

## Formelsammlung zu Kap. 4: Frequenzdarstellung realisierbarer LTI-Systeme

Die Abschn. 4.1–4.8 beinhalten eine Frequenzdarstellung für Signale endlicher Dauer. Die Abschn. 4.9–4.11 erweitern die Betrachtung auf Signale unendlicher Dauer.

### Abschn. 4.1, 4.2: z-Transformation und Übertragungsfunktion

z-Transformation	$x(k) \mapsto X(z) = \sum_i x(i)z^{-i}$
------------------	---

Übertragungsfunktion	z-Transformierte der Impulsantwort: $H(z) := \sum_i h(i)z^{-i}$
----------------------	--

sinusförmig auf- oder abklingende Anregung	Anregung eines FIR-Filters mit $x(k) = r^k \cdot \cos[2\pi f k + \Phi_0]$ liefert für $z = r \cdot e^{j 2\pi f}$ $y(k) =  H(z)  \cdot r^k \cdot \cos[2\pi f k + \Phi_0 + \arg H(z)]$ .  Für $x_c(k) = r^k \cdot e^{j 2\pi f k + \Phi_0}$ folgt $y_c(k) = x_c(k) \cdot H(z)$ , $z = r \cdot e^{j 2\pi f}$ .
--	---

Faktorisierung eines FIR-Filters, Teilsystem	$H(z) = z^{-k_1} h(k_1) \frac{z - z_1}{z} \dots \frac{z - z_n}{z}$ Der Faktor $(z - z_0)/z$ für eine Nullstelle $z_0 = z_i$ ist die Übertragungsfunktion des Teilsystems mit $h_1(k) = \delta(k) - z_0 \delta(k - 1)$ . Für eine nichtreelle Nullstelle ist die Impulsantwort komplexwertig. In diesem Fall erhält man durch Zusammenfassung der Teilsysteme zu den Nullstellen $z_0, z_0^*$ das FIR-Filter mit $h_2(k) = \delta(k) - 2\operatorname{Re}[z_0] \delta(k - 1) +  z_0 ^2 \delta(k - 2)$ .
--	--

Verzögerungsglied	$H(z) = z^{-c}$
-------------------	-----------------

Differenzierer	$H(z) = 1 - z^{-1} = \frac{z - 1}{z}$
----------------	---------------------------------------

Faltungssatz	$y = x * h \Rightarrow Y(z) = X(z) \cdot H(z)$
--------------	--

**Abschn. 4.3, 4.4: Fourier-Transformation und Frequenzfunktion**

Fourier-Transformation	<p>Die Fourier-Transformation ordnet einem Signal <math>x</math> seine Frequenzfunktion wie folgt zu:</p> $x^F(f) = \sum_i x(i) e^{-j 2\pi f i} = X(z = e^{j 2\pi f}).$ <p>Betrachtet werden nur reellwertige Signale.</p>
Realteilfunktion	$\operatorname{Re}[x^F(f)] = \sum_i x(i) \cos[2\pi f i]$
Imaginärteilfunktion	$\operatorname{Im}[x^F(f)] = -\sum_i x(i) \sin[2\pi f i]$
Amplitudenfunktion	$ x^F(f)  = \sqrt{ \operatorname{Re}[x^F(f)] ^2 +  \operatorname{Im}[x^F(f)] ^2}$
Phasenfunktion	$\Phi(f) = \arg[x^F(f)]$ Normierung: $-\pi < \Phi(f) \leq \pi$ Zur Bestimmung des Arguments s. den Abschn. <b>Überblick und Konventionen</b> des Buches.

  

Frequenzfunktion eines FIR-Filters	<p>Fourier-Transformierte der Impulsantwort:</p> $h^F(f)$
sinusförmige Anregung	<p>Die Anregung eines FIR-Filters mit <math>x(k) = \cos[2\pi f k + \Phi_0]</math> liefert</p> $y(k) =  h^F(f)  \cdot \cos[2\pi f k + \Phi_0 + \Phi(f)].$ <p>Für <math>x_c(k) = e^{j 2\pi f k + \Phi_0}</math> folgt</p> $y_c(k) = x_c(k) \cdot h^F(f).$
Gruppenlaufzeit	$\tau_g(f) := -\frac{\Phi'(f)}{2\pi}$ <p>Interpretation: <math>\tau_g(f_0)</math> ist die Verzögerungszeit für <math>f \approx f_0</math>, wenn <math>\Phi(f) = \Phi(f_0) + \Phi'(f_0) \cdot (f - f_0)</math> näherungsweise erfüllt ist.</p>
Verzögerungsglied	$h^F(f) = e^{-j 2\pi f c}$
Gleitender Mittelwertbilder	$y(k) = 1/3 \cdot [x(k-1) + x(k) + x(k+1)];$ $h^F(f) = 1/3 \cdot \{1 + 2 \cos[2\pi f]\}.$
121-Filter	$y(k) = 1/4 \cdot [x(k-1) + 2x(k) + x(k+1)];$ $h^F(f) = \cos^2[\pi f].$
Differenzierer	$h^F(f) = 2 \sin[\pi f] \cdot e^{j [\pi/2 - \pi f]}.$

## Eigenschaften der Frequenzfunktion eines Signals endlicher Dauer

Periodizität	Die Frequenzfunktion sowie die Real- und Imaginärteildfunktion, die Amplitudenfunktion und Phasenfunktion sind periodisch mit der Periodendauer 1, d. h. es gilt z. B. $x^F(f+1) = x^F(f)$ .
Symmetrie	Die Frequenzfunktion ist konjugiert gerade, d. h. es gilt $x^F(-f) = [x^F(f)]^*$ . Die Amplitudenfunktion und Realteildfunktion sind gerade, die Imaginärteildfunktion ist ungerade. Die Phasenfunktion ist pseudo-ungerade: Für $-\pi < \Phi(f) < \pi$ gilt $\Phi(-f) = -\Phi(f)$ . Für $\Phi(f) = \pi$ gilt $\Phi(-f) = \pi$ .
Frequenzen $f = 0, 1/2$	Die Frequenzfunktion ist an den Frequenzgrenzen $f = 0$ und $f = 1/2$ durch $x^F(0) = \sum_i x(i), \quad x^F(1/2) = \sum_i x(i)(-1)^i$ gegeben. Die Frequenzfunktion ist an den Frequenzgrenzen daher reellwertig ( $x$ reellwertig).
Stetigkeit	Die Frequenzfunktion ist beliebig oft differenzierbar und damit insbesondere stetig. Phasensprünge sind bei einer Frequenz $f_0$ mit $x^F(f_0) = 0$ möglich (s. Ortskurve).

## Rücktransformation

mit der DFT	Für das Signal $x$ endlicher Dauer mit Einschaltzeitpunkt $k_1$ und Ausschaltzeitpunkt $k_2$ gilt $x(k) = \frac{1}{T_0} \sum_{i=0}^{T_0-1} x^F(f_i) e^{j2\pi f_i k}, \quad k_1 \leq k \leq k_2,$ $T_0 = k_2 - k_1 + 1, \quad f_i = i/T_0.$
durch Integration	$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} x^F(f) e^{j2\pi f k} df$

Eigenschaften der  
Fourier-Transformation  
**Abschn. 4.5**

s. Buch, Tab. 4.5, S. 136

## Ortskurve

**Abschn. 4.6**

Die Ortskurve eines FIR-Filters weist keine Knickpunkte auf. Bei einem Nulldurchgang für  $f = f_0$  kann ein Phasensprung um  $\pi$  auftreten, denn es ist

$$\Phi(f) = -q\pi(f - f_0) + q\pi/2 \cdot \operatorname{sgn}(f - f_0) + \arg[h_1^F(f)].$$

Hierbei ist  $q$  die Vielfachheit der Nullstelle  $z_0 = e^{j2\pi f_0}$  der Übertragungsfunktion

$$H(z) = [(z - z_0)/z]^q \cdot H_1(z).$$

## symmetrische FIR-Filter

**Abschn. 4.7**

## Achsensymmetrie

$$h(k) = \pm h(2k_0 - k)$$

$$\text{Symmetriezentrum: } k_0 = (k_1 + k_2)/2$$

$$h(k) = h(2k_0 - k)$$

Typ 1:  $k_0$  ganzzahlig,

Typ 2:  $k_0$  nichtganzzahlig (z. B. 0.5, 1.5)

## Punktsymmetrie

$$h(k) = -h(2k_0 - k)$$

Typ 3:  $k_0$  ganzzahlig,

Typ 4:  $k_0$  nichtganzzahlig

## Linearphasigkeit

$$\Phi(f) = P\pi/2 - 2\pi f k_0 + m(f) \cdot \pi$$

mit  $P = 0$ : Achsensymmetrie,  $P = 1$ : Punktsymmetrie.

$m(f)$  ist ganzzahlig und für Phasensprünge um  $\pi$  verantwortlich, wenn die Ortskurve durch den Nullpunkt geht.

## Gruppenlaufzeit

$$\tau_g(f) = k_0 \text{ (frequenzunabhängig)}$$

## Einschränkungen

$$\text{Typ 2: } h^F(1/2) = 0$$

$$\text{Typ 3: } h^F(0) = h^F(1/2) = 0$$

$$\text{Typ 4: } h^F(0) = 0$$

Phasenfunktion für  
 $f \rightarrow 0$ 

$$\text{Achsensymmetrie: } \Phi(f) \rightarrow 0, \pm\pi$$

$$\text{Punktsymmetrie: } \Phi(f) \rightarrow \pm\pi/2$$

## Übertragungsfunktion

Die Nullstellen von  $H(z)$  liegen entweder auf dem Einheitskreis oder sie treten in Gruppen  $z_0, z_0^*, 1/z_0, 1/z_0^*$  auf (s. Buch, Anhang A.2).

**Abschn. 4.8: charakteristische Gleichung eines realisierbaren LTI-Systems**

charakteristische Gleichung	<p>Die charakteristische Gleichung <math>A(z) = 0</math> lautet ausführlich:</p> $z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N = 0.$ <p>Hierbei ist <math>a_i := a(i)</math> gesetzt.</p>
Zusammenhang mit Eigenbewegungen	<p>Die Anregung des FIR-Filters mit der Impulsantwort <math>a</math> mit <math>y_0(k) = z^k</math> liefert das Ausgangssignal <math>y(k) = y_0(k) \cdot A(z)</math>.</p> <p>Folglich ist <math>y_0(k) = p_0^k</math> für <math>A(p_0) = 0</math> eine Eigenbewegung des realisierbaren Systems <math>a * y = b * x</math>, d. h. es gilt <math>a * y_0 = 0</math> (s. Abschn. 3.9, 3.10).</p>
Eigenbewegungen	<p>Für jede Wurzel <math>p_0 =  p_0  \cdot e^{j2\pi f_0}</math> der Vielfachheit <math>q</math> ergeben sich die folgenden Eigenbewegungen:</p> <p>Für eine reelle Wurzel:</p> $y_0(k) = k^i \cdot p_0^k, \quad 0 \leq i \leq q-1.$ <p>Für eine nichtreelle Wurzel:</p> $y_1(k) = k^i \cdot  p_0 ^k \cdot \cos[2\pi f_0 k] \text{ und}$ $y_2(k) = k^i \cdot  p_0 ^k \cdot \sin[2\pi f_0 k].$
Faktorisierung	<p>Die Übertragungsfunktion einer normierten Impulsantwort <math>a</math> kann wie folgt faktorisiert werden:</p> $A(z) = \frac{z - p_1}{z} \dots \frac{z - p_N}{z}.$
Invertierung	<p>Eine normierte Impulsantwort <math>a</math> besitzt die inverse Impulsantwort</p> $a^{-1}(k) = [\varepsilon(k)p_1^k] * \dots * [\varepsilon(k)p_N^k].$ <p>Durch Zusammenfassung der Faltungsfaktoren zu den Wurzeln <math>p_0, p_0^*</math> erhält man die reellwertige Impulsantwort</p> $h_2(k) = \varepsilon(k)  p_0 ^k \cdot \frac{\sin[2\pi f_0(k+1)]}{\sin[2\pi f_0]}.$
Stabilität	<p>Aus der Darstellung von <math>a^{-1}</math> folgt das Stabilitätskriterium</p> $ p_1 , \dots,  p_N  < 1.$

## Rückkopplung 2. Ordnung

charakteristische Gleichung	$z^2 + a_1 z + a_2 = 0$
Fälle	1. Kriechfall: $a_1^2/4 - a_2 > 0$ 2. Aperiodischer Grenzfall: $a_1^2/4 - a_2 = 0$ 3. Schwingfall: $a_1^2/4 - a_2 < 0 //$
Wurzeln	$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$ <p>Kriechfall: Beide Wurzeln sind reell und verschieden.            Aperiodischer Grenzfall: Beide Wurzeln sind reell und gleich.            Schwingfall: Wurzeln sind zueinander konjugiert komplex mit <math>p_{1,2} = \sqrt{a_2} \cdot e^{\pm j 2\pi f_0}</math>.</p>
Eigenfrequenz	Für den Schwingfall ist die Eigenfrequenz gemäß $2\pi f_0 = \arg p_1$ definiert.
Impulsantwort	<p>Kriechfall:</p> $h(k) = \varepsilon(k) \frac{p_2^{k+1} - p_1^{k+1}}{p_2 - p_1}$ <p>Aperiodischer Grenzfall:</p> $h(k) = \varepsilon(k) p_1^k \cdot (k+1)$ <p>Schwingfall:</p> $h(k) = \varepsilon(k)  p_1 ^k \cdot \frac{\sin[2\pi f_0(k+1)]}{\sin[2\pi f_0]}$ <p>Für <math>a_2 = 1</math> ist <math> p_1  = 1</math> und es liegt der Fall einer ungedämpften Schwingung vor.</p>
Stabilität	$1 > a_2 > \begin{cases} a_1 - 1 : a_1 \geq 0 \\ -a_1 - 1 : a_1 \leq 0 \end{cases}$

**Abschn. 4.9: z-Transformation für Signale unendlicher Dauer**

z-Transformation	<p>Die z-Transformation eines Signales <math>x</math> kann mit Hilfe zweier Potenzreihen gemäß</p> $X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i)z^{-i} + \sum_{i=-\infty}^{-1} x(i)z^{-i}$ <p>definiert werden.</p>
Konvergenzbereich	<p>Mit <math>1/r_1</math> bzw. <math>r_2</math> wird der Konvergenzradius der ersten bzw. zweiten Potenzreihe bezeichnet.  <math>r_1</math> ist die untere und <math>r_2</math> die obere Konvergenzgrenze, denn die beiden Potenzreihen konvergieren (absolut) für <math>r_1 &lt;  z  &lt; r_2</math> und divergieren für <math> z  &lt; r_1</math> und <math> z  &gt; r_2</math>.  Einschaltvorgang: <math>r_2 = \infty</math>.  Signal endlicher Dauer: <math>r_1 = 0</math>, <math>r_2 = \infty</math>.</p>
Übertragungsfunktion	<p>Die Übertragungsfunktion eines Faltungssystems ist die z-Transformierte seiner Impulsantwort.  Beispiel Summierer:  <math>h(k) = \varepsilon(k) \Rightarrow H(z) = \frac{z}{z-1}</math>, <math> z  &gt; 1</math>.  Beispiel Rückkopplung 1. Ordnung:  <math>h(k) = \varepsilon(k)\lambda^k \Rightarrow H(z) = \frac{z}{z-\lambda}</math>, <math> z  &gt;  \lambda </math>.</p>
Kriterium für z-Transformierbarkeit	<p><math> x(k)  \leq C(r) \cdot r^k</math>, <math>r_1 &lt; r &lt; r_2</math>  <math>C(r)</math> bezeichnet eine Konstante, die von <math>r</math> abhängig sein darf.</p>
Faltungssatz	<p>Für zwei Einschaltvorgänge <math>x</math> und <math>h</math> mit der unteren Konvergenzgrenze <math>r_1(x)</math> bzw. <math>r_1(h)</math> ist das Faltungsprodukt <math>y = x * h</math> ebenfalls z-transformierbar mit <math>Y(z) = X(z) \cdot H(z)</math> für <math> z  &gt; r_1 = \max\{r_1(x), r_1(h)\}</math>.</p>
Umkehrrsatz	<p>Der zu einem Einschaltvorgang <math>a</math> inverse Einschaltvorgang <math>y = a^{-1}</math> ist ebenfalls z-transformierbar mit <math>Y(z) = 1/A(z)</math>.</p>
Frequenzfunktion	<p>Aus der Bedingung <math>r_1 &lt; 1 &lt; r_2</math> folgt, dass die Frequenzfunktion gemäß <math>x^F(f) = X(z = e^{j2\pi f})</math> gebildet werden kann, also durch Auswertung von <math>X(z)</math> auf dem Einheitskreis. Aus der Bedingung folgt, dass das Signal <math>x</math> (beidseitig) exponentiell abklingend ist. Es ist daher insbesondere absolut summierbar.</p>

**Abschn. 4.10: Übertragungsfunktion realisierbarer LTI-Systeme**

(s. Abschn. 3.9, 3.10, realisierbare LTI-Systeme)

Übertragungsfunktion	$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$
Beispiele	s. Buch, Tab. 4.10, S. 184
nichtreduzierbar	Die Bedingung für eine nichtreduzierbare DGL $a * y = b * x$ beinhaltet, dass $A(z)$ und $B(z)$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. In diesem Fall sind die Nullstellen $p_1, \dots, p_N$ von $A(z)$ (die Wurzeln der charakteristischen Gleichung) die Polstellen der Übertragungsfunktion.
Konvergenzbereich	Der Konvergenzbereich ist durch den Polradius $r_1$ gemäß $ z  > r_1 = \max\{ p_1 , \dots,  p_N \}$ gegeben.
Faktorisierung	$H(z) = z^{-k_1} b(k_1) \frac{z - z_1}{z} \dots \frac{z - z_n}{z} \cdot \frac{z}{z - p_1} \dots \frac{z}{z - p_N},$ $z_1, z_n$ : Nullstellen von $B(z)$ bzw. $H(z)$ .
Stabilität	Das System ist genau dann stabil, wenn alle Polstellen im Innern des Einheitskreises liegen, d. h. es gilt für den Polradius $r_1 < 1$ .
Invertierung	Die Übertragungsfunktion des inversen Systems ist $\frac{1}{H(z)} = \frac{A(z)}{B(z)}, \quad  z  > \max\{ z_1 , \dots,  z_N \}.$
Partialbruchzerlegung	Bei einer Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion treten Funktionen der Form $H_m(z) = \left( \frac{z}{z - p_0} \right)^m, \quad m > 0$ auf. Sie können als Übertragungsfunktion des Teilsystems mit der Impulsantwort $h_m(k) = \varepsilon(k) p_0^k \cdot \frac{(k+1) \cdots (k+m-1)}{(m-1)!}$ interpretiert werden.



**Abschn. 4.11: Frequenzfunktion realisierbarer LTI-Systeme**

Frequenzfunktion	$h^F(f) = H(z = e^{j2\pi f}) = \frac{b^F(f)}{a^F(f)}$
Bedingung	Um die Frequenzfunktion bilden zu können, muss das System stabil sein (s. Stabilität).
Grenzverhalten	Bei Anregung des Systems mit dem Einschaltvorgang $x(k) = \varepsilon(k) e^{j2\pi f k}$ nähert sich das Ausgangssignal dem Signal $y_\infty(k) = x(k) \cdot h^F(f)$ für $k \rightarrow \infty$ .
Filterwirkung	Ein kleiner Abstand der Nullstellen und Polstellen der Übertragungsfunktion vom Einheitskreis verursacht kleine bzw. große Werte der Amplitudenfunktion.
Allpass	Ein System mit der Amplitudenfunktion $ h^F(f)  = 1$ ist ein Allpass. Kriterium für ein realisierbares LTI-System: Das System ist stabil und $a(k)$ und $b(k)$ sind zueinander symmetrisch: $b(k) = \pm a(c - k)$ für ein $c \geq N$ . Ein Allpass ist durch die Lage der Nullstellen und Polstellen der Übertragungsfunktion charakterisiert (s. Buch, Anhang A.2).