

Formelsammlung zu Kap. 3: Zeitdiskrete Faltungssysteme

Abschn. 3.1: Faltungsdarstellung bei LTI-Systemen

Impulsantwort	$h = S(\delta)$ (Beispiele s. Buch, S. 67) Bis auf Teilsysteme (s. Abschn. 4.1, 4.2) ist die Impulsantwort reellwertig.
---------------	--

Faltungsdarstellung	$y = x * h$ Gilt unter einer der folgenden Voraussetzungen: 1. Das Eingangssignal x ist von endlicher Dauer. 2. Das Eingangssignal ist ein Einschaltvorgang und das System ist kausal.
---------------------	---

Überlagerung von Ausgangssignalen	$y(k) = \sum_i x(i)h(k-i)$
-----------------------------------	----------------------------

Überlagerung von Eingangssignalen	$y(k) = \sum_i h(i)x(k-i)$
-----------------------------------	----------------------------

Dirac-Impuls

Anregung des identischen Systems	$x = x * \delta$
----------------------------------	------------------

Anregung mit dem Dirac-Impuls	$h = \delta * h$
-------------------------------	------------------

Faltung zweier Impulse	$\delta(k-c_1) * \delta(k-c_2) = \delta(k-c) , c = c_1 + c_2$
------------------------	---

Faltungssystem	Die Faltungsdarstellung $y = x * h$ gilt für alle Eingangssignale. Bei reellwertiger Impulsantwort ist das Faltungssystem reellwertig: Es antwortet auf ein reellwertiges Eingangssignal mit einem reellwertigen Ausgangssignal.
----------------	---

FIR- und IIR	Für FIR-Filter ist die Impulsantwort von endlicher Dauer, für IIR-Filter nicht.
--------------	---

Gegenbeispiele	Grenzwertbilder und Mittelwertbilder
----------------	--------------------------------------

Linearität	Faltungssysteme sind linear, da die Faltung bilinear ist, d. h. es gilt für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2] * h = \lambda_1 (x_1 * h) + \lambda_2 (x_2 * h)$
------------	---

Zeitinvarianz	Faltungssysteme sind zeitinvariant wegen $\tau_c(x) * h = \tau_c(x * h)$
Kausalität	Die Impulsantwort ist kausal: $h(i) = 0$ für $i < 0$. Der Einschaltzeitpunkt $k_1(h)$ der Impulsantwort ist die Verzögerungszeit oder Latenzzeit des Systems.
Stabilität (Abschn. 3.2)	Die Impulsantwort ist absolut summierbar: $\sum_i h(i) < \infty$
Sprungantwort	$y_\varepsilon = S(\varepsilon)$
kausales LTI-System	$y_\varepsilon(k) = (\varepsilon * h)(k) = \varepsilon(k) \sum_{i=0}^k h(i)$
Impulsantwort	$h = y'_\varepsilon$: Die Impulsantwort eines LTI-Systems ist die Ableitung seiner Sprungantwort.

Abschn. 3.3–3.5: Faltbarkeit, Summen- und Hintereinanderschaltung

Faltbarkeit (Abschn. 3.3)	
Einschaltvorgänge	Die Einschaltzeitpunkte werden addiert.
Ausschaltvorgänge	Die Ausschaltzeitpunkte werden addiert.
Signale endlicher Dauer	Ein- und Ausschaltzeitpunkte werden addiert. Anwendungen: 1. Bei der Hintereinanderschaltung zweier FIR-Filter werden die Filtergrade addiert. 2. Ein Signal x endlicher Dauer erfährt durch eine FIR-Filterung eine Signalverbreiterung um $\text{grad}(\text{FIR})$.
bei Stabilität	Die Anregung eines stabilen Faltungssystems (h) mit einem beschränkten Eingangssignal x liefert ein beschränktes Ausgangssignal $y = x * h$: $\ y\ _\infty \leq \ h\ _1 \cdot \ x\ _\infty$.
Energiesignale	Bei der Hintereinanderschaltung bleibt die Stabilität erhalten: Für $h = h_1 * h_2$ gilt $\ h\ _1 \leq \ h_1\ _1 \cdot \ h_2\ _1$. Die Faltung zweier Energiesignale (x und h) liefert ein beschränktes Signal $y = x * h$: $\ y\ _\infty \leq \ h\ _2 \cdot \ x\ _2$.

FIR-Filter	Ein Faltungssystem mit einer Impulsantwort endlicher Dauer
Gedächtnis	Das Gedächtnis des FIR-Filters ist gleich dem Ausschaltzeitpunkt $k_2(h)$ der Impulsantwort. Dieser Wert entspricht der Anzahl der gespeicherten Eingangswerte bei einer Implementierung des FIR-Filters wie in Abb. 3.2. Er legt die Nachwirkungszeit des Systems fest.
Filtergrad	$\text{grad}(\text{FIR}) = k_2(h) - k_1(h)$
Nullsystem	Das Nullsystem besitzt die Impulsantwort $h = 0$. Es handelt sich um ein FIR-Filter, da das Nullsignal als Signal endlicher Dauer aufgefasst wird (s. Abschn. 1.3). Der Filtergrad ist nicht definiert.

Weitere Regeln für die Faltung (s. auch **Abschn. 3.1**)

Kommutativität	$x * h = h * x$
Distributivität	$x * (h_1 + h_2) = x * h_1 + x * h_2$ Anwendung: Die Summenschaltung zweier Faltungssysteme ist ein Faltungssystem mit der Impulsantwort $h_1 + h_2$.
Assoziativität	$x * (h_1 * h_2) = (x * h_1) * h_2$: Anwendung: Die Hintereinanderschaltung zweier Faltungssysteme ist ein Faltungssystem mit der Impulsantwort $h = h_1 * h_2$. Sie gilt unter einer der drei folgenden Bedingungen: <ol style="list-style-type: none"> 1. h_1 und h_2 sind von endlicher Dauer, x ist beliebig, 2. h_1, h_2 und x sind Einschaltvorgänge, 3. h_1 und h_2 sind absolut summierbar, x ist beschränkt.

Abschn. 3.6: Inverse Faltungssysteme

normierter Einschaltvorgang	$k_1(a) = 0$, $a(0) = 1$
Normierung	$a(k) := \frac{h_1(k + k_1)}{h_1(k_1)}$, $k_1 := k_1(h_1)$

inverse Impulsantwort	$h * h^{-1} = \delta$
Einschaltvorgänge	Der zu einem normierten Einschaltvorgang a inverse Einschaltvorgang $y = a^{-1}$ kann wie folgt rekursiv berechnet werden: $y(0) = 1$, $y(k) = -a(1)y(k-1) - \dots - a(k)y(0)$, $k > 0$.
Beispiel	$\varepsilon * \delta' = \delta$ Der Summierer (Impulsantwort ε) und der Differenzierer (Impulsantwort δ') sind zueinander invers.

Abschn. 3.7 und 3.8: Rückkopplung

Rückkopplung	Es gilt die Grundannahme (s. Abschn. 2.5)
Rückkopplungsgleichung	$x + h_{\text{RP}} * y = y$
Impulsantwort h_{RP}	Das System im Rückkopplungspfad ist ein verzögerndes FIR-Filter. Der Einschaltzeitpunkt von h_{RP} ist daher > 0 .
Hilfs-Impulsantwort	$a := \delta - h_{\text{RP}}$ Das ist die Impulsantwort für $S_{\text{id}} - S_{\text{RP}}$. Damit lautet die Rückkopplungsgleichung $a * y = x$.
als inverses System Gl. (3.62)	$h = a^{-1} = (\delta - h_{\text{RP}})^{-1}$
als „Invertierungsmaschine“	Ein FIR-Filter mit der (normierten) Impulsantwort a wird durch eine Rückkopplung mit $h_{\text{RP}} = \delta - a$ invertiert.
Summenformel	$h(k) = \sum_{i=0}^k h_{\text{RP}}^{*i}(k)$, $k \geq 0$. h_{RP}^{*i} ist eine Faltungspotenz, z. B. $h_{\text{RP}}^{*2} = h_{\text{RP}} * h_{\text{RP}}$.
Eigenbewegungen	$a * y_0 = y_0 - h_{\text{RP}} * y_0 = 0$
Impulsantwort als Eigenbewegung	Die Impulsantwort der Rückkopplung stimmt für $k \geq 0$ mit einer Eigenbewegung überein, welche durch $y_0(i) = 0$ für $i < 0$, $y_0(0) = 1$ festgelegt ist.

Rückkopplung 1. Ordnung

Rückkopplungs- gleichung	$y(k) = x(k) + \lambda y(k-1)$ mit dem Rückkopplungsfaktor λ
Impulsantwort	$h(k) = \varepsilon(k)\lambda^k$
Eigenbewegungen	$y_0(k) = y_0(0) \cdot \lambda^k$
Stabilitätsbereich	$ \lambda < 1$

Abschn. 3.9, 3.10: Realisierbare LTI-Systeme

Definition	Ein realisierbares LTI-System wird mit Hilfe von kausalen FIR-Filtern gebildet, die zusammengesaltet werden, wobei die drei Grundschaltungen (Summenschaltung, Hintereinanderschaltung und Rückkopplung) angewandt werden. Einschränkung: Das System im Rückkopplungspfad ist verzögernd.
Differenzengleichung (DGL der Ordnung N)	$a(0)y(k) + a(1)y(k-1) + \dots + a(N)y(k-N) = b(k_1)x(k-k_1) + \dots + b(k_2)x(k-k_2)$ Normierung: $a(0) := 1$. Es ist $a(N) \neq 0$.
Kurzschreibweise	$a * y = b * x$.
Realisierung	Hintereinanderschaltung eines FIR-Filters mit der Impulsantwort b und einer Rückkopplung mit der Impulsantwort a^{-1} . Das FIR-Filter besitzt den Filtergrad $n := k_2 - k_1$. Seine Latenzzeit k_1 ist auch die Latenzzeit des realisierbaren LTI-Systems.
Sonderfälle	FIR-Filter: $N = 0 : y = b * x$. Rückkopplung: $b = \delta : a * y = x$.
Ausgangssignal	Das Ausgangssignal kann für jedes Eingangssignal rekursiv berechnet werden. Für $x = 0$ erhält man Eigenbewegungen gemäß $a * y_0 = 0$.
Impulsantwort	$h = a^{-1} * b$
nichtreduzierbare DGL	Die Impulsantworten a und b besitzen keinen gemeinsamen Faltungsfaktor g .
Impulsantwort als Eigenbewegung	Die Impulsantwort stimmt für $k \geq k_2$ mit einer Eigenbewegung der Rückkopplung überein.
inverses System	Ein verzögerungsfreies System ($k_1 = 0$) lässt sich durch die DGL $b * y = a * x$ umkehren.