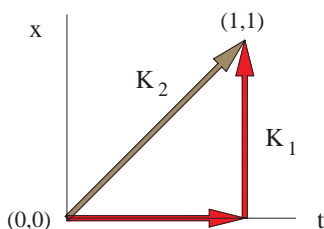


Abb. 5.5. Zur Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen

torfunktion

$$\mathbf{f} = (2xy, y^2, 0)$$

und den Kurven

$$\begin{array}{llll} K_1 & x = t & y = 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ & x = 1 & y = t - 1 & 1 \leq t \leq 2 \\ K_2 & x = t & y = t & 0 \leq t \leq 1 \end{array}$$

von dem Koordinatenursprung der x - y Ebene zu dem Punkt $(1, 1)$, so findet man für den Weg K_1 parallel zu den Koordinatenachsen

$$I_1 = \int_{K_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (0) dt + \int_1^2 (0 + (t-1)^2) dt = \int_1^2 (t-1)^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Für den Weg K_2 entlang der Diagonalen im ersten Quadranten erhält man dagegen das Resultat

$$I_2 = \int_{K_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (2t^2 + t^2) dt = 1.$$

Um die Frage nach der Wegunabhängigkeit zu beantworten, benötigt man zwei Aussagen.

1. Es ist einfach, die folgende Aussage zu beweisen:

Ist $\mathbf{f} = \nabla\phi$, so folgt $\int_K \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ ist wegunabhängig.

Aufgrund der Voraussetzung gilt

$$\int_K \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \right) dt.$$

Fasst man den Ausdruck in der Klammer mit Hilfe der Kettenregel zusammen und integriert, so findet man

$$= \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{d\phi}{dt} \right) dt = \phi(t_b) - \phi(t_a)$$

oder im vollen Detail

$$= \phi(x_1(t_b), x_2(t_b), x_3(t_b)) - \phi(x_1(t_a), x_2(t_a), x_3(t_a)).$$

Das Kurvenintegral hängt nur von den Werten der Funktion ϕ am Anfangs- und am Endpunkt des Kurvenstücks ab, es ist also wegunabhängig.

2. Es ist etwas aufwendiger zu zeigen, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt:

$$\text{Ist } \int_{K(A,B)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A), \text{ so folgt } \mathbf{f} = \nabla\phi.$$

Gemäß Voraussetzung kann man schreiben

$$\int_K \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, x_2, x_3) - \phi(A)$$

$$\int_{K+K_h} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, x_2, x_3 + h) - \phi(A),$$

wobei das infinitesimale Wegstück K_h parallel zur 3-Achse gewählt wurde (Abb. 5.6). Mit der Definition der partiellen Ableitung in der 3-Richtung

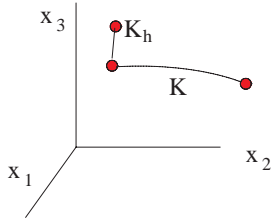


Abb. 5.6. Illustration der Argumentation in dem Beweis der Relation zwischen Kurvenintegration und Gradientenbildung

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} (\phi(x_1, x_2, x_3 + h) - \phi(x_1, x_2, x_3)) \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} \int_{K_h} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \right\}$$

und der Parameterdarstellung des Kurvenstücks K_h

$$x_1(t) = x_1 \quad x_2(t) = x_2 \quad x_3(t) = x_3 + t \quad (0 \leq t \leq h)$$

folgt

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h f_3(x_1, x_2, x_3 + t) dt \right\}.$$

Wendet man den Mittelwertsatz der Integralrechnung auf diesen Ausdruck an, so erhält man

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} (h f_3(x_1, x_2, x_3 + c h)) \right\} \quad (0 \leq c \leq 1)$$

$$= f_3(x_1, x_2, x_3).$$

Ein entsprechendes Argument gilt, wenn K_h parallel zur 1- oder zur 2-Achse gewählt wird.

Die beiden Aussagen

$$\int_K \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \text{ ist wegunabhängig und } \mathbf{f} = \nabla \phi$$

sind also völlig gleichwertig. Die erste Aussage impliziert, dass eine Klasse von Vektorfunktionen (nämlich die, die als Gradient einer Skalarfunktion dargestellt werden können) existiert, für die das Kurvenintegral wegunabhängig ist. Die zweite Aussage bestätigt dann: Es gibt keine andere Klasse von Vektorfunktionen, für die Wegunabhängigkeit gegeben ist.

Man kann diese Aussagen noch etwas variieren.

3. Falls

$$\int_{K_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{K_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

ist, so folgt

$$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{K_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-K_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0 .$$

Ist das Kurvenintegral wegunabhängig, so verschwindet das Kurvenintegral über geschlossene Kurven.

4. Für jede differenzierbare Vektorfunktion mit $\mathbf{f} = \nabla\phi$ ist gemäß den Rechenregeln des Nablakalküls $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$. Für eine Vektorfunktion mit wegunabhängigen Kurvenintegralen gilt also immer $\text{rot } \mathbf{f} = 0$.

Diese Argumente kann man folgendermaßen zusammenfassen. Es liegen vier äquivalente Aussagen vor

$\int_K \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A)$	$\mathbf{f} = \nabla\phi$
$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$	$\text{rot } \mathbf{f} = 0 .$

Ist eine der Aussagen gültig, so folgt daraus die Gültigkeit der anderen drei. Hat man z.B. für ein Vektorfeld \mathbf{f} verifiziert, dass in einem Gebiet G die Rotation verschwindet, so ist man sicher, dass das Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve in G verschwindet, bzw. das Kurvenintegral wegunabhängig ist oder \mathbf{f} als Gradient einer Skalarfunktion darstellbar ist.

Diese Aussagen sind, wie in Buch.Kap. 3.2.3 ausgeführt, für die Diskussion des Energiesatzes von Interesse, desgleichen in der Elektrostatik.

Die nächste Klasse von Integralen mit Vektorfunktionen sind die etwas komplizierteren Oberflächenintegrale.

5.3.2 Oberflächenintegrale mit Vektorfunktionen

Die Integrale, die hier zur Diskussion stehen, können folgendermaßen charakterisiert werden. Gegeben ist ein beliebiges Flächenstück S im Raum und eine Vektorfunktion \mathbf{f} , die in einem Gebiet G definiert ist, das die Fläche S einschließt (Abb. 5.8b). Die Fläche wird in infinitesimale Flächenelemente unterteilt, für die sowohl eine Größe als auch eine Orientierung angegeben wird. Die infinitesimalen Flächenelemente werden also durch einen Vektor $d\mathbf{S}$ beschrieben. Die Länge des Vektors ist ein Maß für die Größe des infi-

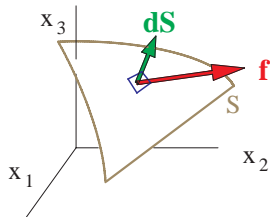


Abb. 5.7. Zur Definition des Oberflächenintegrals

nitesimalen Flächenelementes. Der Vektor markiert die Orientierung, wenn er senkrecht auf den Flächenelementen steht (Details bezüglich der Orientierung folgen sofort). Für jedes infinitesimale Flächenelement bildet man das Skalarprodukt $\mathbf{f}(\text{an der Stelle von } d\mathbf{S}) \cdot d\mathbf{S}$ und addiert (im Sinne der üblichen Grenzwertbetrachtung) alle diese Beiträge. Das Ergebnis ist das Oberflächenintegral (Abb. 5.7)

$$I = \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}.$$

Zunächst muss die Frage der Unterteilung bzw. der Orientierung etwas genauer diskutiert werden. Zu diesem Zweck betrachtet man eine Kugelfläche mit Radius R . Für die Standardaufteilung der Oberfläche benutzt man ein Gradnetz, das heißt Kugelkoordinaten (Abb. 5.8a). Ein infinitesimales Flächenelement ist dann

$$dS = (Rd\theta)(Rd\varphi \sin \theta) = R^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi.$$

Für die Richtungsangabe benutzt man die Normalenrichtung nach außen. Es ist also

$$d\mathbf{S} = dS \, \mathbf{e}_r.$$

Diese Festlegung verbirgt keine Tiefsinnigkeit. Die Richtungsangabe ‘nach innen’ wäre genauso akzeptabel. Hat man ein offenes Flächenstück (z.B. eine Kugelschale oder ein ebenes Flächenstück im Raum), so kann man nicht unbedingt zwischen Innen- und Außenfläche unterscheiden. In diesem Fall benutzt man die folgende Festlegung der Orientierung: Man gebe eine Orientierung

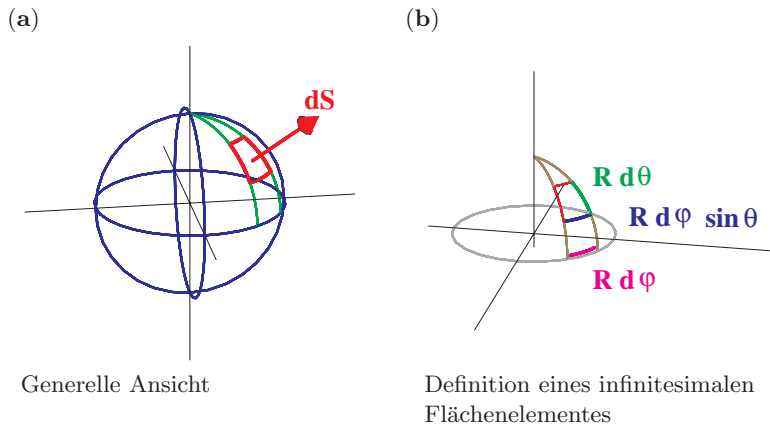


Abb. 5.8. Oberflächenintegrale auf Kugelflächen

der Randkurve vor, indem man sie in einem bestimmten Sinn durchläuft. Die Orientierung der Randkurve und der Zerlegungssatz für Kurven bestimmen dann die Orientierung der Randkurve eines infinitesimalen Flächenelementes. Die Richtung von $d\mathbf{S}$ entspricht der Flächennormalen, die sich aus

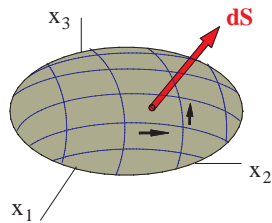


Abb. 5.9. Zerlegung einer Raumfläche

dem Umlaufsinn gemäß der Rechten-Hand-Regel (oder Schraubenregel) ergibt (Abb. 5.9). Nicht alle Raumflächen sind in dieser Weise orientierbar, ein Paradebeispiel ist das Band von Möbius.

Für einfache Situationen kann man das Oberflächenintegral anhand dieser anschaulichen Definition direkt berechnen. So erhält man z.B. für eine Kugelfläche um den Koordinatenursprung und ein Zentralfeld $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{e}_r$ das Oberflächenintegral

$$I = \oint_{Ku} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{Ku} f(R) dS ,$$

(da \mathbf{f} und $d\mathbf{S}$ in die gleiche Richtung zeigen)

$$= R^2 f(R) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\phi \sin \theta d\theta = 4\pi f(R) R^2 .$$

Insbesondere für $f(r) = 1$ erhält man

$$\oint_{\text{Ku}} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = 4\pi R^2 ,$$

die Oberfläche der Kugel. Man erkennt hier *eine* Anwendungsmöglichkeit von Oberflächenintegralen. Führt man die Oberfläche mit einem geeigneten Vektorfeld ab (Einheitsvektor in Normalenrichtung), so wird die gekrümmte Fläche sozusagen geglättet und maßstabsgetreu vermessen.

Die Auswertung von Oberflächenintegralen wird etwas komplizierter, wenn das Vektorfeld keine Zentralsymmetrie besitzt, selbst wenn die Fläche, über die integriert wird, Kugelgestalt hat. Man benötigt in diesem Fall zuerst eine Zerlegung von $d\mathbf{S}$ in kartesische Komponenten

$$d\mathbf{S} = dS \mathbf{e}_r = R^2 \sin \theta (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) d\varphi d\theta ,$$

so dass das Oberflächenintegral einer Vektorfunktion \mathbf{f}

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\text{Ku}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \\ &= R^2 \iint d\varphi d\theta \{ f_x(x(R, \varphi, \theta), y(R, \varphi, \theta), z(R, \varphi, \theta)) \cos \varphi \sin^2 \theta \\ &\quad + f_y(x(R, \varphi, \theta), y(R, \varphi, \theta), z(R, \varphi, \theta)) \sin \varphi \sin^2 \theta \\ &\quad + f_z(x(R, \varphi, \theta), y(R, \varphi, \theta), z(R, \varphi, \theta)) \sin \theta \cos \theta \} \end{aligned}$$

ist. Es sind im Allgemeinen drei Doppelintegrale auszuwerten. So erhält man z.B. für die Vektorfelder (Abb. 5.10a, b):

$$\mathbf{f}_1 = (x, 0, 0) \quad \mathbf{f}_2 = (x^2, 0, 0)$$

bei Integration über eine Halbkugel folgende Integrale

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\text{HK}} \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{S} = R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \\ &= R^3 [\pi] \left[\frac{2}{3} \right] = \frac{2}{3} \pi R^3 \\ I_2 &= \iint_{\text{HK}} \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{S} = R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^3 \varphi \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta \\ &= R^4 [0] \left[\frac{3}{16} \pi \right] = 0 \end{aligned}$$

In dem zweiten Beispiel tragen gegenüberliegende Flächenelemente auf der

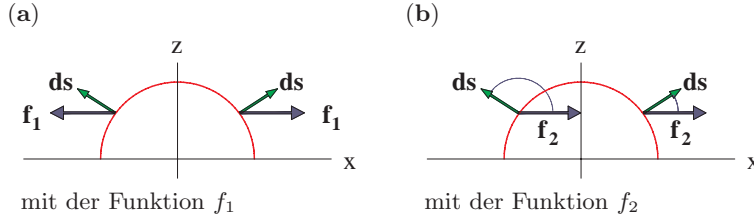


Abb. 5.10. Details zur Berechnung von Oberflächenintegralen auf Halbkugeln

einen Seite mit dem Winkel $\cos \alpha_{(dS, f)}$, auf der anderen mit

$$\cos(\pi - \alpha)_{(dS, f)} = -\cos \alpha_{(dS, f)}$$

bei, so dass sich die Beiträge von der vorderen (positiven x -Richtung) und der hinteren Viertelkugel kompensieren.

Für die Diskussion von allgemeineren Situationen ist es notwendig, die anschauliche Definition in eine explizite Berechnungsvorschrift umzusetzen. Eine beliebige offene Fläche mit orientiertem Rand kann auf die drei Koordi-

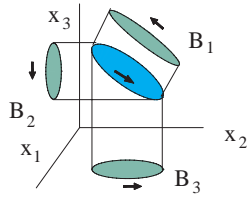


Abb. 5.11. Projektion einer Raumfläche auf die Koordinatenebenen

natenebenen projiziert werden. Die Bereiche, die man auf diese Weise erhält, indiziert man durch die zyklische Ergänzung, so ist z.B. B_1 die Projektion auf die 2-3 Ebene. Die Orientierung der Randkurve von S überträgt sich als Orientierung der Ränder der Projektionen (Abb. 5.11). Die Projektion eines infinitesimalen Flächenelementes $d\mathbf{S}$ ergibt entsprechend drei schiefwinklige Flächenstücke in den Koordinatenebenen (Abb. 5.12). Diese Projektion entspricht genau der Komponentenzerlegung des Vektors $d\mathbf{S}$ in seine kartesischen Komponenten

$$d\mathbf{S} = dS_1 \mathbf{e}_1 + dS_2 \mathbf{e}_2 + dS_3 \mathbf{e}_3 .$$

Die Zerlegung des gesamten Integrals lautet somit

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{B_1} f_1 dS_1 + \iint_{B_2} f_2 dS_2 + \iint_{B_3} f_3 dS_3 .$$

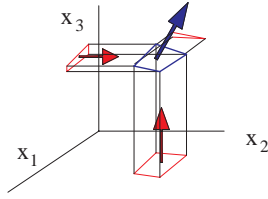


Abb. 5.12. Details zu der Projektion einer Raumfläche auf die Koordinatenebenen

Ein Oberflächenintegral mit einer Vektorfunktion über eine gekrümmte Fläche im Raum lässt sich in drei Bereichsintegrale (siehe Math.Kap. 4.2.3) über ebene Bereiche in den Koordinatenebenen zerlegen. Die Bereichsintegrale selbst kann man (Beschränktheit des Integranden vorausgesetzt) in beliebiger Weise zerlegen. Anstelle der schiefwinkligen Aufteilung, die sich durch die Projektion ergibt, kann man auch eine Rechteckzerlegung wählen

$$dS_1 = dx_2 dx_3 \quad dS_2 = dx_1 dx_3 \quad dS_3 = dx_1 dx_2 ,$$

so dass man zunächst die Zerlegung erhält

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{B_1} f_1(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \\ &\quad + \iint_{B_2} f_2(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_3 + \iint_{B_3} f_3(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 . \end{aligned}$$

Es sind jedoch zwei weitere Punkte zu beachten:

1. In dem Integral über B_1 sind die Integrationsvariablen x_2 und x_3 . Die Punkte (x_1, x_2, x_3) liegen auf der Fläche S . Aus diesem Grund ist x_1 keine unabhängige Variable, sondern eine Funktion von x_2 und x_3 . Ist die Fläche durch eine implizite Gleichung

$$S(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (\text{z.B. } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0 \quad \text{für eine Kugelfläche})$$

charakterisiert, so ergibt sich durch Auflösung nach x_1

$$x_1 = x_1(x_2, x_3) \quad \left(\text{z.B. } x_1 = \pm [R^2 - x_2^2 - x_3^2]^{1/2} \right) .$$

Entsprechendes gilt für die zwei anderen Bereichsintegrale. Die vollständige Form des Oberflächenintegral in kartesischer Zerlegung lautet somit

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{B_1} f_1(x_1(x_2, x_3), x_2, x_3) dx_2 dx_3 \\ &\quad + \iint_{B_2} f_2(x_1, x_2(x_1, x_3), x_3) dx_1 dx_3 \\ &\quad + \iint_{B_3} f_3(x_1, x_2, x_3(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 . \end{aligned}$$

Mit diesem Ausdruck hat man die Berechnung des Oberflächenintegrals einer Vektorfunktion über eine beliebige Fläche im Raum vollständig auf die Berechnung von Bereichsintegralen (von Funktionen von zwei Veränderlichen) zurückgeführt, doch treten bei dieser Form in der Anwendung immer noch kleine Schwierigkeiten auf.

2. Die Projektion auf die Koordinatenebenen kann zu einer Doppelbelegung führen. Projiziert man z.B. eine Halbkugel (mit $x_3 \geq 0$) auf die 2-3 Ebene, so ist das Bild jeder Viertelkugel in dieser Ebene jeweils eine halbe Kreisfläche. Nur wenn man die Orientierung der Viertelkugeln berücksichtigt, kann man die Belegungen unterscheiden (Abb. 5.13). Es ist

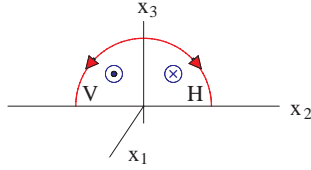


Abb. 5.13. Zur Frage der Doppelbelegung

$$d\mathbf{S}_1 = dx_2 dx_3 \mathbf{e}_1 \quad \text{bzw.} \quad d\mathbf{S}_1 = -dx_2 dx_3 \mathbf{e}_1$$

für die vordere bzw. die hintere Halbkugel. Jedes der drei Bereichsintegrale ist somit unter Umständen noch einmal gemäß der Doppelbelegung aufzuspalten, wobei dann noch die entsprechende Form von $x_1 = x_1(x_2, x_3)$ zu wählen ist.

Für das Beispiel: $\mathbf{f}_1 = (x_1, 0, 0)$ mit der Integration über eine Halbkugel erhält man nach dem obigen Argument

$$\begin{aligned} \iint_{\text{HK}} \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{B_1} [R^2 - x_2^2 - x_3^2]^{1/2} dx_2 dx_3 \quad (\text{vordere HK}) \\ &\quad - \iint_{B_1} \left(-[R^2 - x_2^2 - x_3^2]^{1/2} \right) dx_2 dx_3 \quad (\text{hintere HK}) \\ &= 2 \iint_{B_1} [R^2 - x_2^2 - x_3^2]^{1/2} dx_2 dx_3 = \frac{2\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

Für das Beispiel $\mathbf{f}_2 = (x_1^2, 0, 0)$ ist der Integrand für beide Halbkugeln

$$+(R^2 - x_2^2 - x_3^2).$$

Aus diesem Grund ergibt sich (wie zuvor berechnet)

$$\iint_{\text{HK}} \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Um das Problem der Doppelbelegung und der anschließenden Detaildiskussion zu vermeiden, ist es nützlich die Bereichsintegrale nicht in kartesischer Zerlegung, sondern in angepassten Koordinaten zu berechnen. Man benutzt dazu die Möglichkeit, die Fläche S durch eine Parameterdarstellung zu beschreiben.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u, v) & x_2 &= x_2(u, v) & x_3 &= x_3(u, v) \\ a &\leq u \leq b & \alpha &\leq v \leq \beta . \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Substitutionsregel für jedes der Bereichsintegrale erhält man dann

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{B(S)} \left[f_1(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u, v)} \right. \\ &\quad + f_2(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u, v)} \\ &\quad \left. + f_3(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} \right] du dv . \end{aligned}$$

Integriert wird über das Bild von S , das sich anhand der Substitution ergibt. Zu beachten ist auch der folgende Punkt: Die Funktionaldeterminanten treten ohne Absolutbetrag auf. Die Reihenfolge der Koordinaten ist zyklisch. Auf diese Weise werden (bis auf ein Gesamtvorzeichen, das sich aus der Reihenfolge der Koordinaten u, v ergibt) die Orientierung und Belegungsfragen automatisch sortiert. Diese endgültige Form zeigt an, dass das Oberflächenintegral (mit zwei Integrationsvariablen) eine konsequente Erweiterung des Kurvenintegrals (mit einer Integrationsvariablen) ist.

Zur Illustration kann man noch einmal die zwei Beispiele betrachten, für die das Integral

$$\iint_{HK} \mathbf{f}_i \cdot d\mathbf{S} = \iint_{B(HK)} f_i(x_1(\theta, \varphi)) \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(\theta, \varphi)} d\theta d\varphi$$

zu berechnen ist. Die relevante Funktionaldeterminante ist

$$\frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R \sin \varphi \cos \theta & -R \sin \theta \\ R \cos \varphi \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = R^2 \cos \varphi \sin^2 \theta .$$

Setzt man die Parameterdarstellung und die Funktionaldeterminante ein, so findet man

$$\iint_{HK} \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta (R \cos \varphi \sin \theta) (R^2 \cos \varphi \sin^2 \theta)$$

bzw.

$$\iint_{\text{HK}} \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta (R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta) (R^2 \cos \varphi \sin^2 \theta) .$$

Das Bild der Halbkugel ist ein Rechteck. Die Integrale sind die gleichen, die bei der elementaren Betrachtung auftraten.

Die Auswertung über die Parameterdarstellung bietet einen gewissen Automatismus, der sich auch in komplizierteren Fällen anwenden lässt. In dem nächsten Abschnitt wird jedoch eine alternative Methode vorgestellt, die in vielen Fällen wesentlich effizienter ist.

5.3.3 Die Integralsätze von Gauß und Stokes

Die Darstellung von Vektorfeldern durch Feldlinienbilder bietet eine Einstimmung in diesen Themenkreis. Die Feldlinien sind Tangentialkurven an benachbarte Feldvektoren, die mit der Feldrichtung versehen sind. In dem einfachen Beispiel eines Gravitationsfelds der Masse M , die im Koordinatenursprung sitzt,

$$\mathbf{G} = -\gamma M \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

sind die Feldlinien Halbgeraden, die radial (aus allen Richtungen) auf den Koordinatenursprung gerichtet sind (Abb. 5.14). Das Gravitationsfeld von

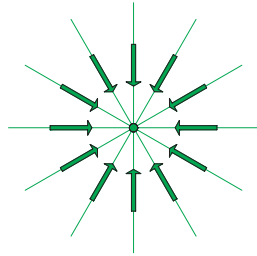


Abb. 5.14. Kugelsymmetrisches Feld

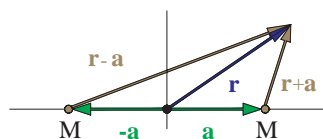
zwei gleichgroßen Massen, die symmetrisch zum Koordinatenursprung auf einer Koordinatenachse angebracht sind, ist in dem Punkt \mathbf{r}

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 = -\gamma M \left\{ \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} + \frac{(\mathbf{r} + \mathbf{a})}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|^3} \right\} .$$

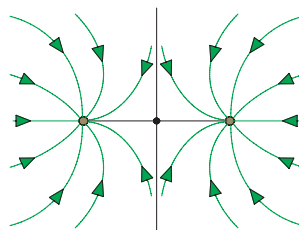
Die Geometrie und das entsprechende Feldlinienbild sind in Abb. 5.15 angedeutet.

In der Nähe der beiden Massen dominiert das eigene Feld. In dem Zwischenbereich sind die Feldlinien stark modifiziert. Die Feldlinien schmiegen

(a)

Geometrie der Verteilung
der Massenpunkte

(b)



Feldlinienbild

Abb. 5.15. Das Dipolfeld

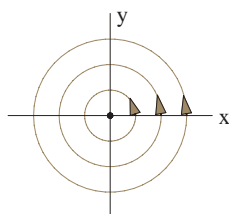
sich an die Trennebene zwischen den Massen an. Das gesamte Bild ist rotationssymmetrisch bezüglich der Achse, auf der sich die Massen befinden. Dies ist ein Beispiel für ein Dipolfeld.

Würde man Punktladungen anstelle von Punktmassen betrachten, so hätte man in dem einfachsten Fall das elektrische Feld einer (positiven oder negativen) Punktladung q im Koordinatenursprung

$$\mathbf{E} = -\gamma' q \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (q = \pm).$$

Ein weiteres Beispiel ist das Vektorfeld

$$\mathbf{B} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

**Abb. 5.16.** Feldlinienbild eines Magnetfeldes

Dieses Feld ist translationssymmetrisch bezüglich der z -Achse. Für jede Ebene $z = \text{const.}$ erhält man das gleiche Feldlinienbild. Die Feldlinien sind konzentrische Kreise um die z -Achse (Abb. 5.16). Dieses Feld ist (bis auf konstante Faktoren) das Magnetfeld eines dünnen, stromdurchflossenen Leiters entlang der z -Achse.

Die Oberflächenintegrale für die verschiedenen Felder

$$\iint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} \quad \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} .$$

bezeichnet man als den **Fluss** der Felder durch die Fläche S , insbesondere als Gravitationsfluss, elektrischen Fluss, magnetischen Fluss etc. Diese Terminologie hat ihren Ursprung in der Hydrodynamik. Dort betrachtet man z.B. das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Flüssigkeitsströmung (Abb. 5.17). Jedem infinitesimalen Volumenelement wird ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ zugeordnet. Ist die Geschwindigkeit uniform und stellt man senkrecht zu der Strömung eine ebene Fläche S , so ist Sv ein Maß für die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche strömt. Ist die ebene Fläche gegen die Strömung geneigt, so ist das Maß das Skalarprodukt $\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$. Ist die Strömung

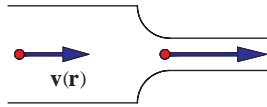


Abb. 5.17. Hydrodynamischer Fluss

nicht uniform und/oder die Fläche nicht eben (Abb. 5.18), so ist der Geschwindigkeitsfluss

$$\iint_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} .$$

Die Übertragung dieses Flusskonzeptes auf den Fall eines beliebigen Vektorfeldes erfordert, dass man als Maß für die ‘Stärke der Strömung’ die Anzahl der Feldlinien (normiert z.B. auf eine vorgegebene Masse, Ladung, Stromstärke), die durch die Fläche hindurchtreten, benutzt. Für das Gra-

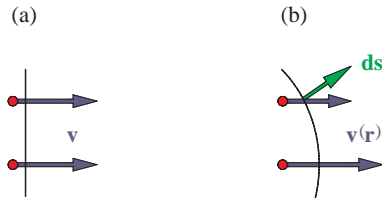


Abb. 5.18. Zur Definition des Flusses

avitationsfeld einer Punktmasse in dem Koordinatenursprung ist der Fluss durch eine Kugel­fläche mit Radius R um den Koordinatenursprung

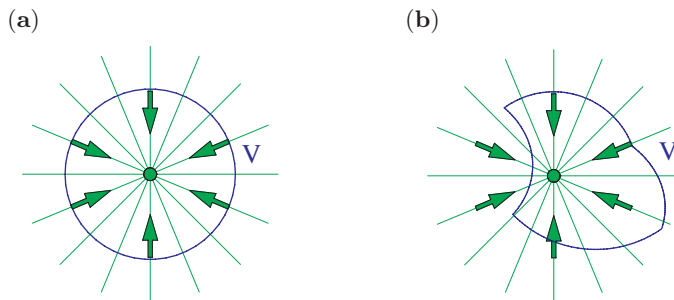
$$\oint_{K_u} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = -\gamma M \frac{1}{R^2} \oint_{K_u} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\gamma M .$$

Das Resultat ist unabhängig von dem Kugelradius, also für jede Kugel um den Koordinatenursprung gültig. Dies entspricht der vorgeschlagenen Interpretation. Die gleiche, normierte Anzahl von Feldlinien greift durch jede dieser Kugelflächen (Abb. 5.19a).

Man würde das gleiche Ergebnis erwarten, wenn man eine beliebig geformte, geschlossene Fläche $S(\text{mit})$ um den Koordinatenursprung legt.

$$\oint_{S(\text{mit})} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\gamma M .$$

Im Rahmen der vorgeschlagenen Interpretation des Flusskonzeptes wäre dieses Ergebnis verständlich. Durch die beliebige Fläche tritt die gleiche Anzahl von Feldlinien wie durch jede der Kugelflächen (Abb. 5.19b). Für eine beliebi-



durch eine umgebende Kugelfläche durch eine beliebige, umgebende Fläche

Abb. 5.19. Der Fluss einer Punktmasse im Ursprung

ge geschlossene Fläche $S(\text{ohne})$, die den Koordinatenursprung nicht enthält, sollte dann gelten

$$\oint_{S(\text{ohne})} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = 0 .$$

Hier treten genauso viele Feldlinien in die Fläche hinein wie hinaus. Der Nettofluss ist demnach Null (Abb. 5.20). Den Beweis dieser Aussagen liefert das unten diskutierte Gaußtheorem. Eine übliche Interpretation dieser Situation ist: Der Massenpunkt ist eine **Quelle** des Feldes. Etwas allgemeiner und präziser unterscheidet man Quellen und Senken (Abb. 5.21a,b). Aus einer Quelle treten Feldlinien aus, in eine Senke laufen sie hinein. Berechnet man den Fluss durch eine geschlossene Fläche um eine Quelle/Senke, so ist dieser ungleich Null. Berechnet man den Fluss für eine geschlossene Fläche, in der sich keine Quelle/Senke befindet, so verschwindet der Fluss.

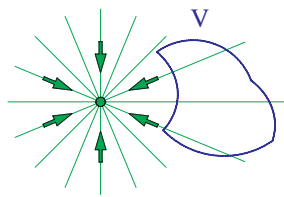
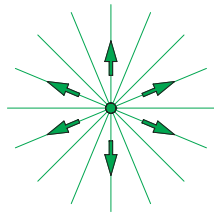


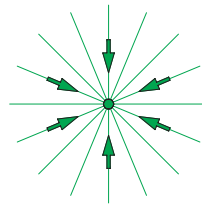
Abb. 5.20. Fluss durch eine Fläche, die den Massenpunkt nicht enthält

(a)



Quelle

(b)



Senke

Abb. 5.21. Illustration von Quellen und Senken

Die quantitative Fassung dieser Situation liefert der **Satz von Gauß**, der auch als **Divergenztheorem** bezeichnet wird. Dieses Theorem lautet

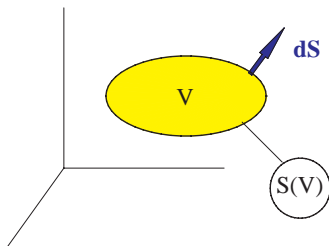


Abb. 5.22. Zum Satz von Gauß

In einem Bereich V des \mathcal{R}_3 ist eine stetig differenzierbare Vektorfunktion \mathbf{f} gegeben. Der Bereich soll so beschaffen sein, dass er von achsenparallelen Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten wird. Es gilt dann

$$\iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3)) \, dx_1 dx_2 dx_3 = \oiint_{S(V)} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) \cdot d\mathbf{S}.$$

In Worten besagt das Theorem: Ist der Integrand eines Volumenintegrals die Divergenz eines Vektorfeldes, so ist dieses Volumenintegral gleich dem Oberflächenintegral der Vektorfunktion über die Begrenzung von V (Abb. 5.22). Die (geschlossene) Fläche ist, entsprechend der Standardverabredung, so orientiert, dass \mathbf{dS} nach außen zeigt. Die Einschränkung der Form des Bereiches bedeutet, dass der Bereich konvex sein soll (Abb. 5.23).

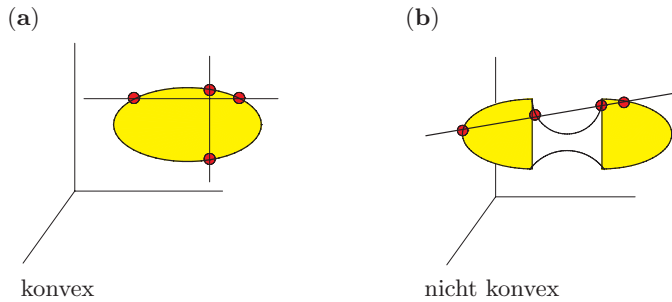


Abb. 5.23. Klassifikation von Volumina

Um das Theorem zu beweisen, schreibt man die linke Seite der Gleichung explizit aus

$$\iiint \operatorname{div} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) \, dV = \iiint_V \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 .$$

In dem ersten Term

$$T_1 = \iiint_V \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3$$

kann der Integrationsbereich explizit angegeben werden, wenn man die Begrenzung in eine Boden- und eine Deckelfläche bezüglich der x_1 Richtung unterteilt (Abb. 5.24)

$$\text{Boden : } x_1 = B(x_2, x_3) \quad \text{Deckel : } x_1 = D(x_2, x_3) .$$

Hier benutzt man die Beschränkung auf ein konvexes Volumen. Das Dreifachintegral ist dann

$$T_1 = \iint_{B_1} dx_2 dx_3 \int_{B(x_2, x_3)}^{D(x_2, x_3)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) dx_1 .$$

Das verbleibende Zweifachintegral über x_2 und x_3 ist über die Projektion des Volumens V in die 2-3 Ebene (B_1) zu berechnen. Dieser Bereich muss nicht näher spezifiziert werden. Die Integration über die Koordinate x_1 ist trivial. Die Stammfunktion ist f_1 und man findet

$$\begin{aligned}
T_1 &= \iint_{B_1} dx_2 dx_3 \{f_1(D(x_2 x_3), x_2 x_3) - f_1(B(x_2 x_3), x_2 x_3)\} \\
&= \iint_{S(V)} f_1 \cdot dS_1 .
\end{aligned}$$

Dies ist jedoch genau der erste Term des Oberflächenintegrals (bei kartesischer Zerlegung und Doppelbelegung der Fläche B_1) auf der rechten Seite der Gleichung. Eine entsprechende Betrachtung für die Terme T_2 und T_3 liefert dann den vollständigen Beweis.

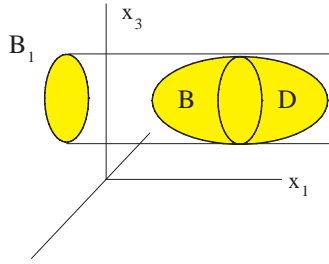


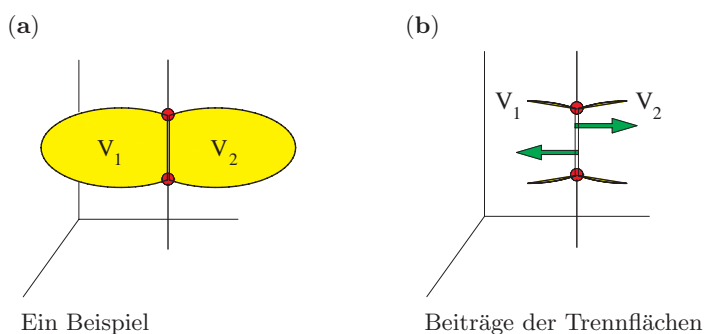
Abb. 5.24. Zum Beweis des Gaußtheorems

Von der Beschränkung auf konvexe Bereiche kann man sich relativ leicht befreien. Man kann z.B. ein Volumen mit einer Einschnürung mittels einer Trennfläche in zwei konvexe Teilbereiche zerlegen (Abb. 5.25a). Für die Teilbereiche gilt

$$\begin{aligned}
\iiint_{V_1} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dV &= \oint_{S(V_1)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} \\
\iiint_{V_2} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dV &= \oint_{S(V_2)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} .
\end{aligned}$$

Addition beider Aussagen ergibt auf der linken Seite das Volumenintegral über den Gesamtbereich. Auf der rechten Seite hebt sich bei Addition der Beitrag der Trennflächen heraus, da die beiden Teilflächen von $S(V_1)$ und $S(V_2)$ in jedem Punkt entgegengesetzt orientiert sind (Abb. 5.25b). Es bleibt das Oberflächenintegral über die Begrenzung des Gesamtvolumens.

Ein praktischer Aspekt des Gaußtheorems ist die Umschreibung von Oberflächenintegralen in Volumenintegrale und umgekehrt. Je nach Situation kann es einfacher sein, das eine oder das andere Integral zu berechnen. Ist z.B. die Aufgabe gestellt: Berechne das Oberflächenintegral mit dem Vek-

**Abb. 5.25.** Nichtkonvexe Volumina

torfeld $\mathbf{f} = (x_1, 0, 0)$ für ein Ellipsoid um den Koordinatenursprung mit den Halbachsen a, b, c , so ist die Berechnung von

$$\oint_{S(\text{Ell})} x_1 \mathbf{e}_1 \cdot d\mathbf{S}$$

möglich, doch recht aufwendig. Wegen $\text{div } \mathbf{f} = 1$ folgt mit dem Satz von Gauss

$$\oint_{S(\text{Ell})} x_1 \mathbf{e}_1 \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V(\text{Ell})} dV = \frac{4}{3} \pi abc .$$

Das Theorem liefert auch eine gewisse Veranschaulichung des Begriffes ‘Divergenz’. Für ein Zentralfeld

$$\mathbf{f} = c \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r = c \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

und für eine Kugeloberfläche um den Koordinatenursprung ergab das Oberflächenintegral

$$\oint_{K_u} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi c .$$

Anhand der Divergenz dieses Feldes

$$\text{div } \mathbf{f} = c \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_1}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{x_2}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{x_3}{r^3} \right) \right\}$$

kann man feststellen: Für alle Raumpunkte außer dem Koordinatenursprung gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x_i^2}{r^5} \quad \text{für } r \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

und es folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = c \left\{ \frac{3}{r^3} - \frac{3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{r^5} \right\} = 0 .$$

Die Divergenz eines Zentralfeldes (mit punktförmiger Quelle) verschwindet im gesamten Raum, außer an dem Koordinatenursprung. Für diesen kann man zunächst keine Aussage machen.

Mit dem Satz von Gauß kann man für eine geschlossene Fläche, die den Ursprung nicht enthält, folgern

$$\oint_{S(\text{ohne})} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V(S)} dV = 0 .$$

Ein beliebiges Volumen um den Koordinatenursprung kann man in ein Kugelvolumen um den Koordinatenursprung und eine Anzahl von Teilvolumina, die den Ursprung nicht enthalten, zerlegen (Abb. 5.26). Da die Beiträge der Trennflächen sich infolge der Orientierung herausheben, folgt

$$\oint_{S(\text{mit})} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{K(\text{mit})} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} + \sum_n \oint_{S(\text{ohne})_n} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} .$$

Die Teilflächen ohne Koordinatenursprung tragen nicht bei, so dass gilt

$$\oint_{S(\text{mit})} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{K(\text{mit})} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi c .$$

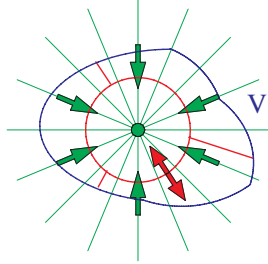


Abb. 5.26. Zerlegung einer beliebigen Fläche um einen Massenpunkt

Zu der Situation im Koordinatenursprung kann man aus der Sicht des Gaußtheorems

$$\oint_{K(\text{mit})} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V_{K(\text{mit})}} (\operatorname{div} \mathbf{f}) dV = 4\pi c$$

bemerken: Das Volumenintegral hat einen endlichen Wert, obschon $\operatorname{div} \mathbf{f}$ für alle Punkte außer dem Koordinatenursprung verschwindet. Somit kann $\operatorname{div} \mathbf{f}$ für $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ nicht verschwinden

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\operatorname{div} \mathbf{f}) \neq 0 .$$

Da jedoch der Beitrag zu dem Integral sozusagen von einem einzigen Punkt kommt, muss hier eine außergewöhnliche Situation vorliegen. In der Tat trifft man hier auf eine neue Klasse von mathematischen Objekten und man schreibt

$$\operatorname{div} \mathbf{f} \longrightarrow 4\pi c \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \quad \text{für } r \longrightarrow 0 .$$

Die ‘Funktion’ $\delta(x)$ auf der rechten Seite bezeichnet man als die (Diracsche) Deltafunktion. Sie ist jedoch keine Funktion sondern eine **Distribution**². Eine naive Vorstellung von dieser Distribution, die jedoch mathematischen Ansprüchen in keiner Weise genügt, könnte lauten: $\delta(x)$ hat an jeder Stelle außer für $x = 0$ den Wert Null. In diesem Punkt ist sie singulär (∞) und

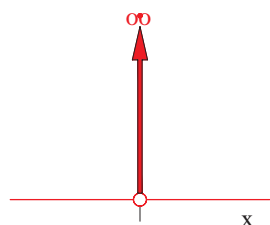


Abb. 5.27. Naive Illustration der δ -Funktion

zwar so, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \, dx = 1$$

den Wert 1 hat (Abb. 5.27). Offensichtlich kann man solche Objekte mathematisch sauber nur durch eine Erweiterung des Funktionsbegriffes fassen.

Unabhängig von diesen Bemerkungen gilt es festzuhalten: Für eine Punktquelle (ein Zentralfeld) gilt

$$\left. \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{f} = 0 & \text{für } \mathbf{r} \neq 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{f} \neq 0 & \text{für } \mathbf{r} = 0 \end{array} \right\} \quad \operatorname{div} \mathbf{f} = 4\pi c \delta(\mathbf{r}) .$$

Der Punkt, in dem die Feldquelle (oder Senke), ein Massenpunkt oder eine Punktladung, sitzt, ist durch $\operatorname{div} \mathbf{f} \neq 0$, der restliche Raum durch $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$

² Distributionen werden in Band 2 Math. Kap. 1 eingehender besprochen.

charakterisiert. Die Divergenz des Vektorfeldes beschreibt somit die Verteilung der Quellen des Feldes in differentieller Form. Über das Gaußtheorem gewinnt man eine entsprechende Aussage in Integralform, in der Form von Oberflächenintegralen über geschlossene Flächen. Alle Oberflächenintegrale, die den Quellpunkt einschließen, ergeben $4\pi c$, also Raumwinkel mal ‘Quellstärke’.

Man kann diesen Tatbestand etwas allgemeiner fassen. Man legt um einen Punkt des felderfüllten Raumes ein infinitesimales Volumen ΔV . Aus dem Divergenztheorem folgt dann

$$\iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dV = \oiint_{S(\Delta V)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

oder im Sinne eines Grenzwertes

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta V} \oiint_{S(\Delta V)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} \right\}.$$

Die Divergenz des Vektorfeldes hat die Dimension Feldfluss pro Volumen. Da es sich um einen Nettofluss handelt, kann man diese Flussdichte auch als Quelldichte bezeichnen. Positive Quelldichte in einem Punkt entspricht einer echten Quelle, negative Quelldichte entspricht einer Senke.

Entsprechende Aussagen gelten nicht nur für ‘Punktquellen’ sondern auch für ausgedehnte Quellen. Zum Beweis berechnet man zunächst in direkter Weise das Gravitationsfeld einer Kugel mit homogener (aus makroskopischer Sicht) Massenverteilung

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}.$$

Die Masse ist (siehe Math.Kap. 4.3)

$$M = \iiint_{K_u} \rho(\mathbf{r}) \, dV = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R^3.$$

Zur Berechnung des Gravitationsfeldes unterteilt man das Volumen in infinitesimale Volumenelemente dV' an der Stelle \mathbf{r}' (Abb. 5.28a). Der Beitrag dieses Volumenelementes zu dem Gravitationsfeld an der Stelle \mathbf{r} ist

$$d\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{\rho_0 dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Die Beiträge aller Massenelemente sind dann im Sinne einer Grenzwertbetrachtung zu addieren.

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\gamma \rho_0 \iiint \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Es sind drei (!) Volumenintegrale zu berechnen. Bevor man sich an deren explizite Berechnung macht, ist die folgende Überlegung nützlich: Zu jedem Volumenelement an der Stelle \mathbf{r}' gibt es ein diametral gelegenes, das in dem Punkt \mathbf{r} einen gleich großen Beitrag liefert. Die Vektorsumme der

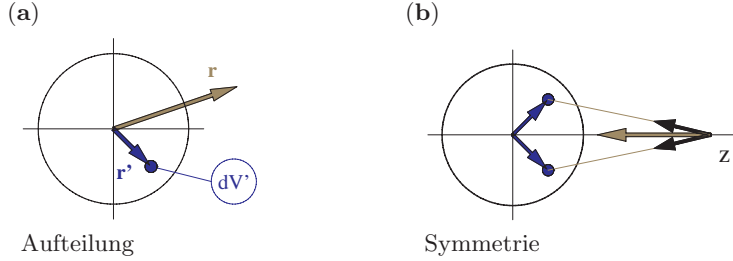


Abb. 5.28. Berechnung eines Gravitationsfeldes einer Kugel mit homogener Massenverteilung

Feldbeiträge der beiden Volumenelemente ist ein Vektor in Radialrichtung (Abb. 5.28b). Das Gravitationsfeld der homogenen Massenverteilung mit einer Kugelgestalt ist ein Radialfeld. Explizite Integration ergibt

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\gamma \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r & r \geq R \\ -\gamma \frac{M}{R^3} r \mathbf{e}_r & r \leq R \end{cases}.$$

Die folgende, explizite Auswertung kann übersprungen werden (weiter auf S. 203).

Es erscheint nützlich die Rechenschritte, die zu diesem Ergebnis führen, in einigem Detail anzugeben, da sie als Muster für ähnliche Auswertungen dienen können. Zur Berechnung von

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\gamma \rho_0 \iiint \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

kann man infolge der Symmetrie den Feldpunkt auf die z -Achse legen, so dass für den Feldpunkt \mathbf{r} und die Integrationsvariable \mathbf{r}' die Aussagen gelten

$$\mathbf{r} = (0, 0, z)$$

$$\mathbf{r}' = (r' \cos \varphi' \sin \theta', r' \sin \varphi' \sin \theta', r' \cos \theta')$$

und

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \left(r'^2 + z^2 - 2r'z \cos \theta \right)^{1/2}.$$

Wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' = \int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi' = 0$$

folgt

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -2\pi\gamma\rho_0 I \mathbf{e}_z$$

mit

$$I = \int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 \frac{(z - r'x) dx}{(z^2 + r'^2 - 2r'zx)^{3/2}},$$

wobei $\cos \theta' = x$ substituiert wurde. Zur Berechnung des inneren Integrals sind die Schritte notwendig

$$\begin{aligned} I(r', z) &= \int_{-1}^1 \frac{(z - r'x) dx}{(z^2 + r'^2 - 2r'zx)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2r'z^2} \left\{ (z^2 - r'^2) \left[\frac{1}{(z^2 + r'^2 - 2r'z)^{1/2}} - \frac{1}{(z^2 + r'^2 + 2r'z)^{1/2}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[(z^2 + r'^2 - 2r'z)^{1/2} - (z^2 + r'^2 + 2r'z)^{1/2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Mit den Fallunterscheidungen

$$\begin{aligned} z > r' & \quad I(r', z) = \frac{2}{z^2} \\ z < r' & \quad I(r', z) = 0 \end{aligned}$$

erhält man für $z > R$

$$I = \frac{2}{z^2} \int_0^R r'^2 dr' = \frac{2}{3} \frac{R^3}{z^2}$$

und

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3 \gamma \frac{1}{z^2} \mathbf{e}_z = -\gamma M \frac{1}{z^2} \mathbf{e}_z,$$

für $z < r'$

$$I = \frac{2}{z^2} \int_0^z r'^2 dr' = \frac{2}{3} z$$

und

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{3} \rho_0 \gamma z \mathbf{e}_z = -\gamma M \frac{z}{R^3} \mathbf{e}_z.$$

Infolge der Symmetrie kann z wieder durch r und \mathbf{e}_z durch \mathbf{e}_r ersetzt werden.

Die Feldstärke wächst zunächst linear mit r und fällt dann wie $1/r^2$ ab (Abb. 5.29). Das Feld einer homogenen Kugel unterscheidet sich im Außen-



Abb. 5.29. Radiale Variation des Gravitationsfeldes einer Kugel mit homogenen Massenverteilung

bereich nicht von dem Feld einer gleich großen Punktmasse, die im Zentrum angebracht ist. Für die Divergenz dieses Gravitationsfeldes erhält man

$$\operatorname{div} \mathbf{G} = \sum_i \frac{\partial G_i}{\partial x_i} = \begin{cases} 0 & r > R \\ -3\gamma \frac{M}{R^3} & r \leq R, \end{cases}$$

bzw. wenn man für den Fall $r \leq R$ die Masse einsetzt

$$\operatorname{div} \mathbf{G} = \sum_i \frac{\partial G_i}{\partial x_i} = \begin{cases} 0 & r > R \\ -4\pi\gamma\rho_0 & r \leq R \end{cases}.$$

Dies hat wieder die Form Raumwinkel mal Quelldichte und man kann feststellen: Für alle Raumpunkte, an denen Feldquellen (Masse) sitzen, ist $\operatorname{div} \mathbf{G} \neq 0$. Für alle Raumpunkte an denen sich keine Feldquellen befinden, ist $\operatorname{div} \mathbf{G} = 0$. Die Divergenz des Feldes beschreibt die Verteilung der Feldquellen und deren Stärke ($-4\pi\gamma\rho_0$). Die Tatsache, dass eine Quellenverteilung mit scharfem Rand vorliegt, äußert sich in einem Sprung von $\operatorname{div} \mathbf{G}$ (Abb. 5.30).

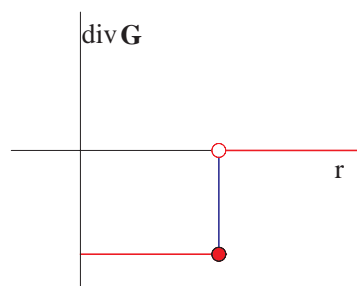


Abb. 5.30. Illustration der Divergenz des Gravitationsfeldes einer Kugel mit homogener Massenverteilung

Das zweite zentrale Integraltheorem der Vektoranalysis ist das **Theorem von Stokes**. Es führt unter anderem zu einer gewissen, anschaulichen Interpretation des Begriffes der Rotation eines Vektorfeldes. Das Theorem lautet

Ist eine Vektorfunktion $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3)$ auf einer offenen Fläche S mit einem orientierten Rand $K(S)$ definiert und stetig differenzierbar, so gilt

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{K(S)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} .$$

Das Oberflächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes ist gleich dem Kurvenintegral über den orientierten Rand von S (Abb. 5.31a). Die Orientierung des Randes und die Orientierung der Flächenelemente $d\mathbf{S}$, sind gemäß dem Zerlegungssatz über die Rechte-Hand-Regel (oder Schraubenregel) verknüpft (Abb. 5.31b).

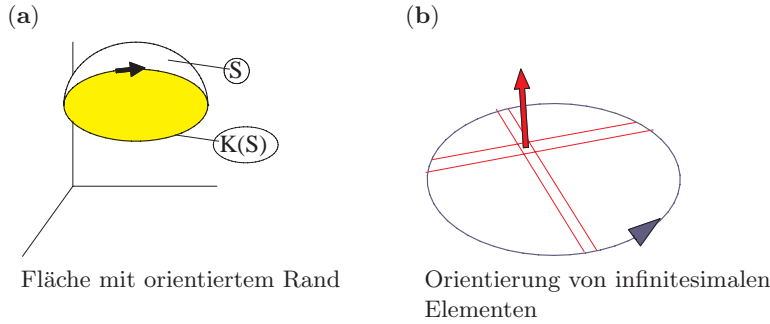


Abb. 5.31. Zum Satz von Stokes

Der Beweis dieses Theorems folgt dem Muster des Beweises des Divergenztheorems. Da jedoch hier in beiden Integralen Skalarprodukte von Vektoren auftreten, sind die Details etwas langwieriger.

Man zerlegt zunächst die Fläche S (orientiert durch die Randkurve) in Teilbereiche (Abb. 5.32). Für jeden Teilbereich gilt

$$I_i = \oint_{R_i} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} .$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^n I_i = \oint_{K(S)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} ,$$

da sich die Beiträge über die Trennkurven herausheben, und entsprechend bei beliebig feiner Unterteilung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n I_i = \oint_{K(S)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

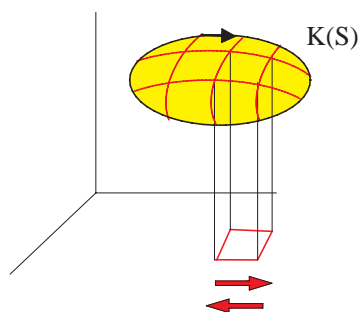
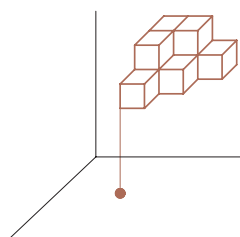


Abb. 5.32. Beweis des Stokeschen Satzes: Zerlegung und Projektion

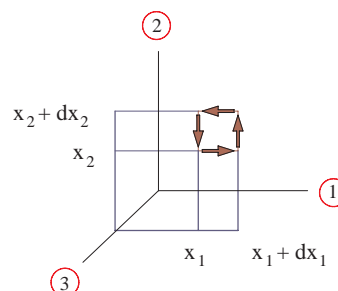
In einem zweiten Schritt betrachtet man eine (genügend feine) Zerlegung der gekrümmten Teilbereiche in infinitesimale Bereiche parallel zu den Koordinatenebenen (Abb. 5.33a). Man erhält auf diese Weise z.B. für die Beiträge

(a)



Zerlegung, räumlich

(b)



Projektion eines Elementes

Abb. 5.33. Beweis des Stokeschen Satzes

parallel zur 1-2 Ebene (Abb. 5.33b)

$$\begin{aligned} I_i(1,2) = & \int_{x_1}^{x_1+dx_1} f_1(x'_1, x_2, x_3) dx'_1 + \int_{x_2}^{x_2+dx_2} f_2(x_1+dx_1, x'_2, x_3) dx'_2 \\ & + \int_{x_1+dx_1}^{x_1} f_1(x'_1, x_2+dx_2, x_3) dx'_1 + \int_{x_2+dx_2}^{x_2} f_2(x_1, x'_2, x_3) dx'_2. \end{aligned}$$

Dies wird gemäß

$$I_i(1, 2) = \int_{x_2}^{x_2+dx_2} dx'_2 \int_{x_1}^{x_1+dx_1} dx'_1 \frac{\partial}{\partial x'_1} f_2(x'_1, x'_2, x_3) \\ - \int_{x_1}^{x_1+dx_1} dx'_1 \int_{x_2}^{x_2+dx_2} dx'_2 \frac{\partial}{\partial x'_2} f_1(x'_1, x'_2, x_3)$$

sortiert und in der Form

$$I_i(1, 2) = \iint_{B_{i,3}} (\operatorname{rot} \mathbf{f})_3 \, dS_3$$

zusammengefasst. Der Bereich $B_{i,3}$ ist die Projektion von B_i auf die 1-2 Ebene. Summation aller solcher parallelen Beiträge in dieser Koordinatenebene ergibt

$$\sum_i I_i(1, 2) = \iint_{B_3} (\operatorname{rot} \mathbf{f})_3 \, dS_3 ,$$

wobei der Bereich B_3 die Projektion von S auf die 1-2 Ebene ist. Entsprechendes zeigt man für die Bereiche parallel zur 2-3 und 1-3 Ebene

$$\sum_i I_i(2, 3) = \iint_{B_1} (\operatorname{rot} \mathbf{f})_1 \, dS_1$$

$$\sum_i I_i(1, 3) = \iint_{B_2} (\operatorname{rot} \mathbf{f})_2 \, dS_2 .$$

Insgesamt gilt somit

$$\sum_i I_i = \oint_{K(S)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{S} .$$

Eine Erweiterung des Theorems ist für Anwendungen in der Physik nützlich. Man betrachtet nicht nur die Situation, dass die Vektorfunktion \mathbf{f} auf der Fläche S definiert und stetig differenzierbar ist, sondern die Variante (Abb. 5.34): Ist eine Vektorfunktion in einem Raumgebiet G definiert und stetig differenzierbar, so gilt für jede Fläche S_i , die ganz in G liegt und die die gleiche, orientierte Randkurve K besitzt,

$$\oint_K \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \dots \\ = \iint_{S_i(K)} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} .$$

Diese Variante des Theorems von Stokes beinhaltet den in Math.Kap. 5.3.1 diskutierten Zusammenhang zwischen $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$ und der Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen.

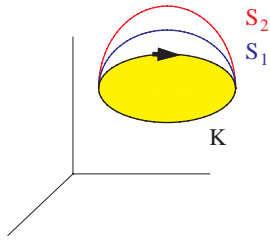


Abb. 5.34. Flächen mit gleicher orientierter Randkurve

- (a) Ist in dem gesamten Gebiet $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$, so folgt für jede geschlossene Kurve in dem Gebiet

$$\oint_K \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

- (b) Ist $\oint_K \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ für eine geschlossene Kurve in G , so folgt $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$ in dem gesamten Gebiet, da laut Theorem die Oberflächenintegrale für alle Flächen mit dem Rand K verschwinden.

Um eine anschauliche Deutung des Begriffes $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ herauszuarbeiten, kann man in einem ersten Schritt die folgenden zwei Beispiele gegenüberstellen: Für ein zylindersymmetrisches Vektorfeld der Form

$$\mathbf{f} = (xg(\rho), yg(\rho), 0) \quad \rho = [x^2 + y^2]^{1/2}$$

ist das Feldlinienbild zentralsymmetrisch für jede Ebene parallel zur x - y Ebene (Abb. 5.35a). Berechnet man die Rotation dieses Feldes

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xg & yg & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z (yg_x - xg_y),$$

so stellt man mit Hilfe der Kettenregel

$$g_x = \frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} g_\rho \quad g_y = \frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} g_\rho$$

fest, dass $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ für jeden Punkt des Raumes verschwindet ($\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$). Das Theorem von Stokes besagt dann: Das Kurvenintegral verschwindet für jede beliebige geschlossene Kurve (sowohl um die z -Achse, als auch ohne Einschluss der z -Achse). Für den Fall eines Kreises um die z -Achse kann man dies leicht nachrechnen. Mit der Parameterdarstellung

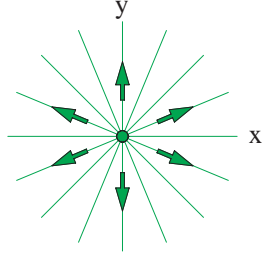
$$x = R \cos t \quad y = R \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

der Kurve (als Orientierung der Randkurve wurde (willkürlich) ‘gegen den Uhrzeigersinn’ gewählt) findet man

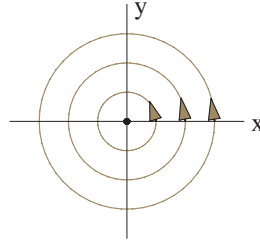
$$\oint_{\text{Kreis}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = R^2 g(R) \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t) dt = 0.$$

Diese Antwort ergibt sich natürlich auch aus der Überlegung, dass in diesem Fall \mathbf{f} immer senkrecht auf $d\mathbf{r}$ steht.

(a)

Radial von der z -Achse

(b)

Konzentrisch um die z -Achse**Abb. 5.35.** Zwei zylindersymmetrische Vektorfelder

Die Feldlinien des Vektorfeldes

$$\mathbf{f} = (-yg(\rho), xg(\rho), 0) .$$

das für $g = 1/\rho^2$ dem oben erwähnten Magnetfeld B entspricht, sind konzentrische Kreise um die z -Achse (Abb. 5.35b). Für die Rotation des Feldes berechnet man in diesem Fall

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -yg & xg & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z(g + xg_x + g + yg_y) ,$$

bzw. nach Einsetzen von g_x und g_y wie in dem ersten Beispiel

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{e}_z(2g + \rho^2 g_\rho) .$$

Die Rotation des Vektorfeldes verschwindet im Allgemeinen nicht, es sei denn g ist eine Funktion mit besonderem singulären Verhalten für Punkte der z -Achse

$$g_\rho = -\frac{2}{\rho^2}g \quad \rightarrow \quad g = c/\rho^2 .$$

Das Theorem von Stokes besagt dann

$$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \neq 0 .$$

Für einen Kreis um die z -Achse, der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird, erhält man

$$\oint_{\text{Kreis}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = R^2 g(R) \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi R^2 g(R) .$$

Ein Kurvenintegral über dieses Vektorfeld ist außerdem wegababhängig. Ist die Kurve z.B. ein Quadrat der Seitenlänge $2R$ um die z -Achse (Abb. 5.36), mit gleichem Umlaufsinn, so erhält man mit der Parameterdarstellung

$$\left. \begin{array}{ll} x = R & y = t \\ x = -t & y = R \\ x = -R & y = -t \\ x = t & y = -R \end{array} \right\} \quad -R \leq t \leq R$$

das Resultat

$$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 4R \int_{-R}^R g(\sqrt{R^2 + t^2}) dt.$$

Ohne weitere Vorgabe von $g(\rho)$ lässt sich das Integral nicht berechnen. Für das Magnetfeld mit $g = 1/\rho^2$ folgt z.B.

$$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 8R \arctan R \neq \oint_{\text{Kreis}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

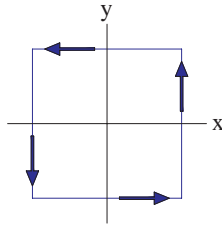


Abb. 5.36. Eine Integrationskurve für zylindersymmetrische Vektorfelder

Die Gegenüberstellung der beiden Beispiele deutet eine mögliche Interpretation der Größe $\text{rot } \mathbf{f}$ an: Die Rotation beschreibt das Auftreten von geschlossenen Feldlinien, oder (in anderen Worten) das Auftreten von Wirbeln im Feld. Das Feld des ersten Beispiels hat keine Wirbel, $\text{rot } \mathbf{f}$ verschwindet. Das zweite Beispiel stellt ein einfaches Wirbelfeld dar.

Das Theorem von Stokes kann zu der folgenden formalen Definition des Begriffes ‘Rotation’ benutzt werden: Man legt um einen Punkt des felderfüllten Raumes eine infinitesimale Schleife mit der Fläche ΔS . Das Theorem liefert dann die Grenzwertaussage

$$(\text{rot } \mathbf{f})_{\text{Normal}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta S} \oint_{K(\Delta S)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \right\}.$$

Wegen des Auftretens des Skalarproduktes von $\text{rot } \mathbf{f}$ und ΔS , ergibt dessen Auflösung die Komponenten von $\text{rot } \mathbf{f}$ in der Normalenrichtung, die der Richtung von ΔS entspricht (Abb. 5.37). Das hier auftretende Kurvenintegral

bezeichnet man auch als die **Zirkulation** des Vektorfeldes. Die Rotation hat demnach die Bedeutung Zirkulation pro Fläche oder spezifische Zirkulation. Im Grenzfall spricht man auch von der Wirbeldichte.

Auch das Theorem von Stokes hat unter Umständen praktischen Wert, denn

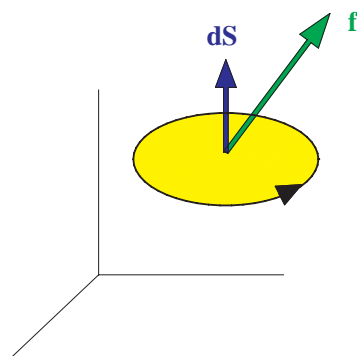


Abb. 5.37. Zur Definition des Begriffes der Rotation

es verknüpft Oberflächenintegrale von $(\text{rot } \mathbf{f})$ mit Kurvenintegralen von \mathbf{f} . Doch ist es wegen der komplizierteren Struktur der Oberflächenintegrale nicht so nützlich wie das Gaußtheorem. Das Theorem ermöglicht es aber, einen Zusammenhang zwischen verschiedenen Methoden zur Berechnung von ebenen Flächen herzustellen.

- (a) Eine Methode, die bei der Diskussion des Flächensatzes (Buch.Kap. 2.2.1) gewonnen wurde, bestimmt eine ebene Fläche durch Abfahren des Randes der Fläche mittels einer Parameterdarstellung der Randkurve (Abb. 5.38a)

$$F_1 = \frac{1}{2} \oint_K (x\dot{y} - y\dot{x}) dt .$$

- (b) Bei der Diskussion von Integralen mit Funktionen von zwei Veränderlichen (Math.Kap. 4.3.2) wurden ebene Flächen durch Zerlegung in infinitesimale Bereiche wie z.B. Rechtecke berechnet (Abb. 5.38b)

$$F_2 = \iint_B dx dy .$$

Ein Zusammenhang zwischen diesen beiden Methoden ergibt folgendes Argument: Schreibe den Integranden im Fall (a) als

$$F_1 = \oint_K \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{mit} \quad \mathbf{f} = \left(-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x, 0 \right) .$$

Berechne $\text{rot } \mathbf{f}$ für diese Feldfunktion

$$\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{e}_z .$$

Mit dem Satz von Stokes folgt dann

$$\oint_K \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S(K)} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S(K)} 1 \cdot d\mathbf{S}_z = \iint_{S(K)} dx dy.$$

Der Satz von Stokes verknüpft die beiden Möglichkeiten für die Berechnung von ebenen Flächen in eleganter Weise. Die Diskussion dieser Grundkonzepte

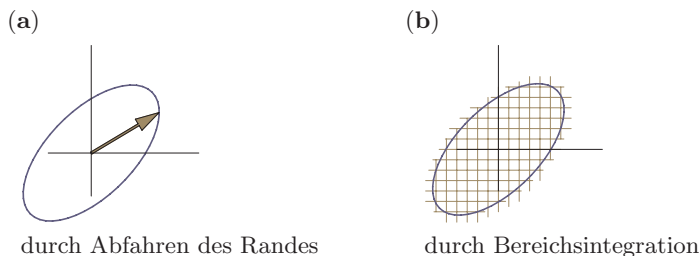


Abb. 5.38. Flächenberechnung

te der Vektoranalysis kann man folgendermaßen zusammenfassen: Für ein vorgegebenes Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y, z)$ erhält man durch Betrachtung der Größen $\operatorname{div} \mathbf{f}$ (eine skalare Größe) und $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ (eine Vektorgröße) eine Vorstellung von der Struktur des Feldes. Die Divergenz beschreibt die Verteilung der Quellen/Senken, die Rotation beschreibt das Auftreten von Wirbeln. Umgekehrt kann man diese Größen für eine pauschale Klassifikation von Vektorfeldern benutzen.

- (1) Ein Feld \mathbf{f} , für das $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ gilt, bezeichnet man als quellenfrei oder solenoidal. Ein Paradebeispiel ist das Magnetfeld.
- (2) Ein Feld \mathbf{f} , für das $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$ gilt, bezeichnet man als wirbelfrei. Beispiele sind die Felder der Elektrostatik oder die konservativen Kraftfelder der Mechanik.
- (3) Ein Feld \mathbf{f} , für das $\operatorname{rot} \mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ ist, bezeichnet man als ein **Vortexfeld**.

Zwei Möglichkeiten, diese Diskussion zu erweitern, sollen zum Schluss, ohne weitere Details, erwähnt werden:

- Es gibt einige Varianten der beiden Integralsätze, die unter dem Namen **Integralsätze von Green**³ bekannt sind.
- Die Betrachtungen haben sich ausschließlich auf die Situation

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (f_1, f_2, f_3)$$

(d.h. ein Vektorfeld mit $m = n = 3$) beschränkt. Die Ausführungen lassen sich jedoch auf den Fall beliebiger Dimensionen (mit $m = n$) erweitern

$$\mathbf{f}(x_1 \dots x_n) = (f_1(x_1 \dots x_n), f_2(x_1 \dots x_n) \dots f_n(x_1 \dots x_n)).$$

³ Diese werden im Rahmen des Bandes 2 besprochen.

Der Gradientenoperator ist dann

$$\nabla = \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Der Begriff der Divergenz und das Divergenztheorem lassen sich in einfacher Weise übertragen. Die Verallgemeinerung des Begriffes Rotation und des Zirkulationstheorems sind auf der anderen Seite deutlich aufwendiger, wenn auch machbar. Solche Erweiterungen sind z.B. bei der Diskussion der (speziellen) Relativitätstheorie von Interesse. In diesem Fall ist die Dimension des Raumes $n = 4$, der Raum ist jedoch nichteuklidisch.

6 Differentialgleichungen II

In diesem Kapitel wird dieses für die theoretische Physik wichtige Thema weiter ausgebaut. Neben einer Fortsetzung der Übersicht über diesen Themenkreis werden in der Hauptsache Lösungsmethoden für ausgewählte Typen von Differentialgleichungen, die in der Anwendung eine besondere Rolle spielen, vorgestellt.

6.1 Weitere Orientierung

Die allgemeine Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung für eine Funktion einer Variablen $x = x(t)$ kann man durch eine implizite Gleichung zum Ausdruck bringen¹

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0 .$$

Für die Lösung (Integration) der Differentialgleichung bestehen die folgenden Optionen:

- Sucht man irgendeine Funktion, die die Differentialgleichung erfüllt, so spricht man von einer speziellen oder Partikulärlösung.
- In der Physik sucht man im Normalfall nach einer Lösung der Differentialgleichung, die zusätzliche Bedingungen erfüllt (Funktionswerte oder Ableitungen sind für bestimmte t -Werte vorgegeben). Je nach Situation liegt eine Anfangswertaufgabe, eine Randwertaufgabe oder eine Anfangs-Randwertaufgabe vor.
- Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist die allgemeinst mögliche Funktion, die die Differentialgleichung erfüllt. Wie in Math.Kap. 2.1 angedeutet, enthält die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung n Integrationskonstanten. Offensichtlich erlaubt die Kenntnis der allgemeinen Lösung die Beantwortung der in der zweiten Option angesprochenen Aufgaben.

Einige weitere, willkürlich gewählte Beispiele sollen die Vielfalt der Möglichkeiten noch einmal unterstreichen

¹ Die Schreibweise für die Ableitungen erster, zweiter bzw. n -ter Ordnung ist auch in diesem Kapitel $x', x'', \dots, x^{(n)}$.

1. Die Differentialgleichung der Exponentialfunktion $x' = kx$, mit einer vorgegebenen Konstanten k .
2. Die allgemeine Oszillatorgleichung $x'' + ax' + bx + c = f(t)$, mit den Konstanten a, b, c und einer vorgegebenen Funktion $f(t)$.
3. Die Differentialgleichung der konfluenten, hypergeometrischen Funktion $tx'' + (c - t)x' - ax = 0$, mit Konstanten a, c . Diese Funktion ist eine der speziellen (d.h. nichtelementaren) Funktionen der mathematischen Physik (siehe Math.Kap. 6.3.3 für einige Bemerkungen zu dem Thema spezielle Funktionen).
4. Die Differentialgleichung eines belasteten Balkens $x^{(4)} = f(t)$, wobei die Funktion $f(t)$ die variable Belastung in der Horizontalen (Variable t) und $x(t)$ die Durchbiegung beschreibt.
5. Ein Phantasieprodukt $(x^{(3)})^2 + (x'')^4 + (\sin t)x' - x^5 = 0$,
6. sowie ein weiteres $e^{x'} = 1 + t$.

Zur Grobklassifikation kann man unter Umständen neben dem Begriff der Ordnung einer Differentialgleichung (siehe Math.Kap. 2.1) den Begriff **Grad** einer Differentialgleichung benutzen, und zwar dann, wenn die Differentialgleichung als Polynom in den Ableitungen geschrieben werden kann. Die Potenz der höchsten, auftretenden Ableitung bezeichnet man als den Grad der Differentialgleichung. Die Standardform einer Differentialgleichung, die durch Angabe eines Grades charakterisiert werden kann, ist

$$f_1(x, t)(x^{(n)})^{n_1} + f_2(x, t)(x^{(n-1)})^{n_2} + \dots + f_{n+1}(x, t) = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung n -ter Ordnung und n_1 -ten Grades. Für die oben aufgeführten Differentialgleichungen lautet die Grobklassifikation

Beispiel :	1	2	3	4	5	6
Ordnung :	1	2	2	4	3	1
Grad :	1	1	1	1	2	1

Der einzige Punkt, der eventuell zu kommentieren ist, ist die Gradangabe für das Beispiel 6. Durch Logarithmieren kann man diese Differentialgleichung in $x' = \ln(1 + t)$ umschreiben.

Hängt die zu bestimmende Funktion von mehreren Variablen ab

$$x = x(t_1, t_2, \dots, t_n),$$

so liegt eine **partielle Differentialgleichung** vor. Die allgemeine implizite Form enthält die Variablen, die Funktion und deren partielle Ableitungen

$$F(t_1, \dots, t_n; x; x_{t_1}, \dots, x_{t_n}; x_{t_1 t_1}, x_{t_1 t_2}, \dots) = 0.$$

Die Aufgabe ist auch hier die Bestimmung der Funktion x aufgrund der vorgegebenen Differentialgleichung. Die Ausführung dieser Aufgabe ist im

Allgemeinen schwieriger als die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Doch muss man feststellen, dass viele der grundlegenden Differentialgleichungen der theoretischen Physik (Maxwellgleichungen, Schrödingergleichung, ...) partielle Differentialgleichungen sind. Zwei Beispiele aus der Mechanik sind die Wellengleichung (siehe Buch.Kap. 6.1) und die **Poisson-gleichung** der Potentialtheorie

$$\Delta V(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi\rho(\mathbf{r}) .$$

Die Aufgabe, die mit der Poissongleichung gestellt wird, lautet: Bestimme die Potentialfunktion $V(\mathbf{r})$ einer vorgegebenen Massenverteilung, die durch die Dichtefunktion $\rho(\mathbf{r})$ charakterisiert wird. Die Diskussion der Lösung von partiellen Differentialgleichungen wird in Band 2 aufgegriffen.

Weitere Varianten unter dem Stichwort Differentialgleichungen, die in der mathematischen Physik eine Rolle spielen, sind:

- **Systeme von Differentialgleichungen** Ein Satz von Funktionen von einer Veränderlichen $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ kann durch einen Satz von Differentialgleichungen charakterisiert werden

$$\begin{aligned} F_1(t; x_1, \dots, x_n; x'_1 \dots x'_n; x''_1 \dots) &= 0 \\ &\vdots \\ F_k(t; x_1, \dots, x_n; x'_1 \dots x'_n; x''_1 \dots) &= 0 , \end{aligned}$$

im Allgemeinen mit $k = n$. Ein relevantes Beispiel sind Newton's Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt in der dreidimensionalen Welt

$$m\ddot{x}_i = F_i(t; x_1, x_2, x_3; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \quad i = 1, 2, 3 ,$$

mit der vektoriellen Abkürzung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) .$$

Eine Aussage, die mit Nutzen bei Beweisführungen und bei numerischen Anwendungen angewandt werden kann, ist: Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung kann immer in einen Satz von n Differentialgleichungen erster Ordnung umgeschrieben werden und umgekehrt. So kann man z.B. aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(t, x, x', x'') = 0$ mit den Ersetzungen $x = x_1$ und $x' = x_2$ das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$x'_1 = x_2 \quad F(t, x_1, x_2, x'_2) = 0$$

gewinnen.

- **Integralgleichungen** Ein typisches Beispiel für eine Integralgleichung ist

$$x(t) = f(t) + \int_0^t K(t, \tilde{t}) x(\tilde{t}) d\tilde{t} .$$

Die Funktion $f(t)$ und der ‘Integralkern’ $K(t, t')$ sind vorgegeben, zu bestimmen ist die Funktion $x(t)$, die auch unter dem Integralzeichen auftritt. In Analogie zu der Verwandtschaft von Differentiation und Integration besteht ein entsprechender Zusammenhang zwischen Differentialgleichungen und Integralgleichungen, der sowohl formale als auch praktische Bedeutung hat.

- **Integrodifferentialgleichungen** sind dadurch charakterisiert, dass in einer Integralgleichung neben der gesuchten Funktion auch deren Ableitungen auftritt. Die Ableitungen können sowohl auf der linken Seite als auch unter dem Integralzeichen stehen, wie in dem folgenden Beispiel

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(t) + \int_0^t \left(K_1(t, \tilde{t}) x(\tilde{t}) + K_2(t, \tilde{t}) \frac{dx(\tilde{t})}{d\tilde{t}} \right) d\tilde{t}$$

angedeutet wird.

- Eine letzte Variante sind **Differenzen-Differentialgleichungen**, die anhand eines konkreten Beispiels vorgestellt werden sollen. Die Differentialgleichung der Exponentialfunktion

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t) \quad \text{mit der Lösung} \quad x(t) = ce^{kt}$$

beschreibt ein besonderes Wachstums- oder Zerfallsgesetz. Die Aussage, die dieses spezielle Gesetz charakterisiert, lautet: Die Änderung der Größe x ist proportional zu der Größe zu dem Zeitpunkt t . Betrachtet man jedoch die Differentialgleichung

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t - \tau) \quad \text{mit} \quad \tau = \text{const.},$$

so findet man eine grundverschiedene Lösungsstruktur vor. Die relativ einfache Variation: Die zeitliche Änderung von $x(t)$ ist proportional zu der Größe zu einem früheren oder späteren (für positives τ) Zeitpunkt, führt zu einer veränderten Situation. Derartige Zeitverzögerungseffekte spielen bei der Diskussion von Regelproblemen und Rückkopplungssystemen eine wesentliche Rolle.

Die weitere Diskussion in diesem Kapitel wird sich jedoch auf die Frage der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen $F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$ konzentrieren.

6.2 Differentialgleichungen erster Ordnung

Es könnte vermutet werden, dass für Differentialgleichungen erster Ordnung $F(t, x, x') = 0$ allgemeine analytische Lösungsmethoden zur Verfügung stehen. Dies ist nicht der Fall. Man kann nur bestimmte Klassen von Differentialgleichungen erster Ordnung identifizieren, für die analytische Lösungen

gewonnen werden können². Liegt eine Differentialgleichung vor, die nicht in diese Klassen eingeordnet werden kann, so ist man aller Wahrscheinlichkeit nach auf numerische Methoden angewiesen. Im Folgenden werden nur die wichtigsten, analytisch lösbaren Klassen vorgestellt. Die einfachste Differentialgleichung erster Ordnung ist ersten Grades mit der allgemeinen Form

$$f(t, x) x' + g(t, x) = 0 .$$

Es ist nützlich die Unterscheidung der abhängigen Variablen x und der unabhängigen Variablen zu unterdrücken. Um dies zu betonen, schreibt man

$$f(t, x) dx + g(t, x) dt = 0 .$$

Die Ersetzung des Differentialquotienten durch Differentiale ist mathematisch streng vertretbar (siehe Math.Kap. 2.2.1). Jedoch auch nicht alle Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades können analytisch gelöst werden. Dies ist nur möglich, wenn die Funktionen f und g spezielle Formen aufweisen. Der einfachste Fall führt auf die in Math.Kap. 2.2.1 schon diskutierte Methode der Variablentrennung, die hier etwas ausgebaut werden soll.

6.2.1 Variablentrennung und Variablentransformation

Faktorisieren die Funktionen f und g in der Form

$$f(t, x) = f_1(t) f_2(x) \quad \text{und} \quad g(t, x) = g_1(t) g_2(x) ,$$

so kann die Differentialgleichung durch direkte Integration gelöst werden

$$\int^x \frac{f_2(\tilde{x})}{g_2(\tilde{x})} d\tilde{x} + \int^t \frac{g_1(\tilde{t})}{f_1(\tilde{t})} d\tilde{t} = c .$$

Integrationskonstanten treten auf der rechten Seite nicht auf, alle Konstanten sind in c zusammengefasst.

So erhält man für die Differentialgleichung

$$x' = 1/(2xt)$$

über Variablentrennung die Lösung

$$x^2 - \ln t = c .$$

In den meisten Fällen möchte man die so entstandene implizite Form in eine explizite umschreiben, hier z.B. mit der Auflösung

$$x = \pm \sqrt{c + \ln t} .$$

² Korrekterweise sollte gesagt werden: ‘.. im Prinzip gewonnen werden können’, da man unter Umständen anstehende Integrale nicht ohne Weiteres berechnen kann. Man bezeichnet eine Differentialgleichung jedoch als gelöst, wenn man sie auf eine Quadratur zurückgeführt hat.

Die Form der Integrationskonstanten kann beliebig variiert werden. Schreibt man $c = \ln c_1$ so lautet die (völlig äquivalente) Lösung

$$x = \pm \sqrt{\ln(c_1 t)} .$$

Auflösung nach der Variablen t ergibt, bei einer anderen Umbenennung der Integrationskonstanten,

$$t = c_2 e^{x^2} .$$

Bei einer Differentialgleichung, für die die Variablen nicht getrennt werden können, ist es unter Umständen möglich, die Differentialgleichung mittels einer Variablentransformation in eine separable Form überzuführen. Die Differentialgleichung $(t+x)dt + dx = 0$, die nicht direkt separabel ist, kann mit der Transformation

$$v = t + x \quad dv = dt + dx$$

in die separable Form

$$v dt + dv - dt = 0 \quad \text{oder} \quad (v-1) dt + dv = 0$$

gebracht werden. Die implizite Lösung $t + \ln(v-1) = c$ kann nach Exponentieren über die Schritte

$$e^t(v-1) = c \quad \text{und} \quad e^t(t+x-1) = c$$

in der expliziten Form $x = ce^{-t} - t + 1$ geschrieben werden. Für das Auffinden von geeigneten Transformationen existieren keine festen Vorschriften. Man ist auf die (schwer definierbare) mathematische Intuition angewiesen.

6.2.2 Die totale Differentialgleichung

Die Differentialgleichung

$$f(t, x) dx + g(t, x) dt = 0$$

ist eine **totale (exakte) Differentialgleichung**, falls der Ausdruck das totale Differential einer impliziten Funktion von zwei Veränderlichen $z(t, x) = c$ ist. Die Frage, wie erkennt man, ob eine totale Differentialgleichung vorliegt, und die Frage, wie gewinnt man eine allgemeine Lösung, wird durch die in Math.Kap. 4.2.4 bereitgestellten Aussagen beantwortet. Die Aussagen, die hier benötigt werden, sollen noch einmal zusammengestellt werden. Für eine explizite Funktion von zwei Veränderlichen $z = z(t, x)$, die in einem Gebiet G zweimal stetig differenzierbar³ ist, gilt:

- Das totale Differential der Funktion ist

$$dz = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial x} dx .$$

³ Alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung existieren und sind stetig

- Die gemischt partiellen Ableitungen zweiter Ordnung stimmen überein (Satz von Schwarz)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} .$$

- Das Kurvenintegral

$$\int_K dz = z(t, x) - z(t_0, x_0)$$

entlang einer Kurve K , die die Punkte (t_0, x_0) und (t, x) verbindet, ist wegunabhängig.

- Die implizite Funktion $\tilde{z}(t, x) = c$ beschreibt die Höhenlinien der Funktion $z = z(t, x)$ in der t - x Ebene. Für diese Funktion gilt

$$d\tilde{z} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} dx = 0 .$$

Der Zuwachs der Funktion $z = z(t, x)$ entlang einer Höhenlinie ist Null.

Die obige Definition einer totalen Differentialgleichung impliziert, dass die Koeffizientenfunktionen der Differentialgleichung partielle Ableitungen einer Funktion $z = z(t, x)$ sind

$$g(t, x) = \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} \quad \text{und} \quad f(t, x) = \frac{\partial z(t, x)}{\partial x}$$

und dass somit die implizite Funktion $z(t, x) = c$ die allgemeine Lösung ist. Die Bedingung (**Integrabilitätsbedingung**)

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t}$$

ist eine hinreichende und notwendige Bedingung für das Vorliegen einer totalen Differentialgleichung.

Zur Bestimmung der Lösung der exakten Differentialgleichung benutzt man Kurvenintegration

$$\int_K (g(t, x) dt + f(t, x) dx) = z(t, x) - z(t_0, x_0) .$$

Da das Kurvenintegral (unter den erwähnten Voraussetzungen) wegunabhängig ist, kann man möglichst einfache Wege wählen. Gemäß Abb. 6.1 gilt für die untere achsenparallele Zerlegung

$$\int_{t_0}^t g(t, x_0) dt + \int_{x_0}^x f(t_0, x) dx = c ,$$

wobei der erste Weg bei festem x_0 parallel zur t -Achse, der zweite bei festem t parallel zur x -Achse verläuft. Alternativ kann man den oberen Weg mit

$$\int_{t_0}^t g(t, x) dt + \int_{x_0}^x f(t_0, x) dx = c ,$$

mit einer t -Integration bei festem x und einer x -Integration bei festem t_0 , wählen. Der Ausgangspunkt (t_0, x_0) kann frei gewählt werden. Ein Wechsel des Ausgangspunktes entspricht einer Umbenennung der Integrationskonstanten.

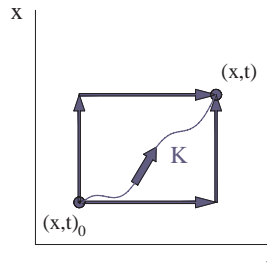


Abb. 6.1. Kurvenintegration

Die Durchführung des Lösungsprozesses ist im Allgemeinen einfacher als die obige Beschreibung vermuten lässt. Dies soll an zwei Beispielen illustriert werden. Die Differentialgleichung des ersten Beispiels ist

$$(3t^2x^2 + t^2)dt + (2t^3x + x^2)dx = 0.$$

Der erste Schritt ist die Überprüfung der Frage, ob eine exakte Differentialgleichung vorliegt, mittels der Integrabilitätsbedingung. Diese ist erfüllt, denn man findet $g_x = f_t = 6t^2x$. Der zweite Schritt ist die Durchführung der Kurvenintegration. Zur Übung sollen für dieses Beispiel einige Varianten im Detail durchgespielt werden.

Der erste Weg (Abb. 6.2) beginnt im Koordinatenursprung (oft eine gute Wahl des Anfangspunktes), verläuft zunächst entlang der t -Achse bis zu dem Punkt $(t, 0)$ und dann parallel zur x -Achse. Das entsprechende Integral

$$\int_0^t \tilde{t}^2 d\tilde{t} + \int_0^x (2t^3\tilde{x} + \tilde{x}^2) d\tilde{x} = c$$

ergibt die implizite Lösung

$$\frac{1}{3}t^3 + t^3x^2 + \frac{1}{3}x^3 = c.$$

Der zweite Weg (Abb. 6.3a) verläuft vom Ursprung entlang der x -Achse bis zu dem Punkt $(0, x)$ und dann parallel zur t -Achse bis zu dem Punkt t . Hier findet man

$$\int_0^t (3\tilde{t}^2x^2 + \tilde{t}^2) d\tilde{t} + \int_0^x \tilde{x}^2 d\tilde{x} = c$$

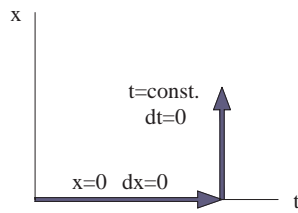


Abb. 6.2. Variation der Integrationswege: $(0, 0) \rightarrow (t, 0) \rightarrow (t, x)$

mit der gleichen Lösung wie zuvor.

In der dritten Variante wird ein ähnlicher Weg benutzt wie im ersten Fall, nur beginnt dieser Weg an der Stelle $(1, 1)$. Der Weg in Abb. 6.3b verbindet dann die Punkte $(1, 1)$, $(t, 1)$ und (t, x) mit achsenparallelen Geraden. In diesem Fall ist das Integral

$$\int_1^t 4\tilde{t}^2 d\tilde{t} + \int_1^x (2t^3\tilde{x} + \tilde{x}^2) d\tilde{x} = c_1$$

zu berechnen. Das Ergebnis

$$\left(\frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\right) + \left(t^3x^2 + \frac{1}{3}x^3 - t^3 - \frac{1}{3}\right) = c_1$$

geht mit der Umbenennung $c_1 + 5/3 = c$ ebenfalls in das vorherige über.

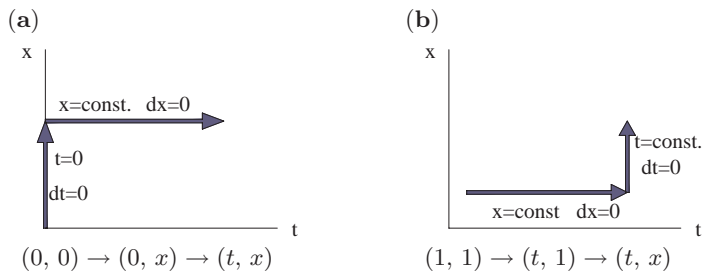


Abb. 6.3. Variation der Integrationswege

In dem zweiten Beispiel mit der Differentialgleichung

$$(x \cos t) dt + (\sin t) dx = 0$$

kann man praktisch ohne Rechnung erkennen, dass die Integrabilitätsbedingung $g_x = f_t = \cos t$ erfüllt ist. Auch die Lösung kann man hier erraten (eine durchaus akzeptable Methode). Die Frage nach der Funktion $z(t, x)$, deren partielle Ableitungen $z_t = x \cos t$ und $z_x = \sin t$ sind, kann offensichtlich mit $z = x \sin t$ beantwortet werden. Falls man die Lösung errät, ist eine Probe

angemessen. In dem vorliegenden Beispiel lautet die explizite Form der Differentialgleichung $x' = -x \cot t$. Berechnet man die Ableitung der Lösung $x = c/\sin t$, so findet man in der Tat

$$x' = -\frac{c \cos t}{\sin^2 t} = -x \cot t .$$

Noch anzumerken ist, dass Differentialgleichungen der Form

$$f(x)dx + g(t)dt = 0 ,$$

die mittels Variablentrennung gelöst werden, ein Spezialfall der exakten Differentialgleichung darstellen. Es gilt trivialerweise $f_t = g_x = 0$.

Nicht jede Differentialgleichung des angesprochenen Typs ist exakt. Es gilt jedoch die Aussage: Jede Differentialgleichung dieses Typs kann (im Prinzip) in eine exakte Differentialgleichung übergeführt werden. Diese Aussage basiert auf dem Stichwort integrierender Faktor.

6.2.3 Der integrierende Faktor

Zur Einführung der Thematik ist ein einfaches Beispiel angebracht. Die Differentialgleichung

$$t dx - x dt = 0$$

ist nicht exakt, denn es ist $f_t = 1$ und $g_x = -1$, als $f_t \neq g_x$. Die Lösung ist trotzdem einfach. Man schreibt

$$\frac{dx}{x} - \frac{dt}{t} = 0$$

und erhält $\ln x - \ln t = c_1$ oder (nach Umbenennung der Integrationskonstanten) $x = ct$. Betrachtet man das totale Differential der Lösung in impliziter Form

$$d\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t} dx - \frac{x}{t^2} dt = \frac{1}{t^2} (t dx - x dt) = 0 ,$$

so kann man feststellen, dass man die Differentialgleichung auch hätte lösen können, indem man sie zunächst mit $1/t^2$ multipliziert. Die resultierende Differentialgleichung

$$\frac{1}{t} dx - \frac{x}{t^2} dt = 0$$

ist exakt ($f_t = g_x = -1/t^2$) und könnte durch Kurvenintegration gelöst werden. Die Funktion $u(t) = 1/t^2$ bezeichnet man als einen **integrierenden Faktor** der vorgelegten Differentialgleichung. Es existiert jedoch nicht nur ein integrierender Faktor, sondern beliebig viele. Schreibt man die Lösung in der Form $t/x = c_2$, so findet man wegen

$$d\left(\frac{t}{x}\right) = -\frac{t}{x^2} dx + \frac{1}{x} dt = -\frac{1}{x^2} (t dx - x dt) = 0 ,$$

dass $u(x) = -1/x^2$ ein integrierender Faktor ist. Eine dritte Möglichkeit gewinnt man z.B. mit der modifizierten, impliziten Lösung

$$\arctan \frac{x}{t} = c_3 \quad \text{mit} \quad d\left(\arctan \frac{x}{t}\right) = \frac{1}{(x^2 + t^2)} (t dx - x dt) = 0.$$

Die Funktion $u(t, x) = 1/(x^2 + t^2)$ ist gleichfalls ein integrierender Faktor. Beliebige weitere Varianten sind möglich.

Im allgemeinen Fall argumentiert man in der folgenden Weise. Man betrachtet die Differentialgleichung

$$u(t, x) f(t, x) dx + u(t, x) g(t, x) dt = 0$$

und versucht den integrierenden Faktor so zu wählen, dass

$$\frac{\partial(u(t, x) f(t, x))}{\partial t} = \frac{\partial(u(t, x) g(t, x))}{\partial x}$$

ist. Diese Forderung entspricht einer partiellen Differentialgleichung für die Funktion u

$$f(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - g(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = u(t, x) (g_x(t, x) - f_t(t, x)).$$

An dieser Stelle wird die Aussage ‘im Prinzip’ deutlich: Man kann zeigen, dass (bei geeigneten Voraussetzungen an die Funktionen f und g) eine Lösung der partiellen Differentialgleichung existiert. Man kann die partielle Differentialgleichung auch für eine Reihe von Grundtypen lösen, doch führt die Verlagerung des Problems nicht unbedingt zum Ziel.

Es ist noch ein Spezialfall von Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades zu diskutieren, die lineare Differentialgleichung.

6.2.4 Lineare Differentialgleichung

Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$$

kann über das Superpositionsprinzip gewonnen werden⁴. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung setzt sich aus einer allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zusammen

$$x_i(t, c) = x_h(t, c) + x_p(t).$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung erhält man durch Variablentrennung

⁴ Wie in Math.Kap. 2.2.2 angedeutet wurde, kann man alle generellen Aussagen für die dort diskutierte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung auf den Fall der linearen Differentialgleichungen n -ter Ordnung übertragen.

$$\frac{dx}{x} + a(t) dt = 0 \quad \text{liefert} \quad \ln x + \int^t a(\tilde{t}) d\tilde{t} = c_1$$

oder nach Auflösung und Umbenennung der Integrationskonstanten

$$x_h(t, c) = c \exp \left[- \int^t a(\tilde{t}) d\tilde{t} \right] .$$

Die noch benötigte spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung kann man in einfacheren Fällen mit geeigneten Ansätzen erraten. In der Tabelle sind einige Beispiele aufgeführt, in denen ein einfacher Ansatz mit Koeffizienten, die durch Einsetzen in die Differentialgleichung zu bestimmen sind, zum Ziel führt.

Differentialgleichung	x_h	x_p (Ansatz)	x_p
$x' - 3x = 15$	$c e^{3t}$	—	—5
$x' - x/t = t^3$	$c t$	at^4	$t^4/3$
$x' + x = \cos t$	$c e^{-t}$	$a \cos t + b \sin t$	$(\cos t + \sin t)/2$.

Ist das Erraten eines Ansatzes nicht einfach oder möglich, so hilft die Methode der **Variation der Konstanten** weiter. Die Methode der Variation der Konstanten nimmt Bezug auf die Lösung der homogenen Differentialgleichung, die man in der Form $x_h(t, c) = c g(t)$ mit

$$g(t) = \exp \left[- \int^t a(\tilde{t}) d\tilde{t} \right]$$

schreibt. Für die gesuchte spezielle Lösung wird der Ansatz $x_p(t) = c(t) g(t)$ gemacht, der die Bezeichnung ‘Variation der Konstanten’ begründet. Geht man mit diesem Ansatz in die inhomogene Differentialgleichung ein, so findet man

$$c'(t) g(t) + c(t) [g'(t) + a(t) g(t)] = b(t) .$$

In der eckigen Klammer findet man die homogene Differentialgleichung, der Term entfällt und es verbleibt die Differentialgleichung $c'(t) = b(t)/g(t)$ für die Funktion $c(t)$ mit der speziellen Lösung

$$c(t) = \int^t \frac{b(\tilde{t})}{g(\tilde{t})} d\tilde{t} .$$

Die Anwendung der Variation der Konstanten ergibt für die drei einfachen Beispiele das gleiche Resultat für $x_p(t)$ wie zuvor.

Die bis zu diesem Punkt aufgeführten Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades gehören zum Rüstzeug der theoretischen Physik. Die Liste der Differentialgleichungen dieses Typs, die analytisch zugänglich sind,

kann noch etwas erweitert werden⁵, zur Diskussion gestellt werden aber in dem nächsten Abschnitt nur einige Aspekte der Differentialgleichungen erster Ordnung und höheren Grades.

6.2.5 Differentialgleichungen höheren Grades

Die Standardform ist ein ‘Polynom’ in den Ableitungen erster Ordnung

$$(x')^n + f_1(t, x)(x')^{(n-1)} + \cdots + f_{(n-1)}(t, x)x' + f_n(t, x) = 0.$$

Ein solches Polynom kann faktorisiert werden

$$(x' - g_1(t, x))(x' - g_2(t, x)) \cdots (x' - g_n(t, x)) = 0,$$

wobei unter Umständen das Auftreten von komplexen Funktionen in Kauf zu nehmen ist. Es bietet sich an, die einzelnen Faktordifferentialgleichungen zu lösen und daraus die Gesamtlösung zusammenzusetzen. Die entsprechende Strategie soll an zwei Beispielen illustriert werden.

Für die Differentialgleichung

$$(x')^2 - 4t^2 = 0$$

lautet die Faktorisierung $(x' - 2t)(x' + 2t) = 0$. Die Einzellösungen sind

$$\begin{aligned} x' - 2t = 0 &\longrightarrow x = t^2 + c_1 \\ x' + 2t = 0 &\longrightarrow x = -t^2 + c_2. \end{aligned}$$

Das Produkt $(x - t^2 - c_1)(x + t^2 - c_2)$ kann jedoch nicht die Gesamtlösung sein, da eine Differentialgleichung erster Ordnung, unabhängig von dem Grad, nur eine Integrationskonstante enthalten darf. Als Ausweg bietet es sich an, $c_1 = c_2 = c$ zu setzen. Man stellt dann fest, dass die Funktion $(x - c)^2 - t^4 = 0$ oder $x = c \pm t^2$ (eine Schar von parallelverschobenen, nach oben bzw. nach unten offenen Parabeln) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist.

Das zweite Beispiel ist, der Einfachheit halber, ebenfalls eine Differentialgleichung zweiten Grades

$$(x')^2 - x = 0.$$

Faktorisierung ergibt $(x' - \sqrt{x})(x' + \sqrt{x}) = 0$, mit den Einzellösungen

$$\begin{aligned} x' = \sqrt{x} &\longrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2}(c_1 + t) \\ x' = -\sqrt{x} &\longrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2}(c_2 - t). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist nach der angedeuteten Vorschrift

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}(c + t)\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}(c - t)\right) = 0 \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{4}(t \pm c)^2,$$

⁵ siehe Literaturliste

wobei eines der Vorzeichen genügt, da der Parameter c die Werte $-\infty \leq c \leq \infty$ annehmen kann. Die Lösungsmannigfaltigkeit ist eine Parabelschar, deren Minima auf der t -Achse liegen.

6.3 Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$F(t, x, x', x'') = 0$$

spielen in der Physik (und nicht nur in der Mechanik) eine besondere Rolle. In Math.Kap. 2.2 wurden die einfachst möglichen Varianten betrachtet. Dies waren Differentialgleichungen, in denen außer der zweiten Ableitung nur eine der anderen Variablen auftritt, also die expliziten Differentialgleichungen

$$x'' = f(t), \quad x'' = f(x), \quad x'' = f(x'),$$

sowie die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Technik zur Lösung der ersten Kategorie war ein Zweischnittverfahren. Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung wurde mittels aufeinanderfolgender Integration von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung gelöst. Dieses Verfahren ist auch für die Lösung der nächstkomplizierteren Klasse von Differentialgleichungen zweiter Ordnung einsetzbar.

6.3.1 Lösbare implizite Differentialgleichungen

Bei den Differentialgleichungen

$$F(t, x', x'') = 0 \quad \text{und} \quad F(x, x', x'') = 0$$

tritt im ersten Fall die abhängige Variable x , im zweiten Fall die unabhängige Variable in der Differentialgleichung nicht auf. Die Implementierung des Zweischnittlösungsschemas für die Differentialgleichung $F(t, x', x'') = 0$ sieht folgendermaßen aus:

Schritt 1: Mit der Substitution $x' = v$ $x'' = v'$ gewinnt man eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(t, v, v') = 0.$$

Die Lösung ist eine einparametrische Kurvenschar $g(t, v, c_1) = 0$.

Schritt 2: Das Ergebnis des ersten Schrittes stellt eine zweite Differentialgleichung erster Ordnung dar

$$g(t, x', c_1) = 0.$$

Deren Lösung $f(t, x, c_1, c_2) = 0$ ist dann die allgemeine Lösung der vorgegebenen Differentialgleichung.

In der Ausführung dieser Schritte können sich jedoch durchaus Schwierigkeiten ergeben, wie das folgende, etwas aufwendigere Beispiel zeigt. Für die Differentialgleichung

$$(2x' - \frac{1}{t})x'' + \frac{x'}{t^2} = 0$$

erhält man nach der Substitution im ersten Schritt die Differentialgleichung

$$2vv' - \frac{v'}{t} + \frac{v}{t^2} = 0 \quad \text{oder} \quad (2v - \frac{1}{t})dv + \frac{v}{t^2}dt = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist exakt, denn es ist

$$\frac{\partial(2v - 1/t)}{\partial t} = \frac{\partial(v/t^2)}{\partial v} = \frac{1}{t^2}.$$

Die allgemeine Lösung, die man mittels Kurvenintegration gewinnen kann, lautet

$$v^2 - \frac{v}{t} + c_1 = 0.$$

Liegt das Ergebnis des ersten Schrittes in impliziter Form vor (und dies ist der Normalfall), so bieten sich für den zweiten Schritt die folgenden Optionen an.

Bei der ersten Option setzt man voraus, dass das Ergebnis des ersten Schrittes in der Form $v = x' = v(t)$ aufgelöst werden kann. Zur Gewinnung des Endergebnisses ist dann nur eine direkte Integration notwendig. In dem gegenwärtigen Beispiel ist dies möglich. Die Auflösung ergibt

$$x' = \frac{1}{2t} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4c_1 t^2} \right).$$

Die Durchführung der zweiten Integration (auch dies ist der Normalfall) ist keineswegs trivial. Mit Mühe oder einer Integraltafel erhält man

$$x(t) = \frac{1}{2} \left[\ln t \pm \left\{ \sqrt{1 - 4c_1 t^2} - \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 - 4c_1 t^2}}{2\sqrt{c_1}t} \right] \right\} \right] + c_2.$$

Das Ergebnis ist eine durchaus komplizierte, zweiästige Kurve.

Es ist oft einfacher, das Ergebnis des ersten Schrittes in der Form $t = t(v)$ aufzulösen. Man erhält eine zweite Differentialgleichung erster Ordnung, indem man die Aussagen

$$dx = v dt \quad \text{und} \quad dt = \left(\frac{dt(v)}{dv} \right) dv$$

zu

$$dx = v \left(\frac{dt(v)}{dv} \right) dv$$

kombiniert. Integration ergibt

$$x(v) = \int^v \tilde{v} \left(\frac{dt(\tilde{v})}{d\tilde{v}} \right) d\tilde{v} + c_3 ,$$

bzw. nach Umschreibung mittels partieller Integration

$$x(v) = v t(v) - \int^v t(\tilde{v}) d\tilde{v} + c_3 .$$

Die gesuchte Lösung liegt somit bei dieser Option in der Form einer Parameterdarstellung

$$t = t(v) \quad x = x(v) \quad \text{mit } A \leq v \leq B$$

vor. Der Bereich der Parameters v ergibt sich aus der Struktur der Funktionen $t(v)$ und $x(v)$.

Für das gegenwärtige Beispiel findet man bei Auflösung nach t

$$t(v) = \frac{v}{(v^2 + c_1)} ,$$

so dass man für die Funktion $x(v)$ das Resultat

$$\begin{aligned} x(v) &= \frac{v^2}{(v^2 + c_1)} - \int^v \frac{\tilde{v}}{(\tilde{v}^2 + c_1)} d\tilde{v} + c_3 \\ &= \frac{v^2}{(v^2 + c_1)} - \frac{1}{2} \ln(v^2 + c_1) + c_3 . \end{aligned}$$

Elimination des Parameters v führt bei Umbenennung der Integrationsvariablen nach einigen Rechenschritten auf das oben angegebene Ergebnis $x = x(t)$ zurück.

Ein entsprechendes Lösungsschema greift bei der Differentialgleichung $F(x, x', x'') = 0$. Die Substitutionen

$$x' = v \quad \text{und} \quad x'' = v \left(\frac{dv}{dx} \right) \quad (\text{Kettenregel})$$

führen auf eine Differentialgleichung erster Ordnung $G(x, v, dv/dx) = 0$. Die Lösung ist im Allgemeinen eine implizite Funktion $g(x, v, c_1) = 0$. In dem zweiten Schritt muss man das Endergebnis $f(t, x, c_1, c_2) = 0$ durch Lösung der Differentialgleichung $g(x, x', c_1) = 0$ gewinnen. Ein einschlägiges Beispiel ist die Differentialgleichung

$$x(x-1)x'' + (x')^2 = 0 .$$

Die angedeutete Substitution führt auf

$$x(x-1)v \frac{dv}{dx} + v^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{v} + \frac{dx}{x(x-1)} = 0 .$$

Die Lösung dieser separablen Differentialgleichung ist $v = c_1 x / (x-1)$, so dass in dem zweiten Schritt die Differentialgleichung

$$x' = \frac{c_1 x}{(x-1)} \quad \text{oder} \quad \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = c_1 dt$$

zur Diskussion steht. Deren Lösung und damit die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$t = \frac{1}{c_1} [x - \ln x] + c_2 .$$

Diese Beispiele unterstreichen noch einmal die Tatsache, dass die Betrachtung von Differentialgleichungen erster Ordnung keine müßige Angelegenheit ist. Dem vorgestellten Aufbauprinzip entsprechend, benötigt man die Lösungen dieser Differentialgleichungen für die Diskussion von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Das besprochene Zweischrittverfahren findet noch bei einigen weiteren Klassen von impliziten Differentialgleichungen zweiter Ordnung Anwendung⁶. Die wichtigste Klasse von Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der theoretischen Physik sind jedoch die linearen Differentialgleichungen.

6.3.2 Lineare Differentialgleichungen

Die Bedeutung dieser Klasse von Differentialgleichungen kommt in der theoretischen Mechanik nicht unbedingt zum Ausdruck. Diese Differentialgleichungen stellen jedoch ein Hauptwerkzeug in der Elektrodynamik und der Quantenmechanik dar. Die Grundgleichungen in diesen Gebieten sind zwar partielle Differentialgleichungen, doch werden diese im Regelfall durch Separation in einen Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen (zweiter Ordnung) übergeführt. Die entsprechenden Grundgrößen, die elektromagnetischen Felder der Maxwelltheorie und die Wellenfunktionen der Schrödingertheorie (und deren Erweiterungen), gehorchen dem Superpositionsprinzip. Dies bedingt, dass die partiellen und die letztlich zu diskutierenden gewöhnlichen Differentialgleichungen linear sein müssen. Die allgemeinen Aussagen, die man bezüglich der Lösungen der Differentialgleichung

$$a_0(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = b(t)$$

bereitstellen kann, wurden in Math.Kap. 2.2.2 diskutiert. Zusammengefasst lauten sie:

- Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer Partikulärlösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$x_i(t, c_1, c_2) = x_h(t, c_1, c_2) + x_p(t) .$$

- Verschwindet für zwei Partikulärlösungen der homogenen Differentialgleichung $\{x_1(t), x_2(t)\}$ die Wronskideterminante nicht

⁶ siehe Literaturliste

$$W(x_1(t), x_2(t)) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0,$$

so sind sie linear unabhängig und bilden ein Fundamentalsystem.

- Die Linearkombination $x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ der Fundamentallösungen ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten wurde in Math.Kap. 2.2.2 vorgestellt. Die Lösung der nächstkomplizierten Klasse von linearen Differentialgleichungen, bei denen die Koeffizientenfunktionen (mehr oder weniger einfache) Polynome in t sind, wird in dem folgenden Abschnitt aufgegriffen. Zu diskutieren ist an dieser Stelle auch die Frage nach einem Verfahren zur Bestimmung der Partikulärlösung der inhomogenen Differentialgleichung. Dieses Verfahren ist eine Erweiterung des Verfahrens der Variation der Konstanten, das für den Fall von Differentialgleichungen erster Ordnung vorgestellt wurde (siehe Math.Kap. 6.2.3). Im Fall einer inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung lautet der Ansatz

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t),$$

wobei die Funktionen x_1 und x_2 ein Fundamentalsystem bilden. Es sind zwei ‘Konstanten’ zu variieren. Da nur eine Partikulärlösung gesucht wird, gibt es einen gewissen Spielraum, der geschickt ausgenutzt werden kann. Man berechnet zunächst die Ableitung des Ansatzes

$$x_p' = c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_1x_1' + c_2x_2'$$

und fordert (dies ist der Spielraum), dass die Funktionen $c_i(t)$ die Gleichung

$$c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0$$

erfüllen. Der Ansatz für x_p , die erste Ableitung $x_p' = c_1x_1' + c_2x_2'$ und die zweite Ableitung $x_p'' = c_1'x_1' + c_2'x_2' + c_1x_1'' + c_2x_2''$ werden dann in die inhomogene Differentialgleichung eingesetzt. Das Ergebnis (sortiert) ist

$$c_1(a_0x_1'' + a_1x_1' + a_2x_1) + c_2(a_0x_2'' + a_1x_2' + a_2x_2) + a_0(c_1'x_1' + c_2'x_2') = b.$$

Die ersten beiden Klammerausdrücke verschwinden, denn x_1 und x_2 sind Lösungen der homogenen Differentialgleichung. Die zwei Gleichungen

$$x_1(t)c_1'(t) + x_2(t)c_2'(t) = 0$$

$$x_1'(t)c_1'(t) + x_2'(t)c_2'(t) = b(t)/a_0(t) \quad a_0 \neq 0$$

stellen ein lineares Gleichungssystem für die Funktionen $c_1'(t)$ und $c_2'(t)$ dar. Lösung dieses Gleichungssystems, z.B. mit Cramers Regel, liefert

$$c_1'(t) = -\frac{b(t)x_2(t)}{a_0(t)W(x_1(t), x_2(t))} \quad c_2'(t) = \frac{b(t)x_1(t)}{a_0(t)W(x_1(t), x_2(t))}.$$

Das Gleichungssystem besitzt eine nichttriviale Lösung, da die Wronskideterminante $W(t)$ der Fundamentallösungen (und $a_0(t)$) per Voraussetzung

ungleich Null sind. Die gesuchten Funktionen $c_i(t)$ selbst erhält man durch Integration

$$c_i(t) = \int^t c'_i(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (i = 1, 2) .$$

Das folgende Beispiel erläutert das Verfahren noch einmal im Detail. Die allgemeine Lösung des homogenen Anteils der Differentialgleichung

$$x'' + x = (\cos t)^{-1}$$

ist $x_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ mit der Wronskideterminante $W(\cos t, \sin t) = 1$. Das Gleichungssystem für die variierten Konstanten lautet

$$\begin{aligned} \cos t \, c'_1(t) + \sin t \, c'_2(t) &= 0 \\ -\sin t \, c'_1(t) + \cos t \, c'_2(t) &= (\cos t)^{-1} . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} c'_1 &= -\tan t \quad \text{und} \quad c_1(t) = -\int^t \tan \tilde{t} d\tilde{t} = \ln |\cos t| \\ c'_2 &= 1 \quad \text{und} \quad c_2(t) = \int^t d\tilde{t} = t . \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$x_i(t, c_1, c_2) = \{c_1 + \ln |\cos t|\} \cos t + \{c_2 + t\} \sin t .$$

Das Verfahren der Variation der Konstanten ist allgemein einsetzbar, dafür aber etwas umständlich. Beim Auffinden von Partikulärlösungen von inhomogenen, linearen Differentialgleichungen per Inspektion kann das Superpositionsprinzip von Nutzen sein, wie das folgende Beispiel illustriert. Um eine Partikulärlösung der Differentialgleichung

$$x'' - 4x = (5 + e^t)$$

zu finden, betrachtet man die einzelnen Differentialgleichungen

$$x'' - 4x = 5 \quad \text{und} \quad x'' - 4x = e^t ,$$

deren Partikulärlösungen man leicht gewinnen kann: $x_{p1} = -5/4$ bzw. $x_{p2} = -(1/3)e^t$. Offensichtlich ist die Summe $x_p = -(5/4 + (1/3)e^t)$ eine Partikulärlösung der gesamten Differentialgleichung.

6.3.3 Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typ

Eine wichtige Klasse von (homogenen) linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung liegt vor, wenn die Koeffizientenfunktionen Polynome in der Variablen t sind

$$P_0(t) x'' + P_1(t) x' + P_2(t) x = 0 .$$

Diese Differentialgleichungen werden, nach Multiplikation mit $1/P_0$, meist in der Form

$$x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x = 0$$

diskutiert, wobei die Funktionen p_i gebrochen rationale Funktionen sind. Sind diese Funktionen nur **schwach singulär**, was im Klartext bedeutet, dass sie durch die Partialbruchzerlegungen

$$p_1(t) = \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{(t-t_k)} \quad \text{und} \quad p_2(t) = \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{b_k}{(t-t_k)^2} + \frac{c_k}{(t-t_k)} \right\}$$

mit konstanten Größen a_k, b_k, c_k dargestellt werden können, so bezeichnet man die Differentialgleichung als eine Differentialgleichung des Fuchsschen Typs. Die besondere Bedeutung dieser Klasse von Differentialgleichungen ergibt sich aus der Tatsache, dass alle für die theoretische Physik wichtigen, höheren Funktionen (Legendrefunktionen, Besselfunktionen, konfluente hypergeometrische Funktionen, etc.) durch Differentialgleichungen dieses Typs definiert werden. Die allgemeine Lösungsmethode ist die Potenzreihenentwicklung, die hier an einem Beispiel vorgestellt werden soll, das jedoch nicht auf die Diskussion der höheren Funktionen Bezug nimmt. Die Aufgabe lautet: Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2tx'' + (t+1)x' + 3x = 0.$$

Der Ansatz für die Lösung ist eine Potenzreihe in t multipliziert mit einer beliebigen Potenz von t

$$\begin{aligned} x(t) &= t^\rho \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \\ &= b_0 t^\rho + b_1 t^{\rho+1} + b_2 t^{\rho+2} + \dots \end{aligned}$$

Der zusätzliche Faktor t^ρ dient dazu, mögliche Abhängigkeiten wie t^{-1} , $t^{1/3}$, etc., die einen Potenzreihenansatz komplizierter machen würden, abzufangen. Geht man mit dem Ansatz in die Differentialgleichung ein (dazu muss x' und x'' berechnet werden) und sortiert nach Potenzen von t , so erhält man

$$\begin{aligned} &t^{\rho-1} [2\rho(\rho-1)b_0 + \rho b_0] \\ &+ t^\rho [(\rho+1)(2\rho+1)b_1 + (\rho+3)b_0] \\ &+ \dots \\ &+ t^{\rho+k} [(\rho+k+1)(2\rho+2k+1)b_{k+1} + (\rho+k+3)b_k] \\ &+ \dots = 0. \end{aligned}$$

Hat eine Potenzreihe den Wert Null für alle Werte der Variablen, so müssen alle Koeffizienten der Potenzreihe verschwinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n = 0 \quad \longrightarrow \quad d_n = 0 \quad \text{für alle } n.$$

Betrachtung der obigen Koeffizienten liefert die Aussagen

- Der Faktor der Potenz $t^{\rho-1}$ ist

$$2\rho(\rho-1) + \rho = 0.$$

Dies ist die **Indexgleichung**, die die Potenz des Vorfaktors festlegt. Für das gegenwärtige Beispiel sind die Wurzeln der Indexgleichung $\rho_1 = 0$ und $\rho_2 = 1/2$. Da eine homogene Differentialgleichung vorliegt (die mit einem beliebigen, konstanten Faktor multipliziert werden könnte), ist der Koeffizient b_0 über die Differentialgleichung nicht bestimmbar.

- Die Faktoren der restlichen Potenzen ($t^{\rho+k}$ mit $k = 0, 1, \dots$) ergeben die zweigliedrige **Rekursionsformel**

$$b_{k+1} = -\frac{(\rho+k+3)}{(\rho+k+1)(2\rho+2k+1)}b_k.$$

Gibt man eine Wurzel der Indexgleichung und einen Wert des Koeffizienten b_0 (der Einfachheit wegen meist 1) vor, so kann man die weiteren Koeffizienten des Potenzreihenansatzes berechnen. Es ist zu erwarten, dass für die verschiedenen Wurzeln linear unabhängige Lösungen vorliegen, doch ist dies anhand der Wronskideterminante zu überprüfen.

In diesem Beispiel tritt eine handhabbare, zweigliedrige Rekursionsformel auf. Es ist jedoch durchaus möglich, dass mehrgliedrige Rekursionsformeln vorkommen (ein Beispiel ist die Differentialgleichung der parabolischen Zylinderfunktionen mit einer dreigliedrigen Rekursion), deren Auflösung wesentlich aufwendiger ist.

Für die Wurzel $\rho = 0$ der Indexgleichung lautet die Rekursionsformel

$$b_{k+1} = -\frac{(k+3)}{(k+1)(2k+1)}b_k.$$

Mit der Auflösung

$$\begin{aligned} b_1 &= -3b_0 & b_2 &= -\frac{2}{3}b_1 = 2b_0 \\ b_3 &= -\frac{1}{3}b_2 = -\frac{2}{3}b_0 & b_4 &= -\frac{3}{14}b_3 = \frac{1}{7}b_0 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

folgt daraus die Potenzreihe ($b_0 = 1$)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 - 3t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{7}t^4 - \frac{1}{45}t^5 + \dots \\ &\quad + (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)} t^k + \dots \end{aligned}$$

Die erste Frage, die ansteht, ist die Frage nach dem Konvergenzradius dieser Potenzreihe. Im Weiteren müssten die Eigenschaften der Funktion, die durch diese Potenzreihe definiert ist, im Detail untersucht werden.

Die zweite Lösung der Differentialgleichung (für die Wurzel $\rho = 1/2$) mit der expliziten Rekursionsformel

$$b_{k+1} = -\frac{(2k+7)}{(2k+2)(2k+3)}b_k$$

ist

$$x_2(t) = \sqrt{t} \left(1 - \frac{7}{6}t + \frac{21}{40}t^2 - \frac{11}{80}t^3 + \dots \right. \\ \left. + (-1)^k \frac{(2k+3)(2k+5)}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k)} t^k + \dots \right).$$

Es stellt sich heraus, dass der Konvergenzradius beider Reihen unendlich ist. Innerhalb des Konvergenzbereiches ist dann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (lineare Unabhängigkeit vorausgesetzt)

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t).$$

Sind die Koeffizientenfunktionen der (homogenen) linearen Differentialgleichung keine Polynome, so existiert kein allgemeines Lösungsrezept. Unter Umständen kann man mittels geeigneter Variablensubstitution die Koeffizientenfunktionen in Polynomform bringen. Ein wichtiges Beispiel ist die **Legendresche Differentialgleichung** für eine Funktion $p(\theta)$, wobei $0 \leq \theta \leq \pi$ der Polwinkel der Kugelkoordinaten ist. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 p}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dp}{d\theta} + \left\{ \lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} \right\} p = 0,$$

mit Parametern μ und λ , wird durch die Substitution

$$t = \cos \theta \quad \sqrt{1-t^2} = \sin \theta \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

in die Differentialgleichung

$$(1-t^2)P'' - 2tP' + \left\{ \lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{(1-t^2)} \right\} P = 0$$

übergeführt. Die Funktion P ist eine Funktion von $t = \cos \theta$ und es gilt $P(\cos \theta) \equiv p(\theta)$. Bei der Umschreibung wurden, auf der Basis der Kettenregel, die Relationen

$$\frac{dp}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dP}{dt} \quad \frac{d^2 p}{d\theta^2} = \sin^2 \theta \frac{d^2 P}{dt^2} - \cos \theta \frac{dP}{d\theta}$$

benutzt.

Wie die Legendreschen Funktionen (mit dem wichtigen Spezialfall der Legendreschen Polynome) werden die meisten speziellen Funktionen der mathematischen Physik über Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typ definiert⁷.

⁷ Diese Funktionen spielen vor allem in der Elektrodynamik und der Quantenmechanik eine Rolle. Details werden erst in Band 2 und Band 3 ausgeführt.

6.4 Ergänzung: Numerische Lösungsmethoden

Ist die Lösung einer Differentialgleichung analytisch nicht zugänglich, so muss man auf numerische Näherungsverfahren zurückgreifen. Eine kleine Auswahl solcher numerischer Verfahren für die Lösung von Anfangswertaufgaben von Differentialgleichungen erster Ordnung soll in diesem Abschnitt vorgestellt werden. Die Betrachtung von Differentialgleichungen erster Ordnung ist insofern ausreichend als

- man Differentialgleichungen n -ter Ordnung (es interessieren im Wesentlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung) in ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung umschreiben kann, und
- die folgenden Ausführungen für eine Differentialgleichung erster Ordnung auf die Diskussion von Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen werden können.

Die Aufgabenstellung lautet demnach:

Gesucht ist, in dem Intervall $a \leq t \leq b$, eine Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = f(t, x(t))$ mit der Anfangsbedingung $x(a) = x_a$.

Bei der numerischen Behandlung dieser Aufgabe unterscheidet man **Einschritt-** und **Mehrschrittverfahren**. Bei Einschrittverfahren wird der gesuchte, genäherte Funktionswert x an der Stützstelle t_{k+1} durch den Funktionswert an der vorherigen Stelle $x(t_k)$ bestimmt. Bei Mehrschrittverfahren wird der gesuchte Funktionswert $x(t_{k+1})$ durch die Näherung der Funktion in mehreren vorangehenden Punkten berechnet. Dies erreicht man, indem man die Funktion $f(t, x(t))$ durch ein Interpolationspolynom darstellt, in das

- Funktionswerte $x(t)$ an den Stellen $t_{k-l}, t_{k-l+1}, \dots, t_k$ (explizites Verfahren) oder
- Funktionswerte $x(t)$ an den Stellen $t_{k-l}, t_{k-l+1}, \dots, t_k, t_{k+1}$ (implizites Verfahren) eingehen.

Zur Aufbereitung der Einschrittverfahren, die einfacher zu handhaben sind, zerlegt man das Intervall $[a, b]$ in N gleichgroße Teilintervalle. Die verfügbaren Stützstellen sind $t_k = a + kh$ ($k = 0, 1, \dots, N$), wobei $h = (b - a)/N$ die Schrittweite darstellt. Ein direkter Zugang zu Einschrittverfahren beruht auf der **Methode der Taylorentwicklung**. Hier beginnt man (stetige Differenzierbarkeit bis zu der gewünschten Ordnung vorausgesetzt) mit

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} x^{(n)}(t) + \dots$$

und gewinnt bei Benutzung der Differentialgleichung die Näherungsformel

$$x(t+h) = x(t) + h \left(f(t, x(t)) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!} \left(\frac{d^{n-1} f(t, x(t))}{dt^{n-1}} \right) \right),$$

die eine Auswertung erlaubt, falls die auftretenden totalen Ableitungen berechnet werden können. Eine Näherungslösung der Anfangswertaufgabe kann man dann durch sukzessive Auswertung der Gleichung

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + h F(t_k, x(t_k), h),$$

beginnend bei $t_0 = a$ mit $x(t_0) = x_a$, berechnen.

Die meisten Einschrittverfahren basieren jedoch auf der Auswertung des Integrals über die Differentialgleichung von einer Stützstelle $t_k = t$ bis zu der nächsten

$$\int_t^{t+h} d\tilde{t} \left(\frac{dx(\tilde{t})}{d\tilde{t}} \right) = \int_t^{t+h} d\tilde{t} f(\tilde{t}, x(\tilde{t}))$$

oder

$$\Delta x = x(t+h) - x(t) = \int_t^{t+h} d\tilde{t} f(\tilde{t}, x(\tilde{t})). \quad (6.1)$$

Die verschiedenen Verfahren unterscheiden sich durch Näherung des hier auftretenden Integrals

$$\int_t^{t+h} d\tilde{t} f(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \longrightarrow I(t, x(t), h).$$

Bei den einfacheren Näherungen orientiert man sich direkt an Näherungsformeln der Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

$$I = \int_{t_0}^{t_0+h} d\tilde{t} f(\tilde{t}).$$

Die einfachste Näherung, die man in diesem Fall einsetzen kann, ist die Rechteckformel (siehe Abb. 6.4a)

$$I_R = f(t_0)h$$

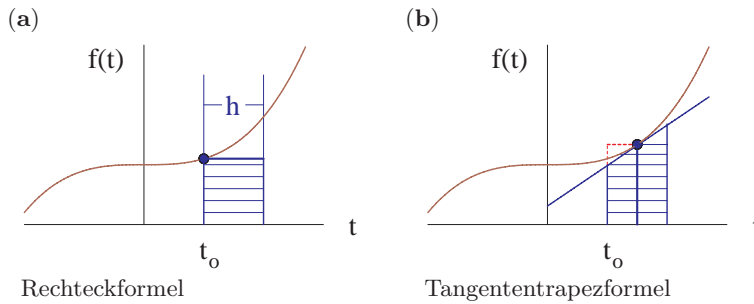


Abb. 6.4. Integralberechnung: Einfache Näherungsformeln 1

mit dem unteren Stützpunkt t_0 in dem Intervall $[t_0, t_0 + h]$. Varianten mit einer linearen Näherung des Integranden sind die Tangententrapezformel (Abb. 6.4b)

$$I_{TT} = f(t_0 + h/2)h ,$$

in der die Intervallmitte als Stützpunkt dient, und die Sehnentrapezformel (Abb. 6.5a)

$$I_{ST} = \frac{1}{2} (f(t_0) + f(t_0 + h)) h .$$

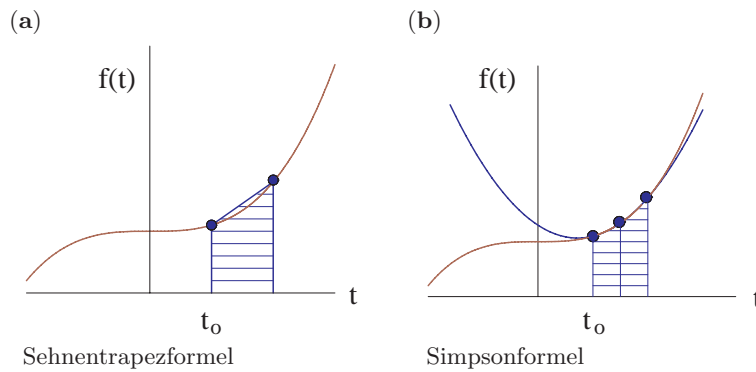


Abb. 6.5. Integralberechnung: Einfache Näherungsformeln 2

Die bekannteste quadratische Näherungsformel, die Simpsonformel (Abb. 6.5b)

$$I_S = \frac{1}{6} (f(t_0) + 4f(t_0 + h/2) + f(t_0 + h)) h , \quad (6.2)$$

gewinnt man, indem man zunächst die Funktion $f(t)$ in dem Intervall $[t_0, t_0 + h]$ mit den Stützstellen t_0 , $t_0 + h/2$ und $t_0 + h$ mit einer quadratischen Funktion interpoliert. Der Ansatz

$$f_{\text{Ansatz}}(t) = a + b(t - t_0) + c(t - t_0)^2$$

und die Bestimmung der drei Koeffizienten durch

$$f(t_{\text{Stütz}}) = f_{\text{Ansatz}}(t_{\text{Stütz}})$$

führt auf die Interpolationsformel

$$f(t) \approx f(t_0) + [-3f(t_0) + 4f(t_0 + h/2) - f(t_0 + h)] \left(\frac{t - t_0}{h} \right) + [2f(t_0) - 4f(t_0 + h/2) + 2f(t_0 + h)] \left(\frac{t - t_0}{h} \right)^2 .$$

Integration über das Intervall $[t_0, t_0 + h]$ liefert dann die klassische Formel (6.2).

Die Übertragung dieser Näherungen auf den Fall der linearen Differentialgleichung mit einem Integral über Funktionen $f(t, x(t))$ liefert die einfachsten Verfahren zur iterativen, numerischen Integration der Differentialgleichung. Es ist nützlich, das Intervall zur Abkürzung mit $[t, t + h]$ (anstelle von $[t_k, t_k + h]$) zu bezeichnen. Die einfachsten Näherungen für das Integral in (6.1) sind dann

- Das **Euler-Cauchy** Verfahren entspricht der Rechteckformel

$$I_R = hf(t, x(t)) .$$

- Verbesserungen des Euler-Cauchy Verfahrens basieren auf der Sehnentrapezformel

$$I_{ST} = \frac{h}{2} \left(f(t, x(t)) + f(t + h, x(t + h)) \right)$$

- und der Tangententrapezformel

$$I_{TT} = hf(t + h/2, x(t + h/2)) .$$

Die Sehnentrapezformel (ST) und die Tangententrapezformel (TT) sind der Ausgangspunkt für die Entwicklung des vielbenutzten **Runge-Kutta** Verfahrens. Entwickelt man die Funktionen f in diesen Näherungen für das Integral I nach Potenzen von h , so findet man mit $\Delta x = x(t + h) - x(t)$ und der Standardnotation für die partiellen Ableitungen der Funktion $f(t, x)$, so z.B.

$$f_{tx}(t, x) \equiv f_{tx}(t, x(t)) = \frac{\partial^2 f(t, x(t))}{\partial t \partial x}$$

die Resultate

$$\begin{aligned} (\Delta x)_{TT} &\approx f(t, x)h + \left(f_t(t, x) + f_x(t, x)f(t, x) \right) \frac{h^2}{2} \\ &\quad + \left(f_{tt}(t, x) + 2f_{tx}(t, x)f(t, x) + f_{xx}(t, x)f(t, x)^2 \right) \frac{h^3}{8} \\ (\Delta x)_{ST} &\approx f(t, x)h + \left(f_t(t, x) + f_x(t, x)f(t, x) \right) \frac{h^2}{2} \\ &\quad + \left(f_{tt}(t, x) + 2f_{tx}(t, x)f(t, x) + f_{xx}(t, x)f(t, x)^2 \right) \frac{h^3}{4} . \end{aligned}$$

Entwickelt man auf der anderen Seite den Integranden in dem Integral in (6.1) um die Stelle t , so findet man mit

$$\begin{aligned} (\Delta x)_{\text{exakt}} &= \int_t^{t+h} d\tilde{t} \left(f(t, x(t)) + \frac{df(t, x(t))}{dt}(\tilde{t} - t) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n!} \frac{d^n f(t, x(t))}{dt^n}(\tilde{t} - t)^n + \dots \right) \end{aligned}$$

nach Integration und Auswertung der totalen Ableitungen die exakte Entwicklung

$$\begin{aligned}
 (\Delta x)_{\text{exakt}} = & f(t, x)h + \frac{1}{2!} \left(f_t(t, x) + f_x(t, x)f(t, x) \right) \frac{h^2}{2} \\
 & + \frac{1}{3!} \left(f_{tt}(t, x) + 2f_{tx}(t, x)f(t, x) + f_{xx}(t, x)f(t, x)^2 \right. \\
 & \left. + f_x(t, x)[f_t(t, x) + f_x(t, x)f(t, x)] \right) h^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Die Entwicklungen von $(\Delta x)_{TT}$ und $(\Delta x)_{ST}$ stimmen mit dem exakten Resultat nur bis zur zweiten Ordnung in h überein. Bildet man, wie zuerst von C. Runge (C. Runge, Mathematische Annalen, **46** (1895), S. 167) vorgeschlagen, die Kombination

$$(\Delta x)_{\text{Komb 1}} = \frac{2}{3}(\Delta x)_{TT} + \frac{1}{3}(\Delta x)_{ST},$$

so stimmt wenigstens der Vorfaktor der Terme in dritter Ordnung, es fehlen jedoch zwei Beiträge.

Die Übereinstimmung kann verbessert werden, wenn man die Form

$$(\Delta x)_{\text{ansatz 1}} = \frac{1}{2} \left(k_0(t, x) + k_2(t, x) \right) \quad (6.3)$$

mit

$$\begin{aligned}
 k_0(t, x) &= f(t, x) h \\
 k_1(t, x) &= f(t + h, x + k_0(t, x)) h \\
 k_2(t, x) &= f(t + h, x + k_1(t, x)) h
 \end{aligned}$$

in Betracht zieht. Entwicklung nach Potenzen von h ergibt in diesem Fall

$$\begin{aligned}
 (\Delta x)_{\text{ansatz 1}} = & f(t, x)h + \frac{1}{2} \left(f_t(t, x) + f_x(t, x)f(t, x) \right) \frac{h^2}{2} \\
 & + \frac{1}{4} \left((f_{tt}(t, x) + 2f_{tx}(t, x)f(t, x) + f_{xx}(t, x)f(t, x)^2 \right. \\
 & \left. + 2f_x(t, x)[f_t(t, x) + f_x(t, x)f(t, x)]) \right) h^3 + \dots,
 \end{aligned}$$

so dass nun die Kombination

$$(\Delta x)_{\text{Komb 2}} = \frac{4}{3}(\Delta x)_{\text{ansatz 1}} - \frac{1}{3}(\Delta x)_{TT},$$

bis zur dritten Ordnung mit der exakten Entwicklung übereinstimmt.

Die hier angedeutete Grundidee

- Benutze einen allgemeinen Ansatz nach diesem Muster

$$(\Delta x)_{\text{RK}} = \sum_{n=0} a_n k_n(t, x) \quad (6.4)$$

$$k_0(t, x) = f(t, x)h$$

$$k_n(t, x) = f(t + \alpha_n h, x + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni} k_i(t, x)h) \quad (n \geq 1)$$

und

- bestimme die Parameter des Ansatzes (soweit möglich) nach Entwicklung in Potenzen von h durch Vergleich mit der exakten Entwicklung

wurde von W. Kutta aufgegriffen (W. Kutta, Z. für Mathematik und Physik, **46** (1901), S. 435). Sie stellt die Basis für eine Vielzahl klassischer und moderner Runge-Kutta Varianten dar (siehe Literaturverzeichnis, z.B. M. Abramovitz and I. Stegun).

Der vorgeschlagene Ansatz hat die Vorzüge, dass über die Festlegung von α_n ($0 \leq \alpha_n \leq 1$) möglichst günstige Zwischenpunkte in einem Intervall $[t, t+h]$ gewonnen werden und dass eine Richtung $k_n(t, x(t))/h$ durch einen polygonalen Linienzug in schon berechneten Richtungen vom Ausgangspunkt aus bestimmt wird. Neben der Anpassung an die exakte Entwicklung wird die Forderung gestellt, dass jeder der Zwischenpunkte bis zur zweiten Ordnung auf der Tangente an die Integralkurve $f(t, x(t))$ im Ausgangspunkt liegen soll, also durch

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni}$$

bestimmt ist, sowie

$$\sum_{n=0} a_n = 1.$$

Eine häufig eingesetzte Runge-Kutta Formel stellt eine Näherung dar, die bis zur vierten Ordnung mit der exakten Entwicklung übereinstimmt. In vierter Ordnung ist die Berechnung von vier Funktionswerten notwendig. Der Vergleich mit der exakten Entwicklung und die Forderung an die vier Stützpunkte, liefert acht Bedingungsgleichungen für die zehn Parameter

$$a_0, a_1, a_2, a_4, \beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{30}, \beta_{31}, \beta_{32}.$$

Es können somit zwei Parameter frei gewählt werden. Der Parametersatz

$$a_1 = a_4 = \frac{1}{6} \quad a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$$

$$\beta_{10} = \frac{1}{2}$$

$$\beta_{20} = 0 \quad \beta_{21} = \frac{1}{2}$$

$$\beta_{30} = 0 \quad \beta_{31} = 0 \quad \beta_{32} = \frac{1}{2}$$

führt auf Ergebnis

$$(\Delta x)_{RK} = \frac{h}{6} [k_0(t, x) + 2k_1(t, x) + 2k_2(t, x) + k_3(t, x)]$$

mit den Hilfsfunktionen

$$k_0(t, x) = f(t, x)$$

$$k_1(t, x) = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_0(t, x)\right)$$

$$k_2(t, x) = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_1(t, x)\right)$$

$$k_3(t, x) = f(t + h, x + hk_2(t, x)) .$$

Für die einfachste Differentialgleichung $x'(t) = f(t)$ mit der expliziten Lösung

$$x(t) = x_a + \int_a^t dt f(t)$$

gewinnt man wegen

$$k_1(t) = k_2(t) = f(t + h/2) \quad k_3(t) = f(t + h)$$

die Simpsonformel zurück.

Die folgenden Punkte könnten diesen Abriss von Näherungsmethoden ergänzen. Für eine weitergehende Diskussion jedoch wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.

- Für ein System von M Differentialgleichungen erster Ordnung stehen die Gleichungen

$$x'_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_M(t)) \quad \text{mit} \quad x_i(a) = x_{ia} \quad (i = 1, \dots, M)$$

zur Diskussion. Die oben angegebenen Formeln können direkt übertragen werden. So lautet z.B. die Runge-Kutta Formel

$$x_i(t + h) = x_i(t) + I_{i,RK}(t, x_1(t), \dots, x_M(t))$$

mit I bis auf die Indizierung wie zuvor

$$I_{i,RK} = \frac{h}{6} [k_{i,0} + 2k_{i,1} + 2k_{i,2} + k_{i,3}]$$

und

$$k_{i,0}(t, x_1, \dots, x_M) = f_i(t, x_1, \dots, x_M)$$

$$k_{i,1}(t, x_1, \dots, x_M) = f_i\left(t + \frac{h}{2}, x_1 + \frac{h}{2}k_{1,0}(t, \dots), \dots, \right.$$

$$\begin{aligned}
& x_M + \frac{h}{2} k_{M,0}(t, \dots) \\
& k_{i,2}(t, x_1, \dots, x_M) = f_i\left(t + \frac{h}{2}, x_1 + \frac{h}{2} k_{1,1}(t, \dots), \dots, \right. \\
& \quad \left. x_M + \frac{h}{2} k_{M,1}(t, \dots) \right) \\
& k_{i,3}(t, x_1, \dots, x_M) = f_i\left(t + h, x_1 + h k_{1,2}(t, \dots), \dots, \right. \\
& \quad \left. x_M + h k_{M,2}(t, \dots) \right) .
\end{aligned}$$

- Auch bei Einschrittverfahren kann man explizite oder implizite Varianten wählen. Verzichtet man z.B. in der Trapezformel auf die Entwicklung (und Näherung) von $x(t+h)$, so erhält man das implizite Einschrittverfahren

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2} [f(t, x(t)) + f(t+h, x(t+h))] .$$

Die Größe $x(t+h)$ ist durch Auflösung dieser impliziten Gleichung zu bestimmen.

- Aus mathematischer Sicht muss man die Punkte beachten:
 1. Geht die genäherte Lösung an den Stützstellen im Grenzfall $h \rightarrow 0$ in die wirkliche Lösung der Differentialgleichung, bei der vorgegebenen Anfangsbedingung, über? Die Beantwortung dieser Frage wird unter den Stichwörtern **Konsistenz** und **Konvergenz** diskutiert. Im Fall der Konsistenz geht es um die Frage, ob der Fehler der Näherung des Integrals für $h \rightarrow 0$ gleichmäßig verschwindet. Die Konsistenz ist jedoch alleine nicht ausreichend, um die Konvergenz des Verfahrens nachzuweisen. Konvergenz bedeutet dabei, dass die Folge der Lösungen mit verschwindender Schrittweite gegen die exakte Lösung des Anfangswertproblems konvergiert. Die Funktion $f(t, x(t))$ muss eine zusätzliche Stetigkeitsbedingung (Lipschitzbedingung) erfüllen. Für jedes der angedeuteten Verfahren kann Konvergenz nachgewiesen werden.
 2. Eine Frage von Interesse ist auch: Von welcher Ordnung in h ist der Fehler bei den einzelnen Verfahren bzw. gibt es explizite Fehlerabschätzungen?
- Aus mehr praktischer Sicht muss man sich auch mit der Frage der Rundungsfehler auseinandersetzen. Wählt man die Schrittweite zu klein, so kann es zu einer Akkumulation der Rundungsfehler kommen. Eine zu große Schrittweite führt auf der anderen Seite zu einer zu ungenauen Darstellung des Integrals, so dass die optimale Wahl der Schrittweite keine einfache Angelegenheit ist. In der Praxis gibt man sich oft mit einer Abschätzung der Stabilität der Lösung durch Veränderung der Anzahl der Stützstellen zufrieden.

7 Komplexe Zahlen und Funktionen

7.1 Definitionen

Die Lösungen von quadratischen Gleichungen sind nicht notwendigerweise reelle Zahlen. Löst man z.B. die Gleichung

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

mit der Standardmethode, so findet man

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Man ist somit gefordert, das System von reellen Zahlen und die Grundrechenoperationen in geeigneter und konsistenter Weise zu erweitern. Zu diesem Zweck führt man zunächst eine imaginäre Einheit ein

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{mit} \quad i^2 = -1$$

und schreibt das Lösungsbeispiel als

$$x = 5 \pm i\sqrt{15},$$

d.h. als eine komplexe Zahl mit einem Realteil und einem Imaginärteil. Während das System von reellen Zahlen auf Punkte einer Geraden abbildbar ist, benötigt man zur Abbildung von komplexen Zahlen eine Ebene, die komplexe Zahlenebene. Für die komplexe Zahl

$$z = x + iy \quad x, y \text{ reell},$$

benutzt man eine Darstellung in einer Ebene, die durch eine reelle Achse und eine dazu senkrechte imaginäre Achse aufgespannt ist. Ein gewisser Bezug zu Vektoren in einem zweidimensionalen Raum (oder zu Zahlenpaaren) ist offensichtlich (vergleiche Math.Kap. 3.1.2).

7.2 Grundrechenarten

Die Aussage bezüglich der vier Grundrechenarten lautet: Mit komplexen Zahlen kann man formal wie mit reellen Zahlen rechnen.

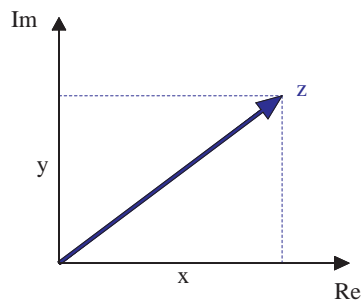


Abb. 7.1. Die komplexe Zahl $z = x + iy$

Bei der Addition und Subtraktion werden Real- und Imaginärteil getrennt addiert bzw. subtrahiert

$$\begin{aligned} z &= z_1 \pm z_2 \\ &= (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) . \end{aligned}$$

Die graphische Darstellung der Addition ist in Abb. 7.2 angedeutet.

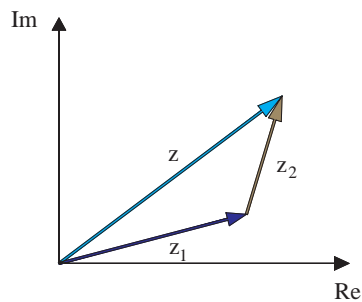


Abb. 7.2. Addition zweier komplexer Zahlen

Die Multiplikation entspricht, unter der Benutzung von $i^2 = -1$, der Anwendung des Distributivgesetzes

$$\begin{aligned} z &= z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) . \end{aligned}$$

Die Division kann dann, wie üblich, als Umkehrung der Multiplikation definiert werden. Die Gleichung $z_1 \cdot z = z_2$ mit unbekanntem $z = x + iy$ entspricht zunächst

$$(x_1x - y_1y) + i(x_1y + xy_1) = x_2 + iy_2 .$$

Vergleich von Real und Imaginärteil ergibt

$$x_1x - y_1y = x_2, \quad x_1y + xy_1 = y_2, \quad (7.1)$$

sowie durch Auflösung nach x, y

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1^2 + y_1^2}. \quad (7.2)$$

Man gewinnt das gleiche Ergebnis, indem man den Bruch z_2/z_1 in geeigneter Weise erweitert

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{(x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1)}{(x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1)}$$

und Zähler und Nenner nach der Multiplikationsregel berechnet

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1)}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Division durch die komplexe Zahl $z = 0 + i0$ ist natürlich nicht sinnvoll.

Die angegebenen Regeln für die Grundrechenarten mit komplexen Zahlen reduzieren sich auf die entsprechenden Regeln für reelle Zahlen falls der Imaginärteil von den Größen z_1 und z_2 verschwindet. Die üblichen Erweiterungen, wie z.B. das Potenzieren einer komplexen Zahl z mit einer natürlichen Zahl n , mit der Rechenregel

$$z^n \cdot z^m = z^{n+m},$$

ergeben sich durch konsequente Anwendung der Grundrechenarten.

Neben der angedeuteten kartesischen Darstellung der komplexen Zahlen ist die **trigonometrische Darstellung** (Abb. 7.3) nützlich, insbesondere auch für die Visualisierung von Multiplikation und Division. In diesem Fall

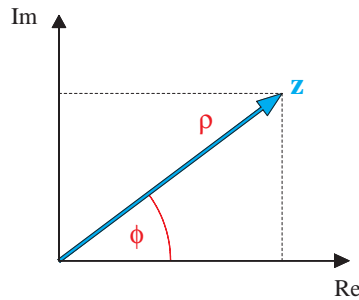


Abb. 7.3. Trigonometrische Zerlegung der komplexen Zahl

stellt man den Real- und den Imaginärteil von $z = x + iy$ durch

$$x = \rho \cos \phi \quad y = \rho \sin \phi$$

dar. Diese Darstellung ist für jedes reelle Zahlenpaar x, y möglich. Die Umkehrung dieser Relationen für den Übergang von der kartesischen in die trigonometrische Darstellung lautet

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \phi = \frac{y}{x}.$$

Die Größe ρ bezeichnet man als den Betrag der komplexen Zahl $|z| = \rho$. Neben dem Betrag benötigt man zur Charakterisierung der komplexen Zahlen den Winkel $\phi \equiv \arg z$. Die trigonometrische Zerlegung entspricht (vergleiche Buch.Kap. 2.4) der Benutzung von ebenen Polarkoordinaten im \mathcal{R}_2 .

Für diverse Grenzwertbetrachtungen im Komplexen benötigt man das Konzept des Abstandes zweier komplexer Zahlen. Eine natürliche Definition dieser Größe ist der Betrag der Differenz (Abb. 7.4)

$$|z| = |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|.$$

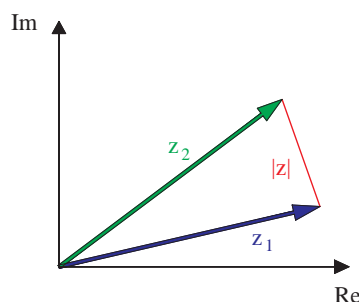


Abb. 7.4. Abstand zweier komplexer Zahlen

Mit der trigonometrischen Darstellung findet man für die Multiplikation von zwei komplexen Zahlen

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$$

nach Ausmultiplizieren und Anwendung der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

$$= \rho_1 \rho_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)).$$

Es ist also

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

In der trigonometrischen Darstellung ist das Produkt durch die Angaben charakterisiert: Der Betrag des Produktes ist das Produkt der Beträge, der

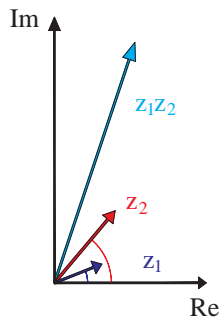


Abb. 7.5. Das Produkt zweier komplexer Zahlen

Winkel ist die Summe der Winkel (Abb. 7.5).

Für die Division findet man

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)) ,$$

das heißt

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{arc} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \text{arc } z_1 - \text{arc } z_2 .$$

In der komplexen Ebene ergibt sich somit für die Division die in Abb. 7.6 dargestellte Situation. Ist insbesondere $z_1 = 1$, so gilt

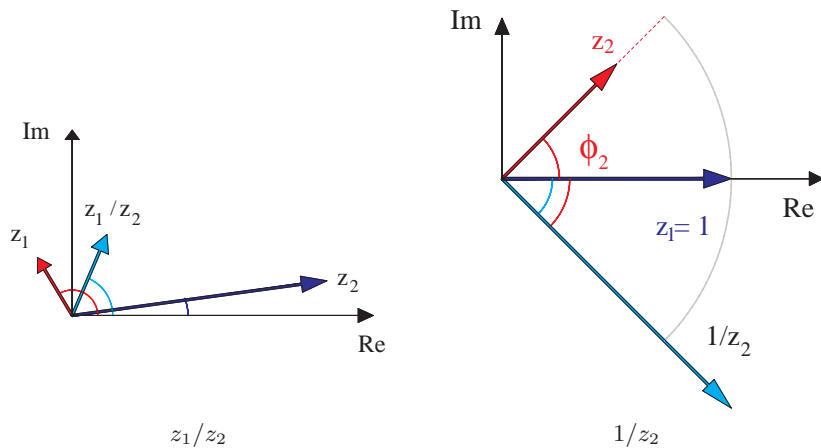


Abb. 7.6. Division komplexer Zahlen

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{\rho_2} (\cos \phi_2 - i \sin \phi_2) .$$

Die Inverse einer komplexen Zahl erhält man durch Spiegelung des Punktes z_2 am Einheitskreis und anschließende Spiegelung an der reellen Achse (die Reihenfolge ist vertauschbar). Das Bild einer am Einheitskreis gespiegelten komplexen Zahl z kann man, wie in Abb. 7.7 angedeutet, elementar-

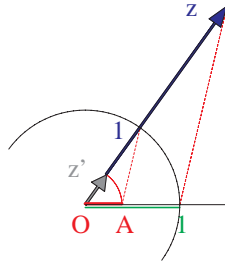


Abb. 7.7. Zum Strahlensatz

geometrisch konstruieren. Die Konstruktion beruht auf der Anwendung des Strahlensatzes in der Form

$$\frac{OA}{1} = \frac{1}{z}$$

oder

$$z \cdot z' = 1 .$$

Eine weitere Operation, die oft benutzt wird, ist die komplexe Konjugation

$$z = x + iy \quad z^* = x - iy ,$$

in trigonometrischer Form

$$z^* = \rho(\cos \phi - i \sin \phi) .$$

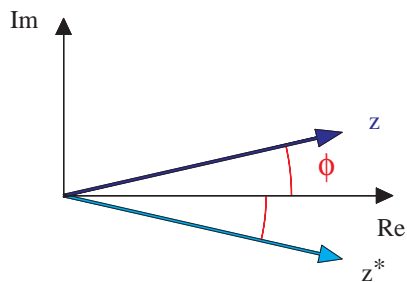


Abb. 7.8. Komplexe Konjugation

Dies entspricht einer Spiegelung an der reellen Achse (Abb. 7.8). Offensichtlich ist das Produkt $z z^*$ eine reelle Zahl.

Die mehrfache Anwendung der Multiplikationsregel ergibt die **Moivre-Formel**

$$\begin{aligned} z^n &= [\rho(\cos \phi + i \sin \phi)]^n \\ &= \rho^n (\cos n\phi + i \sin n\phi) . \end{aligned}$$

Wendet man auf $(\cos \phi + i \sin \phi)^n$ den binomischen Satz an und trennt Real- und Imaginärteil, so gewinnt man eine Darstellung von $\cos n\phi$ und $\sin n\phi$ durch Potenzen von $\cos \phi$ und $\sin \phi$, so z.B. im einfachsten Fall

$$\begin{aligned} (\cos \phi + i \sin \phi)^2 &= (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + 2i \sin \phi \cos \phi \\ &= \cos 2\phi + i \sin 2\phi . \end{aligned}$$

Man kann hier die oft benutzten Relationen für den doppelten Winkel ablesen. In gleicher Weise kann man entsprechende Formeln für die trigonometrischen Funktionen mit dem dreifachen, vierfachen, ... Winkel relativ leicht erzeugen.

7.3 Elementare Funktionen

Eine Funktion von einer komplexen Veränderlichen

$$w = f(z)$$

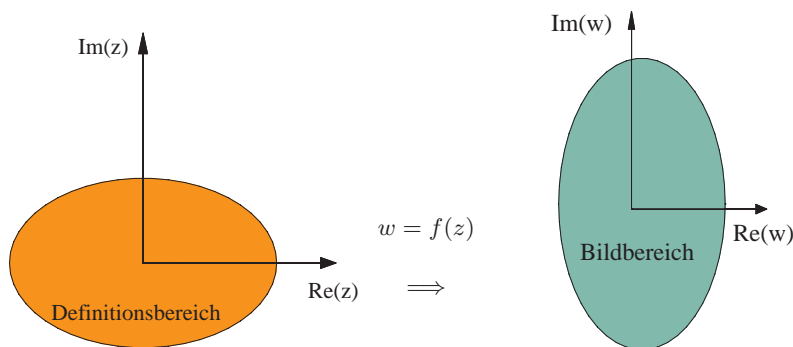


Abb. 7.9. Definitions- und Wertebereich einer Funktion mit einer komplexen Veränderlichen

bildet einen gegebenen Bereich von Punkten der komplexen Zahlenebene (Definitionsbereich) auf einen anderen Bereich von Punkten in der komplexen Zahlenebene (Bildbereich) ab. Zur Veranschaulichung benutzt man zweckmäßigerweise neben der ursprünglichen z -Ebene und eine explizite Bildebene (w).

Einfache Beispiele sind:

- Die lineare Funktion $w = az + b$ mit komplexen Konstanten a, b .
Ist z.B. $a = 1$, $b \neq 0$ (Abb. 7.10), so wird jeder Punkt der z -Ebene um die Konstante b parallel verschoben. Für $a \neq 0$, $b = 0$ (Abb. 7.11) liegt eine

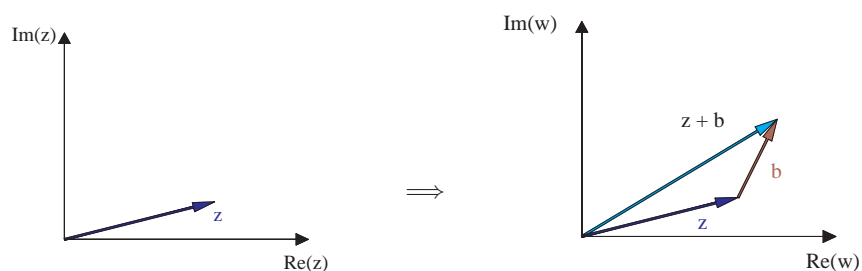


Abb. 7.10. $w = f(z) = 1 \cdot z + b$

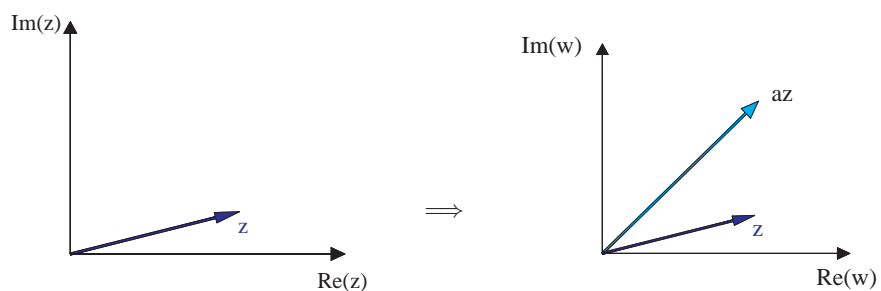
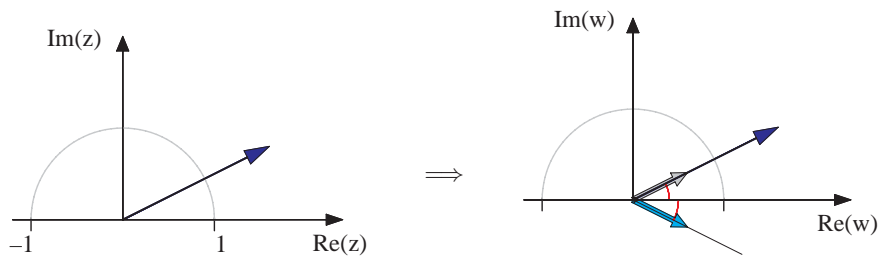
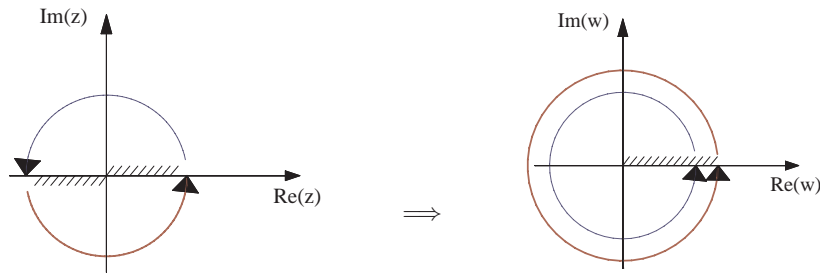


Abb. 7.11. $w = f(z) = a \cdot z$

Drehstreckung vor.

- Die Funktion $w = 1/z$ stellt die Spiegelung am Einheitskreis plus komplexe Konjugation dar. Diese Abbildung besitzt die Fixpunkte ± 1 auf der reellen Achse (Abb. 7.12).
- Die quadratische Funktion $w = z^2$ bildet Punkte der z -Ebene auf eine doppelt belegte Bildebene ab (Abb. 7.13). So werden z.B. Punkte der oberen Halbebene (wegen $\phi_w = 2\phi_z$) auf die gesamte w -Ebene abgebildet. Eine entsprechende Aussage gilt für die Punkte der unteren Halbebene. Um

Abb. 7.12. $w = f(z) = 1/z$ Abb. 7.13. $w = f(z) = z^2$

eine eindeutig umkehrbare Abbildung zu erhalten, benutzt man die Darstellung der Bildfunktion auf **Riemannschen Flächen**.

obere Halbebene (ohne positive reelle Achse)

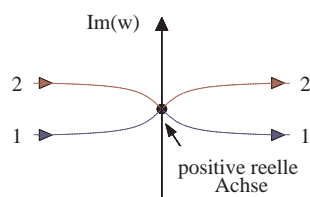
$\text{Im}(z) > 0$, sowie $\text{Im}(z) = 0$ mit $\text{Re}(z) < 0 \rightarrow$ volle w -Ebene

untere Halbebene (ohne negative reelle Achse)

$\text{Im}(z) < 0$, sowie $\text{Im}(z) = 0$, mit $\text{Re}(z) > 0 \rightarrow$ ein zweites Blatt der w -Ebene.

Da man nach dem vollen Umlauf in der z -Ebene wieder auf dem ersten Blatt der w -Ebene landen sollte, denkt man sich die beiden Blätter der w -Ebene entlang der positiven reellen Achse aufgeschnitten und über Kreuz zusammengefügt. Schaut man in die Richtung der Achse, so ergibt sich das in Abb. 7.14 dargestellte Bild.

Man bezeichnet diese doppelt belegte und entlang der reellen Achse zusammengefügte w -Ebene als die Riemannsche Fläche der Funktion $w = z^2$. Auf der Fläche ist jeder Punkt zweimal (auf dem oberen und dem unteren Blatt) belegt, der Nullpunkt ($w = z = 0$) jedoch nur einmal. Dieser Punkt heißt **Verzweigungspunkt** der Fläche. Mit der Riemannschen Konstruk-

**Abb. 7.14.** Riemannsche Flächen

tion für die Funktion $w = z^2$ wird die einfach überstrichene z -Ebene umkehrbar eindeutig auf zwei Blätter der w -Ebene abgebildet.

Trotz der etwas komplizierten Form der Darstellung kann man (mit Nutzen) die gesamte Analysis im Reellen auf den komplexen Fall übertragen. Themen, die bei dieser Erweiterung anstehen würden (siehe Mathematische Ergänzungen, Band 2), sind z.B.

- Zahlenfolgen mit komplexen Gliedern und deren Konvergenz,
- unendliche Reihen einschließlich Potenzreihen,
- Grenzwerte von Funktionen,
- Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen.

(Vergleiche Math.Kap. 1 für entsprechende Punkte bei Funktionen von einer reellen Veränderlichen). So lautet z.B. die Definition der Ableitung einer komplexen Funktion $f(z)$ an der Stelle ζ

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{\zeta} = f'(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}. \quad (7.3)$$

Zu beachten ist dabei insbesondere, dass der Grenzpunkt von allen Seiten angenähert werden kann. Dies führt zu einer Struktur, die sich von der Analysis von Funktionen einer reellen Veränderlichen in einigen (wesentlichen) Punkten unterscheidet.

Es ist üblich, höhere komplexe Funktionen durch ihre Potenzreihen zu definieren. So nennt man die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \dots = e^z$$

die komplexe Exponentialfunktion, da sie für reelles z die übliche Exponentialfunktion darstellt.

Eine kleine Auswahl der Eigenschaften dieser Funktion ist:

1. Die Potenzreihe konvergiert für jedes z absolut. Daraus gewinnt man (durch Multiplikation der Potenzreihen und Sortieren) die Aussage

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

2. Aus dieser Formel folgt

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \quad x, y \text{ reell.}$$

Betrachtet man nun die Potenzreihe für e^{iy} und sortiert nach Real- und Imaginärteil, so findet man

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \quad \operatorname{arc}(e^z) = \operatorname{Im}(z).$$

3. Die Potenzreihe für e^{-iy} ergibt

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y.$$

Aus den Aussagen für $e^{\pm iy}$ folgt dann durch Auflösung nach $\cos y$ bzw. $\sin y$

$$\begin{aligned} \cos y &= \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) \\ \sin y &= \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}). \end{aligned}$$

Dies sind die Relationen, die oft bei der komplexen Darstellung von Schwingungs- oder Wellenphänomenen benutzt werden.

4. Insbesondere folgt aus der Darstellung auch

$$\begin{aligned} e^{2\pi i} &= 1 & e^{\pi i} &= e^{-\pi i} = -1 \\ e^{\pi i/2} &= i & e^{-\pi i/2} &= -i. \end{aligned}$$

Aus der Formel in Punkt 1 folgt dann

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Die Exponentialfunktion ist im Komplexen eine periodische Funktion mit der Periode $2\pi i$. Dies bedeutet, dass durch diese Funktion ein **Fundamentalstreifen** der z -Ebene (man wählt traditionsgemäß $-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$) auf die gesamte w -Ebene abgebildet wird (Abb. 7.15).

Zur Ergänzung dieser sehr kompakten Andeutung der Analysis im Komplexen sollte man die Literaturliste konsultieren.

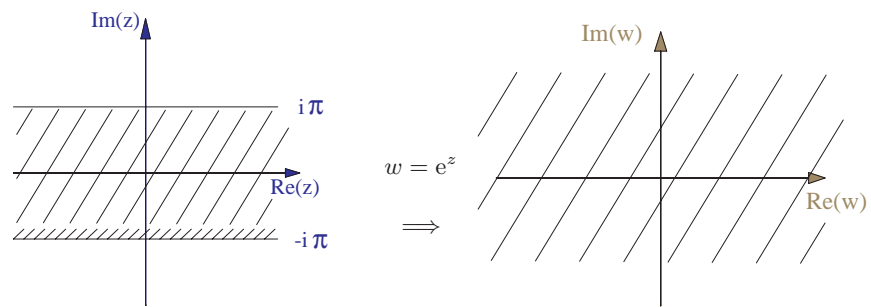


Abb. 7.15. Definitions- und Wertebereich der Funktion e^z

A Literaturverzeichnis

In dem folgenden Verzeichnis enthält eine Liste der im Handel und in den Bibliotheken verfügbaren Lehrbücher der Mathematischen Themen, die in den ‘Ergänzungen’ angesprochen werden. Die Lehrbücher sind, getrennt nach Themenbereichen, in alphabetischer Reihenfolge aufgeführt, die Reihenfolge nimmt also keinen Bezug auf das Niveau oder die Schwierigkeit der Darstellung. Werke, die (soweit den Internet-Seiten der Verlage entnehmbar) nicht mehr im Handel erhältlich sind, sind durch (*) markiert.

Nachschlagewerke

Formelsammlungen

- H.-J. Bartsch: ‘Kleine Formelsammlung Mathematik’ (Hanser Verlag, Leipzig, 1995)
- I. Bronstein, I. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig: ‘Taschenbuch der Mathematik’ (Verlag H. Deutsch, Frankfurt, 2000)
- W. Göhler: ‘Formelsammlung Höhere Mathematik’ (Verlag H. Deutsch, Frankfurt/M, 2001)
- L. Råde, B. Westergren: ‘Springers Mathematische Formeln’ (Springer Verlag, Heidelberg, 2000)
- K. Rottmann: ‘Mathematische Formelsammlung’ (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1991)
- H. Stöcker: ‘Mathematische Formeln und Moderne Verfahren’ (Verlag H. Deutsch, Frankfurt, 1995)
- H. Wörle, H.J. Rumpf, J. Erven: ‘Taschenbuch der Mathematik’ (Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 1994)

Spezielle Funktionen

- M. Abramovitz, I. Stegun: ‘Handbook of Mathematical Functions’ (Dover Publications, New York, 1974)
- (*) W. Magnus, F. Oberhettinger: ‘Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik’ (Springer Verlag, Heidelberg, 1948)

- N. Sieber, H.J. Sebastian: ‘Spezielle Funktionen’ (Teubner Verlag, Wiesbaden, 1988)

Integraltafeln

- A. Apelblat: ‘Tables of Integrals and Series’ (Verlag H. Deutsch, Frankfurt/M, 1996)
- Y. Brytschkow, O. Maritschew, A. Prudnikow: ‘Tabellen unbestimmter Integrale’ (Verlag H. Deutsch, Frankfurt/M, 1992)
- I. Gradshteyn, I. Ryzhik: ‘Summen-, Produkt- und Integraltafeln’ Band I und II (Verlag H. Deutsch, Frankfurt, 1981)
- W. Gröbner, N. Hofreiter: ‘Integraltafel’ Band I und II (Springer Verlag, Wien, 1975 und 1973)
- sowie die entsprechenden Abschnitte der Formelsammlungen

Allgemeine Lehrbücher

- C. Gellrich, R. Gellrich: ‘Mathematik 1-4’ (Verlag H. Deutsch, Frankfurt/M, 1994-2001)
- K. Jänisch: ‘Mathematik 1, 2’ (Springer Verlag, Heidelberg, 2001 und 2002)
- K. Meyberg, P. Vachenauer: ‘Höhere Mathematik 1, 2’ (Springer Verlag, Heidelberg, 2001)
- W. Smirnow: ‘Lehrbuch der höheren Mathematik 7 Bde’ (Verlag H. Deutsch, Frankfurt/M, 1990-2000)
- U. Storch, H. Wiebe: ‘Lehrbuch der Mathematik 1-4’ (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1993-2000)
- R. Wüst: ‘Mathematik für Physiker und Mathematiker’ Band 1 und 2 (Wiley-VHC, Berlin, 2002)

Spezielle Gebiete

Lineare Algebra

- H. Anton: ‘Lineare Algebra’ (Verlag Spektrum der Wissenschaften, Heidelberg, 1995)
- G. Fischer: ‘Lineare Algebra’ (Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2002)
- K. Jänisch: ‘Lineare Algebra’ (Springer Verlag, Heidelberg, 2002)

Analysis

- R. Courant, F. John: ‘Introduction to Calculus and Analysis’ Band I und II/1, II/2 (Springer Verlag, Heidelberg, 1989)

- G.M. Fichtenholz: 'Differential- und Integralrechnung 1-3' (Verlag H. Deutsch, Frankfurt/M, 1990-1997)
- O. Forster: 'Analysis' Band 1 und 2 (Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2001 und 1984)
- H. Heuser: 'Lehrbuch der Analysis 1' (Teubner Verlag, Wiesbaden, 2001)
- S. Hildebrandt: 'Analysis 1' (Springer Verlag, Heidelberg, 2002)
- K. Königsberger: 'Analysis' Band 1, 2 (Springer Verlag, Heidelberg, 2001 und 2002)
- W. Walter: 'Analysis' Band 1, 2 (Springer Verlag, Heidelberg, 2001 und 2002)

Vektoranalysis

- K. Jänisch: 'Vektoranalysis' (Springer Verlag, Heidelberg, 2001)

Gewöhnliche Differentialgleichungen

- V.I. Arnold: 'Gewöhnliche Differentialgleichungen' (Springer Verlag, Heidelberg, 2001)
- L. Collatz: 'Differentialgleichungen' (Teubner Verlag, Wiesbaden, 1990)
- H. Heuser: 'Gewöhnliche Differentialgleichungen' (Teubner Verlag, Wiesbaden, 1995)
- F.J.Elmer: 'Differentialgleichungen in der Physik' (Verlag H. Deutsch, Frankfurt/M, 1997)
- A.D. Poljanin, V.F. Sajzew: 'Sammlung gewöhnlicher Differentialgleichungen' (Verlag H. Deutsch, Frankfurt/M, 1996)
- W. Walter: 'Gewöhnliche Differentialgleichungen' (Springer Verlag, Heidelberg, 2000)

Funktionentheorie

- K. Jänisch: 'Funktionentheorie' (Springer Verlag, Heidelberg, 1999)
- W. Fischer, I. Lieb: 'Funktionentheorie' (Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2002)
- T. Needham: 'Anschauliche Funktionentheorie' (Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2001)
- E. Freitag, R. Busam: 'Funktionentheorie 1' (Springer Verlag, Heidelberg, 2000)
- R. Remmert, G. Schumacher: 'Funktionentheorie 1' (Springer Verlag, Heidelberg, 2002)

Index

- Anfangswertproblem, 40
- Basisvektoren, 60
- Bereichsintegral, 144
- Besselsche Ungleichung, 29
- Binomische Formel, 17
- Binomisches Symbol, 16
- Cauchy-Hauptwert, 34
- Charakteristische Gleichung, 49
- Cramers Regel, 100
- Deltafunktion, 199
- Determinante
 - Cramers Regel, 100
 - Definition, 100, 104
 - Rechenregeln, 106
- Differential
 - totales, 129, 218
- Differentialgleichung
 - Anfangswertproblem, 40
 - charakteristische Gleichung, 49
 - Fuchsscher Typ, 232
 - Fundamentalsystem, 230
 - gewöhnlich
 - Variablentrennung, 217
 - gewöhnliche
 - zweiter Ordnung, 226
 - Grad, 214
 - höherer Grad, 225
 - implizit, 38, 226
 - Indexgleichung, 233
 - Integrabilitätsbedingung, 219
 - Integrationskonstante, 36
 - integrierender Faktor, 222
 - Laplace, 120
 - linear, 229
 - allgemeine Lösung, 47
 - inhomogen, 47, 51
 - Lösung, 229
 - linear, 2. Ordnung, 47, 49
 - numerische Näherungsverfahren, 235
 - Ordnung, 35, 214
 - partiell, 41, 120, 214
 - Partikulärlösung, 39, 230
 - Randwertproblem, 40
 - Rekursionsformeln, 233
 - Superpositionsprinzip, 48, 223, 231
 - Systeme, 215
 - Variablentransformation, 218
 - Variablentrennung, 42
 - Variation der Konstanten, 224
- Differentialquotient, 10
- Differentiation
 - Vektorfelder, 173
- Differenzen-Differentialgleichungen, 216
- Differenzierbarkeit, 10
- Diracsche Deltafunktion, 199
- Distribution, 199
- Divergenz
 - Definition, 174
 - Veranschaulichung, 197
- Divergenztheorem, 194
- Doppelintegral, 143
- Dreifachvektorprodukt, 68
- Eigenwertproblem, algebraisch, 106
 - Eigenvektor, 107
 - Eigenwerte, 107
 - Normierungsbedingung, 107
- Einheitsmatrix, 86
- Einheitsvektoren, 60
- Euler-Cauchy Verfahren, 238
- Exponentialfunktion
 - komplex, 252

- Fakultät
 - Gammafunktion, 140
- Fluss, 192
- Folgen
 - Grenzwert, 4
 - Konvergenz, 5
 - Zahlenfolge, 4
- Fundamentalstreifen, 253
- Funktionaldeterminante, 155
- Funktionen
 - Definition, 1
 - Differentiation
 - partiell, 117
 - Differenzierbarkeit, 10
 - drei Variable, 113
 - explizit, 109
 - Grenzwert, 6
 - n Variable, 115
 - implizit, 112
 - Klassifikation, 11
 - komplex
 - Exponentialfunktion, 252
 - Fundamentalstreifen, 253
 - Riemannsche Flächen, 250
 - Verzweigungspunkt, 251
 - komplexe Veränderliche, 249
 - Kurvenschar, 36
 - periodische, 26
 - Richtungsableitung, 122
 - Stetigkeit, 8
 - n Variable, 116
 - Unstetigkeitsstellen, 9
 - zwei Variable, 109
- Gammafunktion, 139
- Gradient, 174
- Gradientenoperator, 125
 - ebene Polarkoordinaten, 134
 - Kugelkoordinaten, 135
- Grassmannscher Entwicklungssatz, 68
- Grenzwert, 6, 115
 - uneigentliches Integral, 31
- Hessesche Normalform, 65
- Imaginäre Einheit, 243
- Indexgleichung, 233
- Inneres Produkt, 56
- Integrale
 - mit $f(x)$
 - Cauchy-Hauptwert, 34
 - elliptische, 138, 167
 - uneigentlich, Grenzwert, 31
 - uneigentliche, 30
 - vollständige, elliptische, 169
 - mit $f(x, y)$
 - beliebiger Grundbereich, 145
 - Bereichsintegral, 144
 - Doppelintegral, 143
 - einfach, 136
 - einfach, Differentiationsregel, 140
 - einfach, erweiterte Differentiationsregel, 142
 - Substitutionsregel, 151
 - mit $f(x, y, z)$
 - feste Grenzen, 157
 - Substitutionsregel, 163
 - variable Grenzen, 158
- Integralgleichungen, 215
- Integrationskonstante, 36
- Integrodifferentialgleichungen, 216
- Inverse Matrix, 86
- kartesische Komponenten, 62
 - Kettenregel, 132
 - Klassifikation von Funktionen, 11
 - Komplexe Zahlen, 243
 - Abstand, 246
 - Inverse, 248
 - komplexe Konjugation, 248
 - Moivre-Formel, 249
 - Rechenregeln, 243
 - trigonometrische Darstellung, 245
 - Komponentenzerlegung, 62
 - kontravariant, 72
 - kovariant, 72
 - Konvergenz, 5
 - Kriterien, 20
 - Majorantenkriterium, 20
 - Quotientenkriterium, 22
 - radius, 23
 - Taylorreihen, 23
 - Wurzelkriterium, 21
 - Koordinatensystem
 - kartesisch, 60
 - reziprok, 72
 - Kroneckersymbol, 61
 - Kurvenintegration

- Definition Kurvenintegral, 219
- Integrationswege, 179
- Rechenregeln, 178
- Laplaceoperator, 120, 176
 - ebene Polarkoordinaten, 135
 - Kugelkoordinaten, 135
- Levi-Civita Symbol, 62
- Lineare Abhängigkeit, 102
- Lineare Unabhängigkeit, 48
- Matrix
 - Addition, 81
 - Definition, 79
 - Differenz, 82
 - Einheits-, 86
 - gleichartig, 81
 - Hauptdiagonale, 80
 - invers, 86
 - Multiplikation, 82
 - Multiplikation mit Zahl, 81
 - Null-, 82
 - quadratisch, 79
 - Rechenregeln, 82, 87
 - regulär/singulär, 87
 - Spaltenvektor, 80
 - transponiert, 80
 - umkehrbar, 87
 - Zeilenvektor, 80
- Matrixmultiplikation, 82
 - Rechenregeln, 85
- Moivre-Formel, 249
- Näherungsverfahren
 - Ein-/Mehrschritt, 235
 - Euler-Cauchy, 238
 - Mehrschrittverfahren, 235
 - numerisch, 235
 - Runge-Kutta, 238
 - Sehnentrapezformel, 238
 - Simpsonformel, 237
 - Taylormethode, 235
- Nablaalkül, 176
- Nablaoperator, 175
- Oberflächenintegrale, 183
 - Auswertung, 185
 - Doppelbelegung, 188
 - Orientierung, 186
- Operator
 - Gradient, 125
 - Laplace, 120
 - Nabla, 175
- Orthogonalitätsrelationen
 - trigonometrische Funktionen, 28
- Partikulärlösung, 39
- Potenzreihen, 13
 - binomische Reihe, 16
 - Exponentialfunktion, 14
 - geometrische Reihe, 17
 - Taylorentwicklung, 14
 - trigonometrische Funktionen, 15
- Projektion, kodierte, 110
- Randwertproblem, 40
- Raum
 - euklidisch, 62
 - n-dimensional, 70
- Vektor-
 - n-dimensional, 69
- Rechenregeln
 - Determinante, 106
 - Komplexe Zahlen, 243
 - Kurvenintegration, 178
 - Matrix, 82, 87
 - Matrixmultiplikation, 85
 - Nablaoperator, 176
 - partielle Differentiation, 131
 - Vektoren, 63, 70
- Rechte Handregel, 59, 184, 204
- Regel von Sarrus, 103
- Reihen
 - Fourier-, 26
 - Funktionen-, 26
 - numerisch, 18
 - Partialsumme, 18
 - Potenz-, 13
- Richtungsableitung, 122
- Richtungskosinus, 123
- Riemannsche Flächen, 250
- Rotation
 - Definition, 174
 - formal, 209
 - Veranschaulichung, 207
- Runge-Kutta Verfahren, 238
- Satz

- von Gauß, 194
- Beweis, 195
- von Schwarz, 121, 219
- von Stokes, 203
- Beweis, 204
- Schraubenregel, 59, 184, 204
- Sehnentrapezformel, 238
- Simpsonformel, 237
- Skalar, 54
- Skalarfelder, 171
- Skalarprodukt, 56
 - Zerlegungen, 74
- Spatprodukt, 66
- Stetigkeit, 8, 116
- Stokes
 - Satz von, 203
- Superpositionsprinzip, 48, 223, 231
- Symbol
 - binomisch, 16
 - Kronecker, 61
 - Levi-Civita, 62
- Taylorentwicklung, 14
 - Methode von, 235
- Tensor
 - metrisch, 71
- Transformation
 - Drehstreckung, 90, 95
 - Drehung, 78, 95
 - Eulerwinkel, 98
 - Koordinaten-, 75
 - linear, \mathcal{R}_2 , 89
 - linear, \mathcal{R}_3 , 95
 - orthogonal, 92, 95
 - Paritätsoperation, 99
 - Projektion, 91, 95
 - Schraubung, 95
 - Spiegelung, 98
 - Translation, 90
- Variablentrennung, 42
- Variation der Konstanten, 224
- Vektoren
 - äußeres Produkt, 58
 - Addition, 55, 63
 - Basis-, 60
 - Definition, 54
 - Dreifachprodukt, 68
 - Einheits-, 60
 - Grassmannscher Entwicklungssatz, 68
 - inneres Produkt, 56
 - Komponentenzerlegung
 - kartesisch, 62
 - lineare Abhängigkeit, 102
 - Multiplikation mit Skalar, 55, 63
 - Orthogonalität, 57
 - Rechenregeln
 - n-dimensional, 70
 - Rechte Handregel, 59
 - reziprokes Koordinatensystem, 72
 - Schraubenregel, 59
 - Skalarprodukt, 56, 64
 - Spatprodukt, 66
 - Subtraktion, 56, 63
 - Vektorprodukt, 58, 64
 - Zerlegung
 - kontravariant, 72
 - kovariant, 72
- Vektorfelder, 171
 - Differentiation, 173
 - Divergenz, 174
 - Fluss, 192
 - Klassifikation, 211
 - Nablaoperator, 175
 - Quellen/Senken, 193
 - Rotation, 174
 - Zirkulation, 209
- Vektorfunktionen
 - Definition, 171
 - Kurvenintegrale, 177
 - Oberflächenintegral, 183
- Vektorprodukt, 58
- Verzweigungspunkt
 - Riemannsche Flächen, 251
- Vortexfeld, 211
- Wronskideterminante, 48, 229