

Anhang D

Formelsammlung zum Buch „Systemtheorie ohne Ballast“

Formelsammlung zu Kap. 1: Signale

Abschn. 1.1: Signalmodelle

zeitdiskreter Dirac-Impuls $\delta(k) := \begin{cases} 1 : k = 0 \\ 0 : \text{sonst} \end{cases}$

Sprungfunktion

zeitkontinuierlich $\varepsilon(t) := \begin{cases} 0 : t < 0 \\ 1 : t \geq 0 \end{cases}$

zeitdiskret Man erhält die zeitdiskrete Sprungfunktion aus der zeitkontinuierlichen Sprungfunktion durch äquidistante Abtastung mit beliebigem Abtastabstand T gemäß $\varepsilon(kT)$ zu

$$\varepsilon(k) := \begin{cases} 0 : k < 0 \\ 1 : k \geq 0 \end{cases}$$

Rechteckimpuls $r_{[0,\tau]}(t) := \begin{cases} 1 : 0 \leq t < \tau \\ 0 : \text{sonst} \end{cases} = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau)$

sinusförmiges Signal

zeitkontinuierlich $x(t) = A \cdot \cos[2\pi ft + \Phi_0]$, $A \geq 0$

zeitdiskret $x(k) = A \cdot \cos[2\pi fk + \Phi_0]$, $A \geq 0$

komplexwertig $x_c(k) = A \cdot e^{j[2\pi fk + \Phi_0]}$

konstantes Signal $x(k) = A \cdot \cos \Phi_0$ ($f = 0$)

alternierendes Signal $x(k) = A \cdot (-1)^k \cos \Phi_0$ ($f = 1/2$)

Überlagerung $A_1 \cdot \sin[2\pi fk] + A_2 \cdot \cos[2\pi fk] = A \cdot \sin[2\pi fk + \Phi_0]$
mit
 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, $\Phi_0 = \arctan A_2/A_1$

elementare Signaloperationen

Abschn. 1.2

Durch die drei elementaren Signaloperationen kann ein zeitdiskretes Signal wie folgt dargestellt werden:

$$x(k) = \sum_i x(i) \delta(k-i)$$

Abschn. 1.3: Signalräume (zeitdiskret)

Normen	$\ x\ _\infty \leq \ x\ _2 \leq \ x\ _1$
Absolutnorm	$\ x\ _1 := \sum_i x(i) $
Euklidische Norm	$\ x\ _2 := \sqrt{E}$, $E := \sum_i x(i) ^2$ (Signalenergie)
Maximumnorm	$\ x\ _\infty := \sup_i x(i) $

Einschaltvorgänge	Signale mit einem Einschaltzeitpunkt k_1
Ausschaltvorgänge	Signale mit einem Ausschaltzeitpunkt k_2
Signale endlicher Dauer	Signale der Signalbreite $k_2 - k_1$
Nullsignal	Alle Signalwerte sind gleich 0. Es besitzt keinen Ein- und Ausschaltzeitpunkt, aber wird auch als ein Signal endlicher Dauer aufgefasst.
absolut summierbare Signale	$\ x\ _1 < \infty$
Signale endlicher Energie	$\ x\ _2 < \infty$
abklingende Signale	$x(-\infty) = x(\infty) = 0$
beschränkte Signale	$\ x\ _\infty < \infty$
periodische Signale	$x(k + T_0) = x(k)$

DFT	$\text{DFT}_n = \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{T_0-1} x(k) e^{-j 2\pi f_n k}$, $0 \leq n \leq T_0 - 1$, $f_n = n/T_0$
Rücktransformation	$x(k) = \sum_{i=0}^{T_0-1} \text{DFT}_i e^{j 2\pi f_i k}$

Formelsammlung zu Kap. 2: Systeme

Abschn. 2.1: Systembeispiele (zeitdiskret)

Proportionalglied	$y(k) = \lambda x(k), \lambda \in \mathbb{R}$
identisches System	$y(k) = x(k) (\lambda = 1)$
Verzögerungsglied (τ_c)	$y(k) = x(k - c), c \in \mathbb{Z}$
Differenzierer (S_Δ)	$y(k) = x(k) - x(k - 1)$
Summierer (S_{Σ^-})	$y(k) = \sum_{i=-\infty}^k x(i)$
rechtsseitiger Summierer	$y(k) = - \sum_{i=k+1}^{\infty} x(i)$
Grenzwertbilder	$y(k) = x(-\infty)$
Mittelwertbilder (symmetrisch)	$y(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^n x(k-i)$

Wirkungsweise des Differenzierers	$\varepsilon'(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k - 1) = \delta(k)$
--------------------------------------	---

Abschn. 2.2: Systemeigenschaften

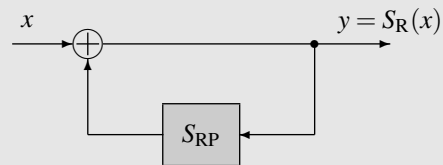
Linearität	$S(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 S(x_1) + \lambda_2 S(x_2), \lambda_i \in \mathbb{R}$
Regel für Nullsignal	$x = 0 \Rightarrow y = 0$
Kriterium für Kausalität	$x(t) = 0 \text{ für } t \leq t_1 \Rightarrow y(t) = 0 \text{ für } t \leq t_1$
Kriterium für Stabilität	$\ y\ _{\infty} \leq C \cdot \ x\ _{\infty}$
Kriterium für Ein- deutigkeit	$y = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Zeitinvarianz	$S(\tau_c(x)) = \tau_c(S(x))$
---------------	-------------------------------

Inverses System
(Umkehrsystem)
Abschn. 2.4

$S^{-1}(S(x)) = x$
Beispiel: Differenzierer und Summierer

Rückkopplung
Abschn. 2.6



Rückkopplungsgl.

$$x + S_{RP}(y) = y$$

System S_{RP}

verzögerndes System im Rückkopplungspfad,
z. B. $S_{RP} = \tau_1$ (Summierer-Rückkopplung)

Grundannahme

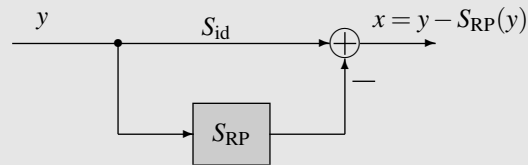
Das Eingangssignal ist ein Einschaltvorgang (Einschaltzeitpunkt k_1) und die Rückkopplung befindet sich vor dem Einschaltzeitpunkt in Ruhe, d. h. es gilt $y(k) = 0$ für $k < k_1$.

als inverses System
Gl. (2.54)

$$S_R = (S_{id} - S_{RP})^{-1}$$

Umkehrung

Die Rückkopplung wird durch $S_R^{-1} = S_{id} - S_{RP}$ umgekehrt:



Summenformel
Voraussetzung:
 S_{RP} linear

$$S_R(x) = \sum_{i \geq 0} S_{RP}^i(x)$$

Diese Formel gilt für einen beliebigen Einschaltzeitpunkt k_1 . Für $k_1 = 0$ geht sie in Gl. (2.55) über:

$$y(k) = \sum_{i=0}^k S_{RP}^i(x)(k)$$

Eigenbewegungen

$$y_0 - S_{RP}(y_0) = 0$$

Formelsammlung zu Kap. 3: Zeitdiskrete Faltungssysteme

Abschn. 3.1: Faltungsdarstellung bei LTI-Systemen

Impulsantwort	$h = S(\delta)$ (Beispiele s. Buch, S. 67) Bis auf Teilsysteme (s. Abschn. 4.1, 4.2) ist die Impulsantwort reellwertig.
---------------	--

Faltungsdarstellung	$y = x * h$ Gilt unter einer der folgenden Voraussetzungen: 1. Das Eingangssignal x ist von endlicher Dauer. 2. Das Eingangssignal ist ein Einschaltvorgang und das System ist kausal.
---------------------	---

Überlagerung von Ausgangssignalen	$y(k) = \sum_i x(i)h(k-i)$
-----------------------------------	----------------------------

Überlagerung von Eingangssignalen	$y(k) = \sum_i h(i)x(k-i)$
-----------------------------------	----------------------------

Dirac-Impuls

Anregung des identischen Systems	$x = x * \delta$
----------------------------------	------------------

Anregung mit dem Dirac-Impuls	$h = \delta * h$
-------------------------------	------------------

Faltung zweier Impulse	$\delta(k-c_1) * \delta(k-c_2) = \delta(k-c)$, $c = c_1 + c_2$
------------------------	---

Faltungssystem	Die Faltungsdarstellung $y = x * h$ gilt für alle Eingangssignale. Bei reellwertiger Impulsantwort ist das Faltungssystem reellwertig: Es antwortet auf ein reellwertiges Eingangssignal mit einem reellwertigen Ausgangssignal.
----------------	---

FIR- und IIR	Für FIR-Filter ist die Impulsantwort von endlicher Dauer, für IIR-Filter nicht.
--------------	---

Gegenbeispiele	Grenzwertbilder und Mittelwertbilder
----------------	--------------------------------------

Linearität	Faltungssysteme sind linear, da die Faltung bilinear ist, d. h. es gilt für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2] * h = \lambda_1 (x_1 * h) + \lambda_2 (x_2 * h)$
------------	---

Zeitinvarianz	Faltungssysteme sind zeitinvariant wegen $\tau_c(x) * h = \tau_c(x * h)$
Kausalität	Die Impulsantwort ist kausal: $h(i) = 0$ für $i < 0$. Der Einschaltzeitpunkt $k_1(h)$ der Impulsantwort ist die Verzögerungszeit oder Latenzzeit des Systems.
Stabilität (Abschn. 3.2)	Die Impulsantwort ist absolut summierbar: $\sum_i h(i) < \infty$
Sprungantwort	$y_\varepsilon = S(\varepsilon)$
kausales LTI-System	$y_\varepsilon(k) = (\varepsilon * h)(k) = \varepsilon(k) \sum_{i=0}^k h(i)$
Impulsantwort	$h = y'_\varepsilon$: Die Impulsantwort eines LTI-Systems ist die Ableitung seiner Sprungantwort.

Abschn. 3.3–3.5: Faltbarkeit, Summen- und Hintereinanderschaltung

Faltbarkeit (Abschn. 3.3)	
Einschaltvorgänge	Die Einschaltzeitpunkte werden addiert.
Ausschaltvorgänge	Die Ausschaltzeitpunkte werden addiert.
Signale endlicher Dauer	Ein- und Ausschaltzeitpunkte werden addiert. Anwendungen: 1. Bei der Hintereinanderschaltung zweier FIR-Filter werden die Filtergrade addiert. 2. Ein Signal x endlicher Dauer erfährt durch eine FIR-Filterung eine Signalverbreiterung um $\text{grad}(\text{FIR})$.
bei Stabilität	Die Anregung eines stabilen Faltungssystems (h) mit einem beschränkten Eingangssignal x liefert ein beschränktes Ausgangssignal $y = x * h$: $\ y\ _\infty \leq \ h\ _1 \cdot \ x\ _\infty$.
Energiesignale	Bei der Hintereinanderschaltung bleibt die Stabilität erhalten: Für $h = h_1 * h_2$ gilt $\ h\ _1 \leq \ h_1\ _1 \cdot \ h_2\ _1$. Die Faltung zweier Energiesignale (x und h) liefert ein beschränktes Signal $y = x * h$: $\ y\ _\infty \leq \ h\ _2 \cdot \ x\ _2$.

FIR-Filter	Ein Faltungssystem mit einer Impulsantwort endlicher Dauer
Gedächtnis	Das Gedächtnis des FIR-Filters ist gleich dem Ausschaltzeitpunkt $k_2(h)$ der Impulsantwort. Dieser Wert entspricht der Anzahl der gespeicherten Eingangswerte bei einer Implementierung des FIR-Filters wie in Abb. 3.2. Er legt die Nachwirkungszeit des Systems fest.
Filtergrad	$\text{grad}(\text{FIR}) = k_2(h) - k_1(h)$
Nullsystem	Das Nullsystem besitzt die Impulsantwort $h = 0$. Es handelt sich um ein FIR-Filter, da das Nullsignal als Signal endlicher Dauer aufgefasst wird (s. Abschn. 1.3). Der Filtergrad ist nicht definiert.

Weitere Regeln für die Faltung (s. auch **Abschn. 3.1**)

Kommutativität	$x * h = h * x$
Distributivität	$x * (h_1 + h_2) = x * h_1 + x * h_2$ Anwendung: Die Summenschaltung zweier Faltungssysteme ist ein Faltungssystem mit der Impulsantwort $h_1 + h_2$.
Assoziativität	$x * (h_1 * h_2) = (x * h_1) * h_2$: Anwendung: Die Hintereinanderschaltung zweier Faltungssysteme ist ein Faltungssystem mit der Impulsantwort $h = h_1 * h_2$. Sie gilt unter einer der drei folgenden Bedingungen: <ol style="list-style-type: none"> 1. h_1 und h_2 sind von endlicher Dauer, x ist beliebig, 2. h_1, h_2 und x sind Einschaltvorgänge, 3. h_1 und h_2 sind absolut summierbar, x ist beschränkt.

Abschn. 3.6: Inverse Faltungssysteme

normierter Einschaltvorgang	$k_1(a) = 0$, $a(0) = 1$
Normierung	$a(k) := \frac{h_1(k + k_1)}{h_1(k_1)}$, $k_1 := k_1(h_1)$

inverse Impulsantwort	$h * h^{-1} = \delta$
Einschaltvorgänge	Der zu einem normierten Einschaltvorgang a inverse Einschaltvorgang $y = a^{-1}$ kann wie folgt rekursiv berechnet werden: $y(0) = 1$, $y(k) = -a(1)y(k-1) - \dots - a(k)y(0)$, $k > 0$.
Beispiel	$\varepsilon * \delta' = \delta$ Der Summierer (Impulsantwort ε) und der Differenzierer (Impulsantwort δ') sind zueinander invers.

Abschn. 3.7 und 3.8: Rückkopplung

Rückkopplung	Es gilt die Grundannahme (s. Abschn. 2.5)
Rückkopplungsgleichung	$x + h_{\text{RP}} * y = y$
Impulsantwort h_{RP}	Das System im Rückkopplungspfad ist ein verzögerndes FIR-Filter. Der Einschaltzeitpunkt von h_{RP} ist daher > 0 .
Hilfs-Impulsantwort	$a := \delta - h_{\text{RP}}$ Das ist die Impulsantwort für $S_{\text{id}} - S_{\text{RP}}$. Damit lautet die Rückkopplungsgleichung $a * y = x$.
als inverses System Gl. (3.62)	$h = a^{-1} = (\delta - h_{\text{RP}})^{-1}$
als „Invertierungsmaschine“	Ein FIR-Filter mit der (normierten) Impulsantwort a wird durch eine Rückkopplung mit $h_{\text{RP}} = \delta - a$ invertiert.
Summenformel	$h(k) = \sum_{i=0}^k h_{\text{RP}}^{*i}(k)$, $k \geq 0$. h_{RP}^{*i} ist eine Faltungspotenz, z. B. $h_{\text{RP}}^{*2} = h_{\text{RP}} * h_{\text{RP}}$.
Eigenbewegungen	$a * y_0 = y_0 - h_{\text{RP}} * y_0 = 0$
Impulsantwort als Eigenbewegung	Die Impulsantwort der Rückkopplung stimmt für $k \geq 0$ mit einer Eigenbewegung überein, welche durch $y_0(i) = 0$ für $i < 0$, $y_0(0) = 1$ festgelegt ist.

Rückkopplung 1. Ordnung

Rückkopplungs- gleichung	$y(k) = x(k) + \lambda y(k-1)$ mit dem Rückkopplungsfaktor λ
Impulsantwort	$h(k) = \varepsilon(k) \lambda^k$
Eigenbewegungen	$y_0(k) = y_0(0) \cdot \lambda^k$
Stabilitätsbereich	$ \lambda < 1$

Abschn. 3.9, 3.10: Realisierbare LTI-Systeme

Definition	Ein realisierbares LTI-System wird mit Hilfe von kausalen FIR-Filtern gebildet, die zusammengesaltet werden, wobei die drei Grundschaltungen (Summenschaltung, Hintereinanderschaltung und Rückkopplung) angewandt werden. Einschränkung: Das System im Rückkopplungspfad ist verzögernd.
Differenzengleichung (DGL der Ordnung N)	$a(0)y(k) + a(1)y(k-1) + \dots + a(N)y(k-N) = b(k_1)x(k-k_1) + \dots + b(k_2)x(k-k_2)$ Normierung: $a(0) := 1$. Es ist $a(N) \neq 0$.
Kurzschreibweise	$a * y = b * x$.
Realisierung	Hintereinanderschaltung eines FIR-Filters mit der Impulsantwort b und einer Rückkopplung mit der Impulsantwort a^{-1} . Das FIR-Filter besitzt den Filtergrad $n := k_2 - k_1$. Seine Latenzzeit k_1 ist auch die Latenzzeit des realisierbaren LTI-Systems.
Sonderfälle	FIR-Filter: $N = 0 : y = b * x$. Rückkopplung: $b = \delta : a * y = x$.
Ausgangssignal	Das Ausgangssignal kann für jedes Eingangssignal rekursiv berechnet werden. Für $x = 0$ erhält man Eigenbewegungen gemäß $a * y_0 = 0$.
Impulsantwort	$h = a^{-1} * b$
nichtreduzierbare DGL	Die Impulsantworten a und b besitzen keinen gemeinsamen Faltungsfaktor g .
Impulsantwort als Eigenbewegung	Die Impulsantwort stimmt für $k \geq k_2$ mit einer Eigenbewegung der Rückkopplung überein.
inverses System	Ein verzögerungsfreies System ($k_1 = 0$) lässt sich durch die DGL $b * y = a * x$ umkehren.

Formelsammlung zu Kap. 4: Frequenzdarstellung realisierbarer LTI-Systeme

Die Abschn. 4.1–4.8 beinhalten eine Frequenzdarstellung für Signale endlicher Dauer. Die Abschn. 4.9–4.11 erweitern die Betrachtung auf Signale unendlicher Dauer.

Abschn. 4.1, 4.2: z-Transformation und Übertragungsfunktion

z-Transformation	$x(k) \mapsto X(z) = \sum_i x(i)z^{-i}$
------------------	---

Übertragungsfunktion	z-Transformierte der Impulsantwort: $H(z) := \sum_i h(i)z^{-i}$
----------------------	--

sinusförmig auf- oder abklingende Anregung	Anregung eines FIR-Filters mit $x(k) = r^k \cdot \cos[2\pi f k + \Phi_0]$ liefert für $z = r \cdot e^{j 2\pi f}$ $y(k) = H(z) \cdot r^k \cdot \cos[2\pi f k + \Phi_0 + \arg H(z)]$. Für $x_c(k) = r^k \cdot e^{j 2\pi f k + \Phi_0}$ folgt $y_c(k) = x_c(k) \cdot H(z)$, $z = r \cdot e^{j 2\pi f}$.
--	---

Faktorisierung eines FIR-Filters, Teilsystem	$H(z) = z^{-k_1} h(k_1) \frac{z - z_1}{z} \dots \frac{z - z_n}{z}$ Der Faktor $(z - z_0)/z$ für eine Nullstelle $z_0 = z_i$ ist die Übertragungsfunktion des Teilsystems mit $h_1(k) = \delta(k) - z_0 \delta(k - 1)$. Für eine nichtreelle Nullstelle ist die Impulsantwort komplexwertig. In diesem Fall erhält man durch Zusammenfassung der Teilsysteme zu den Nullstellen z_0, z_0^* das FIR-Filter mit $h_2(k) = \delta(k) - 2\operatorname{Re}[z_0] \delta(k - 1) + z_0 ^2 \delta(k - 2)$.
--	--

Verzögerungsglied	$H(z) = z^{-c}$
-------------------	-----------------

Differenzierer	$H(z) = 1 - z^{-1} = \frac{z - 1}{z}$
----------------	---------------------------------------

Faltungssatz	$y = x * h \Rightarrow Y(z) = X(z) \cdot H(z)$
--------------	--

Abschn. 4.3, 4.4: Fourier-Transformation und Frequenzfunktion

Fourier-Transformation	<p>Die Fourier-Transformation ordnet einem Signal x seine Frequenzfunktion wie folgt zu:</p> $x^F(f) = \sum_i x(i) e^{-j 2\pi f i} = X(z = e^{j 2\pi f}).$ <p>Betrachtet werden nur reellwertige Signale.</p>
Realteilfunktion	$\operatorname{Re}[x^F(f)] = \sum_i x(i) \cos[2\pi f i]$
Imaginärteilfunktion	$\operatorname{Im}[x^F(f)] = -\sum_i x(i) \sin[2\pi f i]$
Amplitudenfunktion	$ x^F(f) = \sqrt{ \operatorname{Re}[x^F(f)] ^2 + \operatorname{Im}[x^F(f)] ^2}$
Phasenfunktion	$\Phi(f) = \arg[x^F(f)]$ Normierung: $-\pi < \Phi(f) \leq \pi$ Zur Bestimmung des Arguments s. den Abschn. Überblick und Konventionen des Buches.

Frequenzfunktion eines FIR-Filters	<p>Fourier-Transformierte der Impulsantwort:</p> $h^F(f)$
sinusförmige Anregung	<p>Die Anregung eines FIR-Filters mit $x(k) = \cos[2\pi f k + \Phi_0]$ liefert</p> $y(k) = h^F(f) \cdot \cos[2\pi f k + \Phi_0 + \Phi(f)].$ <p>Für $x_c(k) = e^{j 2\pi f k + \Phi_0}$ folgt</p> $y_c(k) = x_c(k) \cdot h^F(f).$
Gruppenlaufzeit	$\tau_g(f) := -\frac{\Phi'(f)}{2\pi}$ <p>Interpretation: $\tau_g(f_0)$ ist die Verzögerungszeit für $f \approx f_0$, wenn $\Phi(f) = \Phi(f_0) + \Phi'(f_0) \cdot (f - f_0)$ näherungsweise erfüllt ist.</p>
Verzögerungsglied	$h^F(f) = e^{-j 2\pi f c}$
Gleitender Mittelwertbilder	$y(k) = 1/3 \cdot [x(k-1) + x(k) + x(k+1)];$ $h^F(f) = 1/3 \cdot \{1 + 2 \cos[2\pi f]\}.$
121-Filter	$y(k) = 1/4 \cdot [x(k-1) + 2x(k) + x(k+1)];$ $h^F(f) = \cos^2[\pi f].$
Differenzierer	$h^F(f) = 2 \sin[\pi f] \cdot e^{j [\pi/2 - \pi f]}.$

Eigenschaften der Frequenzfunktion eines Signals endlicher Dauer

Periodizität	Die Frequenzfunktion sowie die Real- und Imaginärteilkfunktion, die Amplitudenfunktion und Phasenfunktion sind periodisch mit der Periodendauer 1, d. h. es gilt z. B. $x^F(f+1) = x^F(f)$.
Symmetrie	Die Frequenzfunktion ist konjugiert gerade, d. h. es gilt $x^F(-f) = [x^F(f)]^*$. Die Amplitudenfunktion und Realteilkfunktion sind gerade, die Imaginärteilkfunktion ist ungerade. Die Phasenfunktion ist pseudo-ungerade: Für $-\pi < \Phi(f) < \pi$ gilt $\Phi(-f) = -\Phi(f)$. Für $\Phi(f) = \pi$ gilt $\Phi(-f) = \pi$.
Frequenzen $f = 0, 1/2$	Die Frequenzfunktion ist an den Frequenzgrenzen $f = 0$ und $f = 1/2$ durch $x^F(0) = \sum_i x(i), \quad x^F(1/2) = \sum_i x(i)(-1)^i$ gegeben. Die Frequenzfunktion ist an den Frequenzgrenzen daher reellwertig (x reellwertig).
Stetigkeit	Die Frequenzfunktion ist beliebig oft differenzierbar und damit insbesondere stetig. Phasensprünge sind bei einer Frequenz f_0 mit $x^F(f_0) = 0$ möglich (s. Ortskurve).

Rücktransformation

mit der DFT	Für das Signal x endlicher Dauer mit Einschaltzeitpunkt k_1 und Ausschaltzeitpunkt k_2 gilt $x(k) = \frac{1}{T_0} \sum_{i=0}^{T_0-1} x^F(f_i) e^{j2\pi f_i k}, \quad k_1 \leq k \leq k_2,$ $T_0 = k_2 - k_1 + 1, \quad f_i = i/T_0.$
durch Integration	$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} x^F(f) e^{j2\pi f k} df$

Eigenschaften der
Fourier-Transformation
Abschn. 4.5

s. Buch, Tab. 4.5, S. 136

Ortskurve

Abschn. 4.6

Die Ortskurve eines FIR-Filters weist keine Knickpunkte auf. Bei einem Nulldurchgang für $f = f_0$ kann ein Phasensprung um π auftreten, denn es ist

$$\Phi(f) = -q\pi(f - f_0) + q\pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(f - f_0) + \arg[h_1^F(f)].$$

Hierbei ist q die Vielfachheit der Nullstelle $z_0 = e^{j2\pi f_0}$ der Übertragungsfunktion

$$H(z) = [(z - z_0)/z]^q \cdot H_1(z).$$

symmetrische FIR-Filter

Abschn. 4.7

Achsensymmetrie

$$h(k) = \pm h(2k_0 - k)$$

$$\text{Symmetriezentrum: } k_0 = (k_1 + k_2)/2$$

$$h(k) = h(2k_0 - k)$$

Typ 1: k_0 ganzzahlig,

Typ 2: k_0 nichtganzzahlig (z. B. 0.5, 1.5)

Punktsymmetrie

$$h(k) = -h(2k_0 - k)$$

Typ 3: k_0 ganzzahlig,

Typ 4: k_0 nichtganzzahlig

Linearphasigkeit

$$\Phi(f) = P\pi/2 - 2\pi f k_0 + m(f) \cdot \pi$$

mit $P = 0$: Achsensymmetrie, $P = 1$: Punktsymmetrie.

$m(f)$ ist ganzzahlig und für Phasensprünge um π verantwortlich, wenn die Ortskurve durch den Nullpunkt geht.

Gruppenlaufzeit

$$\tau_g(f) = k_0 \text{ (frequenzunabhängig)}$$

Einschränkungen

$$\text{Typ 2: } h^F(1/2) = 0$$

$$\text{Typ 3: } h^F(0) = h^F(1/2) = 0$$

$$\text{Typ 4: } h^F(0) = 0$$

Phasenfunktion für
 $f \rightarrow 0$

$$\text{Achsensymmetrie: } \Phi(f) \rightarrow 0, \pm\pi$$

$$\text{Punktsymmetrie: } \Phi(f) \rightarrow \pm\pi/2$$

Übertragungsfunktion

Die Nullstellen von $H(z)$ liegen entweder auf dem Einheitskreis oder sie treten in Gruppen $z_0, z_0^*, 1/z_0, 1/z_0^*$ auf (s. Buch, Anhang A.2).

Abschn. 4.8: charakteristische Gleichung eines realisierbaren LTI-Systems

charakteristische Gleichung	<p>Die charakteristische Gleichung $A(z) = 0$ lautet ausführlich:</p> $z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N = 0.$ <p>Hierbei ist $a_i := a(i)$ gesetzt.</p>
Zusammenhang mit Eigenbewegungen	<p>Die Anregung des FIR-Filters mit der Impulsantwort a mit $y_0(k) = z^k$ liefert das Ausgangssignal $y(k) = y_0(k) \cdot A(z)$.</p> <p>Folglich ist $y_0(k) = p_0^k$ für $A(p_0) = 0$ eine Eigenbewegung des realisierbaren Systems $a * y = b * x$, d. h. es gilt $a * y_0 = 0$ (s. Abschn. 3.9, 3.10).</p>
Eigenbewegungen	<p>Für jede Wurzel $p_0 = p_0 \cdot e^{j2\pi f_0}$ der Vielfachheit q ergeben sich die folgenden Eigenbewegungen:</p> <p>Für eine reelle Wurzel:</p> $y_0(k) = k^i \cdot p_0^k, \quad 0 \leq i \leq q-1.$ <p>Für eine nichtreelle Wurzel:</p> $y_1(k) = k^i \cdot p_0 ^k \cdot \cos[2\pi f_0 k] \text{ und}$ $y_2(k) = k^i \cdot p_0 ^k \cdot \sin[2\pi f_0 k].$
Faktorisierung	<p>Die Übertragungsfunktion einer normierten Impulsantwort a kann wie folgt faktorisiert werden:</p> $A(z) = \frac{z - p_1}{z} \dots \frac{z - p_N}{z}.$
Invertierung	<p>Eine normierte Impulsantwort a besitzt die inverse Impulsantwort</p> $a^{-1}(k) = [\varepsilon(k)p_1^k] * \dots * [\varepsilon(k)p_N^k].$ <p>Durch Zusammenfassung der Faltungsfaktoren zu den Wurzeln p_0, p_0^* erhält man die reellwertige Impulsantwort</p> $h_2(k) = \varepsilon(k) p_0 ^k \cdot \frac{\sin[2\pi f_0(k+1)]}{\sin[2\pi f_0]}.$
Stabilität	<p>Aus der Darstellung von a^{-1} folgt das Stabilitätskriterium</p> $ p_1 , \dots, p_N < 1.$

Rückkopplung 2. Ordnung

charakteristische Gleichung	$z^2 + a_1 z + a_2 = 0$
Fälle	1. Kriechfall: $a_1^2/4 - a_2 > 0$ 2. Aperiodischer Grenzfall: $a_1^2/4 - a_2 = 0$ 3. Schwingfall: $a_1^2/4 - a_2 < 0 //$
Wurzeln	$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$ <p>Kriechfall: Beide Wurzeln sind reell und verschieden. Aperiodischer Grenzfall: Beide Wurzeln sind reell und gleich. Schwingfall: Wurzeln sind zueinander konjugiert komplex mit $p_{1,2} = \sqrt{a_2} \cdot e^{\pm j 2\pi f_0}$.</p>
Eigenfrequenz	Für den Schwingfall ist die Eigenfrequenz gemäß $2\pi f_0 = \arg p_1$ definiert.
Impulsantwort	<p>Kriechfall:</p> $h(k) = \varepsilon(k) \frac{p_2^{k+1} - p_1^{k+1}}{p_2 - p_1}$ <p>Aperiodischer Grenzfall:</p> $h(k) = \varepsilon(k) p_1^k \cdot (k+1)$ <p>Schwingfall:</p> $h(k) = \varepsilon(k) p_1 ^k \cdot \frac{\sin[2\pi f_0(k+1)]}{\sin[2\pi f_0]}$ <p>Für $a_2 = 1$ ist $p_1 = 1$ und es liegt der Fall einer ungedämpften Schwingung vor.</p>
Stabilität	$1 > a_2 > \begin{cases} a_1 - 1 : a_1 \geq 0 \\ -a_1 - 1 : a_1 \leq 0 \end{cases}$

Abschn. 4.9: z-Transformation für Signale unendlicher Dauer

z-Transformation	<p>Die z-Transformation eines Signales x kann mit Hilfe zweier Potenzreihen gemäß</p> $X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i)z^{-i} + \sum_{i=-\infty}^{-1} x(i)z^{-i}$ <p>definiert werden.</p>
Konvergenzbereich	<p>Mit $1/r_1$ bzw. r_2 wird der Konvergenzradius der ersten bzw. zweiten Potenzreihe bezeichnet. r_1 ist die untere und r_2 die obere Konvergenzgrenze, denn die beiden Potenzreihen konvergieren (absolut) für $r_1 < z < r_2$ und divergieren für $z < r_1$ und $z > r_2$. Einschaltvorgang: $r_2 = \infty$. Signal endlicher Dauer: $r_1 = 0$, $r_2 = \infty$.</p>
Übertragungsfunktion	<p>Die Übertragungsfunktion eines Faltungssystems ist die z-Transformierte seiner Impulsantwort. Beispiel Summierer: $h(k) = \varepsilon(k) \Rightarrow H(z) = \frac{z}{z-1}$, $z > 1$. Beispiel Rückkopplung 1. Ordnung: $h(k) = \varepsilon(k)\lambda^k \Rightarrow H(z) = \frac{z}{z-\lambda}$, $z > \lambda$.</p>
Kriterium für z-Transformierbarkeit	<p>$x(k) \leq C(r) \cdot r^k$, $r_1 < r < r_2$ $C(r)$ bezeichnet eine Konstante, die von r abhängig sein darf.</p>
Faltungssatz	<p>Für zwei Einschaltvorgänge x und h mit der unteren Konvergenzgrenze $r_1(x)$ bzw. $r_1(h)$ ist das Faltungsprodukt $y = x * h$ ebenfalls z-transformierbar mit $Y(z) = X(z) \cdot H(z)$ für $z > r_1 = \max\{r_1(x), r_1(h)\}$.</p>
Umkehrsatz	<p>Der zu einem Einschaltvorgang a inverse Einschaltvorgang $y = a^{-1}$ ist ebenfalls z-transformierbar mit $Y(z) = 1/A(z)$.</p>
Frequenzfunktion	<p>Aus der Bedingung $r_1 < 1 < r_2$ folgt, dass die Frequenzfunktion gemäß $x^F(f) = X(z = e^{j2\pi f})$ gebildet werden kann, also durch Auswertung von $X(z)$ auf dem Einheitskreis. Aus der Bedingung folgt, dass das Signal x (beidseitig) exponentiell abklingend ist. Es ist daher insbesondere absolut summierbar.</p>

Abschn. 4.10: Übertragungsfunktion realisierbarer LTI-Systeme

(s. Abschn. 3.9, 3.10, realisierbare LTI-Systeme)

Übertragungsfunktion	$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$
Beispiele	s. Buch, Tab. 4.10, S. 184
nichtreduzierbar	Die Bedingung für eine nichtreduzierbare DGL $a * y = b * x$ beinhaltet, dass $A(z)$ und $B(z)$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. In diesem Fall sind die Nullstellen p_1, \dots, p_N von $A(z)$ (die Wurzeln der charakteristischen Gleichung) die Polstellen der Übertragungsfunktion.
Konvergenzbereich	Der Konvergenzbereich ist durch den Polradius r_1 gemäß $ z > r_1 = \max\{ p_1 , \dots, p_N \}$ gegeben.
Faktorisierung	$H(z) = z^{-k_1} b(k_1) \frac{z - z_1}{z} \dots \frac{z - z_n}{z} \cdot \frac{z}{z - p_1} \dots \frac{z}{z - p_N},$ z_1, z_n : Nullstellen von $B(z)$ bzw. $H(z)$.
Stabilität	Das System ist genau dann stabil, wenn alle Polstellen im Innern des Einheitskreises liegen, d. h. es gilt für den Polradius $r_1 < 1$.
Invertierung	Die Übertragungsfunktion des inversen Systems ist $\frac{1}{H(z)} = \frac{A(z)}{B(z)}, \quad z > \max\{ z_1 , \dots, z_N \}.$
Partialbruchzerlegung	Bei einer Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion treten Funktionen der Form $H_m(z) = \left(\frac{z}{z - p_0} \right)^m, \quad m > 0$ auf. Sie können als Übertragungsfunktion des Teilsystems mit der Impulsantwort $h_m(k) = \varepsilon(k) p_0^k \cdot \frac{(k+1) \cdots (k+m-1)}{(m-1)!}$ interpretiert werden.

Abschn. 4.11: Frequenzfunktion realisierbarer LTI-Systeme

Frequenzfunktion	$h^F(f) = H(z = e^{j2\pi f}) = \frac{b^F(f)}{a^F(f)}$
Bedingung	Um die Frequenzfunktion bilden zu können, muss das System stabil sein (s. Stabilität).
Grenzverhalten	Bei Anregung des Systems mit dem Einschaltvorgang $x(k) = \varepsilon(k) e^{j2\pi f k}$ nähert sich das Ausgangssignal dem Signal $y_\infty(k) = x(k) \cdot h^F(f)$ für $k \rightarrow \infty$.
Filterwirkung	Ein kleiner Abstand der Nullstellen und Polstellen der Übertragungsfunktion vom Einheitskreis verursacht kleine bzw. große Werte der Amplitudenfunktion.
Allpass	Ein System mit der Amplitudenfunktion $ h^F(f) = 1$ ist ein Allpass. Kriterium für ein realisierbares LTI-System: Das System ist stabil und $a(k)$ und $b(k)$ sind zueinander symmetrisch: $b(k) = \pm a(c - k)$ für ein $c \geq N$. Ein Allpass ist durch die Lage der Nullstellen und Polstellen der Übertragungsfunktion charakterisiert (s. Buch, Anhang A.2).

Formelsammlung zu Kap. 5: Anwendungen und Vertiefungen

Abschn. 5.1: Digitale Regelung

Übertragungsfunktionen

Regler $H_1(z)$

Regelstrecke $H_2(z) = z^{-1} \cdot V \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}}, |z| > |\lambda|.$

Die Parameter $\lambda = e^{-T/\tau}$ und V ergeben sich aus der zeitkontinuierlichen Regelstrecke mit der Sprungantwort $V \cdot \varepsilon(t)(1 - e^{-t/\tau})$ in einem Abtastsystem mit dem Abtastabstand T .

Regelkreis Das Führungsverhalten des Regelkreises beschreibt die Abhängigkeit der Regelgröße (Ist-Wert y) von der Führungsgröße x (Sollwert). Die Übertragungsfunktion lautet

$$H(z) = \frac{1}{1 + 1/H_{1,2}(z)}, H_{1,2}(z) = H_1(z) \cdot H_2(z).$$

$H_{1,2}$ ist die Übertragungsfunktion der Hintereinanderschaltung des Reglers und der Regelstrecke.

verbleibende Regelabweichung $1 - y_\varepsilon(\infty)$

Sie folgt aus dem Endwert der Sprungantwort des Regelkreises:

$$y_\varepsilon(\infty) = H(z=1) = \frac{H_{1,2}(z=1)}{1 + H_{1,2}(z=1)}.$$

Damit die verbleibende Regelabweichung gleich 0 ist, muss $H_{1,2}(z)$ eine Polstelle bei $z = 1$ besitzen.

realer Regler

Er besitzt die Übertragungsfunktion

$$H_1(z) = \frac{1}{V_1(1 - \lambda_1)} \cdot \frac{z - \lambda_1}{z - 1}.$$

Die Parameter V_1 und λ_1 stimmen nicht exakt mit den Parametern V und λ der zeitdiskreten Regelstrecke überein (Fehlanspassung). Sie bestimmen das Regelverhalten (Stabilität, Oszillationen der Sprungantwort des Regelkreises).

Abschn. 5.2: Fourier-Transformation für Signale endlicher Energie

Fourier-Transformation	$x^F(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^n x(i) e^{-j 2\pi f i}$
Parsevalsche Gleichung	Die Frequenzfunktion $x^F(f)$ ist quadratisch integrierbar. Dies kommt durch die Parsevalsche Gleichung $\sum_i x(i) ^2 = \int_{-1/2}^{1/2} x^F(f) ^2 df$ zum Ausdruck. Insbesondere ist $x^F(f)$ auch (absolut) integrierbar.
Regeln	Es gelten wie für Signale endlicher Dauer die Regeln gemäß Buch, Tab. 4.5, S. 136.
Rücktransformation	Es gilt wie für Signale endlicher Dauer die Rücktransformation gemäß $x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} x^F(f) e^{j 2\pi f k} df.$ Einzelne Werte $x^F(f)$ der Frequenzfunktion haben keinen Einfluss auf die Integration bzw. auf $x(k)$.

harmonisches Filter	Impulsantwort: $h(k) = \varepsilon(k-1)/k$. Das IIR-Filter ist kausal, aber nicht stabil. Die Frequenzfunktion ist $h^F(f) = -\ln\{2 \sin[\pi f]\} - j \frac{\pi}{2}(1-2f), \quad 0 < f < 1.$ Sie hat eine Polstelle bei $f = 0$ und ist somit unstetig.
---------------------	--

idealer Tiefpass	Für die Grenzfrequenz f_g und die Verzögerungszeit c lautet die Frequenzfunktion: $h^F(f) = \begin{cases} e^{-j 2\pi f c} & : 0 \leq f \leq f_g \\ 0 & : f_g < f \leq 1/2 \end{cases}.$
Impulsantwort	Durch Rücktransformation erhält man die Impulsantwort $h(k) = 2f_g \cdot \text{si}[2\pi f_g(k-c)]$. $\text{si}(x) := [\sin(x)]/x$ ist die si-Funktion oder Spaltfunktion. Ein idealer Tiefpass ist daher weder stabil noch kausal.
Reihengrenzwert	Der Reihengrenzwert an den Unstetigkeitsstellen $f = \pm f_g$ ist für $c = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^n h(i) e^{-j 2\pi f i} = \frac{h^F(f_g-) + h^F(f_g+)}{2} = 1/2.$

Hilbert–Transformator	Die Frequenzfunktion ist durch eine konstante Amplitudenfunktion $ h^F(f) = 1$ und eine Phasenfunktion mit $\Phi(f) = -\pi/2$, $0 < f < 1/2$ definiert.
Impulsantwort	Durch Rücktransformation erhält man $h(k) = \begin{cases} 2/[\pi k] : k = \pm 1, \pm 3, \dots \\ 0 : \text{sonst} \end{cases}$ Der Hilbert–Transformator ist daher weder stabil noch kausal.
Verzögerer	Die Frequenzfunktion ist durch $h^F(f) = e^{-j2\pi fc}, f < 1/2$ definiert.
Impulsantwort	Durch Rücktransformation erhält man $h(k) = \delta_c(k) := \text{si}[\pi(k - c)].$
Eigenschaften	Für eine ganzzahlige Verzögerungszeit c stimmt der Verzögerer mit dem Verzögerungsglied (Impulsantwort $\delta(k - c)$) überein. Für nichtganzzahlige Verzögerungszeit ist der Verzögerer weder stabil noch kausal. Bei der Hintereinanderschaltung zweier Verzögerer werden die Verzögerungszeiten addiert.
Differenzierer	Die Impulsantwort des Differenzierers ergibt sich aus $\delta_{1/2}(k) * [\delta_{-1/2}(k) - \delta_{1/2}(k)] = \delta(k) - \delta(k - 1).$

Abschn. 5.3: Annäherung eines Faltungssystems durch FIR-Filter

Fensterung	Die Impulsantwort eines FIR-Filters ergibt sich aus der Impulsantwort h des Faltungssystems gemäß $h_n(k) = w_n(k) \cdot h(k).$ w_n bezeichnet die Fensterfunktion mit $w_n(k) = 0$ für $ k > n$.
kausale FIR-Filterung	$g_n(k) = h_n(k - n)$
Rechteckfensterung	Die Fensterfunktion ist durch den Rechteckimpuls $w_n(k) = r_n(k) = r_{[-n,n]}(k)$ gegeben.
Bartlett-Fenster	Die Fensterfunktion ist dreieckförmig gemäß $d_n(k) = \frac{1}{n+1} [r_{n/2}(k) * r_{n/2}(k)].$

Annäherung bei einer Rechteckfensterung

stabile Faltungssysteme	Die Annäherung der Frequenzfunktion $h^F(f)$ durch $h_n^F(f)$ ist gleichmäßig: $ h^F(f) - h_n^F(f) \leq \sum_{ i >n} h(i) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.
beliebige Energiesignale	Die Annäherung der Frequenzfunktion $h^F(f)$ durch $h_n^F(f)$ erfolgt (nur) im quadratischen Mittel: $\int_{-1/2}^{1/2} h^F(f) - h_n^F(f) ^2 df = \sum_{ i >n} h(i) ^2 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.
Beispiele	harmonisches Filter, idealer Tiefpass, Hilbert-Transformator und Verzögerer, s. Buch, Tab. 5.2, S. 250
Dirichlet-Kern	Nach der Produktregel gilt $h_n^F(f) = \int_{-1/2}^{1/2} w_n^F(v) h^F(f - v) dv.$ Für die Rechteckfensterung erhält man den Dirichlet-Kern $r_n^F(f) = \frac{\sin[\pi f(2n+1)]}{\sin[\pi f]}.$

Gibbsches Phänomen	Beim idealen Tiefpass oszilliert die Frequenzfunktion $h_n^F(f)$ in der Nähe der Grenzfrequenz f_g . Für große n beträgt die Abweichung $ h^F(f) - h_n^F(f) $ bei $f \approx f_g \pm 1/(2n)$ ungefähr 8.9 %.
Bartlett-Fenster	Die Frequenzfunktion des Bartlett-Fensters lautet $d_n^F(f) = \frac{1}{n+1} [r_{n/2}^F(f)]^2.$ Da sie nicht negativ ist, werden Oszillationen der Frequenzfunktion $h_n^F(f)$, wie sie bei einer Rechteckfensterung für den idealen Tiefpass auftreten, verhindert.

Abschn. 5.4: Verallgemeinerte Faltungssysteme

Definition	Bei einem verallgemeinerten Faltungssystem wird das Ausgangssignal durch FIR-Filterungen des Eingangssignals angenähert: $y(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(k), \quad y_n = h_n * x,$ wobei h_n die Impulsantwort eines FIR-Filters ist. Im Unterschied zu einem Faltungssystem muss h_n nicht durch Rechteckfensterung aus einer Impulsantwort h (des Faltungssystems) entstehen.
Eingangssignale	Ein Signal x ist nur dann als Eingangssignal erlaubt, wenn der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ für alle Ausgabezeitpunkte k möglich ist. Für den kausalen Mittelwertbildner gilt: Nicht jedes beschränkte Eingangssignal besitzt einen Mittelwert.
Filterkoeffizienten-Schema	Darstellung von $h_n(i)$, wobei n die Zeile definiert und i die Position innerhalb der Zeile

Korrelator	Für ein Signal x_0 liefert $h_n(i) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} x_0(-i) & : 0 \leq i \leq n \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$ die Korrelation zwischen dem Eingangssignal x und dem Signal x_0 gemäß $y(k) = \rho[x_0, x](k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_0(-i) x(k-i).$
------------	--

Beispiele

Systembeispiele
11–17

Tab. 5.4, S. 271 im Buch enthält sieben Beispiele für verallgemeinerte Faltungssysteme. Der Grenzwertbilder und symmetrische Mittelwertbilder aus Abschn. 2.1 gehören dazu. Die Systembeispiele sind keine Faltungssysteme, da ihre Impulsantwort $h = 0$ ist. Daher stellt die Impulsantwort keine Systemcharakteristik dar.

Sinus-Detektor

Der kausale Mittelwertbilder und Sinus-Detektor für alternierende Signale sind beide Sonderfälle des Sinus-Detektors. Er berechnet die Korrelation zwischen dem Eingangssignal x und dem sinusförmigen Signal

$$x_0(i) = \cos[2\pi f_0 i] \text{ für } f_0 = 0 \text{ und } f_0 = 1/2 \text{ bzw.}$$

$$x_0(i) = 2 \cos[2\pi f_0 i] \text{ für } 0 < f_0 < 1/2.$$

Eigenschaften

LTI-Eigenschaft

Verallgemeinerte Faltungssysteme sind LTI-Systeme. Sie sind aber nicht notwendigerweise Faltungssysteme (s. Systembeispiele 11–17).

Faltungsdarstellung

Die Faltungsdarstellung gilt in zwei Fällen:

1. Für Eingangssignale endlicher Dauer.
2. Für Einschaltvorgänge, wenn das verallgemeinerte Faltungssystem kausal ist.

Kausalität

Kausalität liegt vor, wenn $h_n(i) = 0$ für $i < 0$ gilt.

Stabilität

Stabilität liegt vor, wenn $\|h_n\|_1 \leq C$ mit einer oberen Schranke C für alle n gilt.

Die Systembeispiele 11–17 sind alle stabil und damit auch stetig: Kleine Abweichungen zwischen zwei Eingangssignalen führen daher auf kleine Abweichungen zwischen den zugehörigen Ausgangssignalen.

Frequenzfunktion	<p>Sofern der folgende Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durchgeführt werden kann, ist die Frequenzfunktion gemäß $S^F(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^F(f)$ definiert.</p>
Systemcharakteristik	<p>Die Frequenzfunktion ist keine Systemcharakteristik, denn aus der Frequenzfunktion kann nicht auf die Systemoperation geschlossen werden. Die Frequenzfunktion beschreibt das Systemverhalten für periodische Eingangssignale.</p>
sinusförmige Anregung	<p>Wie bei FIR-Filtern oder Faltungssystemen gilt: Die Anregung eines verallgemeinerten Faltungssystems mit $x(k) = \cos[2\pi f k]$ liefert $y(k) = S^F(f) \cdot \cos[2\pi f k + \arg S^F(f)]$.</p> <p>Für $x_c(k) = e^{j 2\pi f k}$ folgt $y_c(k) = x_c(k) \cdot S^F(f)$.</p>
Sinus-Detektor	<p>Die Frequenzfunktion des Sinus-Detektors ist „entartet“, denn sie ist für $0 \leq f \leq 1/2$ nur bei einem einzigen Frequenzwert f_0 ungleich 0 (1). Ein Faltungssystem mit dieser Frequenzfunktion gibt es nicht (s. Buch, S. 236).</p>
Systembeispiele	<p>Sie besitzen die Frequenzfunktion des Sinus-Detektors bis auf Systembeispiel 15: Für dieses System ist $S^F(f) = 0$. Das System detektiert daher ein nichtsinusförmiges Signal x_0, das von sinusförmigen Signalen überlagert wird.</p>
Oszillationen	<p>Die Oszillationen der Frequenzfunktionen $h_n^F(f)$ beim (kausalen) Mittelwertbilder können durch dreieckförmige Fensterung der Impulsantworten h_n vermieden werden (s. Abschn. 5.3). Bei den Filterpotenzen (Systembeispiele 16 und 17) treten sie nicht auf.</p>

Abschn. 5.5: Theorie zeitdiskreter LTI-Systeme

Erzeuger eines Signalraums Mit einer Menge \mathbb{E} von Signalen kann der Signalraum $\Omega = \mathbf{LTI}(\mathbb{E})$, die sog. **LTI-Hülle** von \mathbb{E} , wie folgt gebildet werden:

$$x = \text{FIR}_1(x_1) + \dots + \text{FIR}_n(x_n).$$

Die Signale x_1, \dots, x_n sind aus \mathbb{E} und $\text{FIR}_1, \dots, \text{FIR}_n$ beliebige FIR-Filter.

Die Menge \mathbb{E} ist der Erzeuger von Ω .

Beispiele

s. Buch, Tab. 5.6, S. 294.

Beispiel 8: Der Signalraum $\Omega = \mathbf{LTI}(\varepsilon, 1)$ enthält alle Signale, die bis zu einem ersten Zeitpunkt und ab einem zweiten Zeitpunkt konstant sind.

Beispiel 9: Der Signalraum $\Omega(f) = \mathbf{LTI}(\cos[2\pi f k])$ enthält alle sinusförmigen Signale der Frequenz f .

Signalabhängigkeiten

Intra-Abhängigkeit

Zwischen den Signalwerten eines Signals x besteht eine lineare Abhängigkeit. Sie ist mit Hilfe eines FIR-Filters mit der Impulsantwort $h \neq 0$ gemäß $\text{FIR}(x) = h * x = 0$ darstellbar. Es handelt sich um Eigenbewegungen.

Inter-Abhängigkeit

Zwischen den Signalen x_1, \dots, x_n besteht eine lineare Abhängigkeit, wenn die Gleichung $\text{FIR}_1(x_1) + \dots + \text{FIR}_n(x_n) = 0$ für FIR-Filter FIR_i erfüllbar ist, wobei nicht alle Summanden $\text{FIR}_i(x_i) = 0$ sind.

Generator-Filter

Ein FIR-Filter, dass **primäre** Signalabhängigkeiten darstellt.

1. Für eine Eigenbewegung x_0 ist es ein FIR-Filter, das unter allen FIR-Filtern mit $\text{FIR}(x) = 0$ einen minimalen Filtergrad besitzt.

2. Für einen Signalraum Ω und ein Signal $x_0 \notin \Omega$ ist es ein FIR-Filter, dass unter allen FIR-Filtern mit $\text{FIR}(x_0) \in \Omega$ einen minimalen Filtergrad besitzt.

In beiden Fällen ist das FIR-Filter ungleich 0, da der Filtergrad definiert sein muss.

Unabhängigkeit	<p>Die Signale sind unabhängig, wenn sie nicht abhängig sind:</p> <p>Aus $\text{FIR}_1(x_1) + \dots + \text{FIR}_n(x_n) = 0$ folgt, dass alle Summanden $\text{FIR}_i(x_i) = 0$ sind.</p> <p>Signale einer beliebigen (auch unendlichen) Menge sind unabhängig, wenn jede endliche Auswahl aus dieser Menge unabhängige Signale ergibt.</p>
Beispiel	<p>Die folgenden Signale sind unabhängig:</p> <p>Alle sinusförmigen Signale $x(k) = \cos[2\pi f k]$, $0 \leq f \leq 1/2$ und $\delta(k)$.</p>
Basis	<p>Ein Erzeuger eines Signalraums ist eine Basis des Signalraums, wenn die Signale des Erzeugers unabhängig sind.</p>

Frequenzfunktion	<p>Die Sinusförmigkeit stellt eine spezielle Form der Intra-Abhängigkeit dar. Sie bleibt daher bei der sinusförmigen Anregung eines beliebigen LTI-Systems erhalten — vorausgesetzt, sinusförmige Eingangssignale sind erlaubt. Ein LTI-System besitzt in diesem Fall eine Frequenzfunktion $S^F(f)$.</p>
Voraussetzung	<p>Es wird angenommen, dass das zeitdiskrete LTI-System reellwertig ist und die Linearitätsbeziehung $S(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 S(x_1) + \lambda_2 S(x_2)$ auch für komplexwertige Faktoren λ_i gilt.</p>
sinusförmige Anregung	<p>Die Beziehungen für die sinusförmige Anregung eines verallgemeinerten Faltungssystems (s. Abschn. 5.4) gelten auch für beliebige LTI-Systeme. Sie können daher für die Definition der Frequenzfunktion verwendet werden.</p>
Eigenschaften	<p>Wie für Signale endlicher Dauer ist die Frequenzfunktion periodisch mit der Periodendauer 1. Sie ist konjugiert gerade (Symmetrie) und an den Frequenzgrenzen $f = 0$ und $f = 1/2$ reellwertig.</p> <p>Für die letzten beiden Eigenschaften wird vorausgesetzt, dass das LTI-System reellwertig ist, d. h. es reagiert auf ein reellwertiges Eingangssignal mit einem reellwertigen Ausgangssignal.</p>

Definition eines LTI-Systems mit Hilfe einer Basis

Definition Für $x = \text{FIR}_1(x_1) + \dots + \text{FIR}_n(x_n)$ mit Signalen x_i einer Basis wird das Ausgangssignal gemäß

$$y = S(x) = \text{FIR}_1(y_1) + \dots + \text{FIR}_n(y_n)$$

definiert. Hierbei sind $y_i = S(x_i)$ die Ausgangssignale für Basissignale.

Bedingung: $\text{FIR}_g(y_i) = 0$ für ein Generator-Filter von x_i , falls x_i eine Eigenbewegung ist.

Anwendung

Für den Signalraum

$$\Omega = \text{LTI}(\cos[2\pi f k], 0 \leq f \leq 1/2, \delta(k))$$

kann jede Funktion als Frequenzfunktion definiert werden, die periodisch mit der Periodendauer 1, symmetrisch und an den Frequenzgrenzen $f = 0, 1/2$ reellwertig ist. Ein Zusammenhang zwischen der Frequenzfunktion und der Impulsantwort des LTI-Systems muss nicht bestehen.

Definition eines LTI-Systems mit Hilfe von Signal-Projektoren

direkte Summe

Die **Summe** zweier Signalkäume, $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, ist der Signalkaum, welcher alle Überlagerungen $x = x_1 + x_2$ mit $x_i \in \Omega_i$ enthält.

Eine direkte Summe $\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$ liegt vor, wenn Ω_1 und Ω_2 nur das Nullsignal gemeinsam haben. Dies bedeutet, dass zwischen den Signalen $x_1 \in \Omega_1$ und $x_2 \in \Omega_2$ keine Inter-Abhängigkeit besteht.

Signal-Projektor

Für das Signal $x = x_1 + x_2 \in \Omega_1 \oplus \Omega_2$ sind die beiden Signal-Projektoren durch

$$S_{\text{PR1}}(x) := x_1, S_{\text{PR2}}(x) := x_2$$

definiert. Es liegen LTI-Systeme vor.

Definition

Das Ausgangssignal ist durch

$$y = S(x) = S_1(x_1) + S_2(x_2)$$

definiert, wobei S_i ein beliebiges LTI-System für Eingangssignale aus Ω_i darstellt.

Definition eines LTI-Systems durch Fortsetzung

Definition	<p>Das LTI-System S, welches für Signale des Signalraums Ω definiert ist, soll für ein Signal $x_0 \notin \Omega$ auf den Signalraum $\Omega^+ := \Omega + \mathbf{LTI}(x_0)$ fortgesetzt werden. Ω^+ enthält alle Signale der Form $x_\Omega + \text{FIR}(x_0)$, wobei x_Ω ein Signal aus Ω und FIR ein beliebiges FIR-Filter ist.</p>
Fortsetzung	<p>Die Fortsetzung wird mit S^+ bezeichnet. Sie ist durch das Ausgangssignal $y_0 = S^+(x_0)$ gemäß $S^+(x_\Omega + \text{FIR}(x_0)) = S(x_\Omega) + \text{FIR}(y_0)$ festgelegt.</p>
Fortsetzungsbedingung	<p>Das Signal $y_0 = S^+(x_0)$ muss die folgende Bedingung erfüllen: Für jedes FIR-Filter mit $\text{FIR}(x_0) \in \Omega$ gilt $\text{FIR}(y_0) = S(\text{FIR}(x_0))$.</p> <p>Fall 1: $\text{FIR}(x_0) \in \Omega$ ist nur für das FIR-Filter $\text{FIR} = 0$ erfüllt. Dann ist y_0 beliebig wählbar.</p> <p>Fall 2: Es gibt ein FIR-Filter $\text{FIR} \neq 0$ mit $\text{FIR}(x_0) \in \Omega$. Dann ist die Fortsetzungsbedingung gleichwertig mit $\text{FIRg}(y_0) = S(\text{FIRg}(x_0))$.</p> <p>Hierbei ist FIRg ein Generatorfilter für den Signalraum Ω und das Signal x_0.</p>