

Formelsammlung zu Kap. 5: Anwendungen und Vertiefungen

Abschn. 5.1: Digitale Regelung

Übertragungsfunktionen

Regler $H_1(z)$

Regelstrecke $H_2(z) = z^{-1} \cdot V \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}}, |z| > |\lambda|.$

Die Parameter $\lambda = e^{-T/\tau}$ und V ergeben sich aus der zeitkontinuierlichen Regelstrecke mit der Sprungantwort $V \cdot \varepsilon(t)(1 - e^{-t/\tau})$ in einem Abtastsystem mit dem Abtastabstand T .

Regelkreis Das Führungsverhalten des Regelkreises beschreibt die Abhängigkeit der Regelgröße (Ist-Wert y) von der Führungsgröße x (Sollwert). Die Übertragungsfunktion lautet

$$H(z) = \frac{1}{1 + 1/H_{1,2}(z)}, H_{1,2}(z) = H_1(z) \cdot H_2(z).$$

$H_{1,2}$ ist die Übertragungsfunktion der Hintereinanderschaltung des Reglers und der Regelstrecke.

verbleibende Regelabweichung $1 - y_\varepsilon(\infty)$

Sie folgt aus dem Endwert der Sprungantwort des Regelkreises:

$$y_\varepsilon(\infty) = H(z=1) = \frac{H_{1,2}(z=1)}{1 + H_{1,2}(z=1)}.$$

Damit die verbleibende Regelabweichung gleich 0 ist, muss $H_{1,2}(z)$ eine Polstelle bei $z = 1$ besitzen.

realer Regler

Er besitzt die Übertragungsfunktion

$$H_1(z) = \frac{1}{V_1(1 - \lambda_1)} \cdot \frac{z - \lambda_1}{z - 1}.$$

Die Parameter V_1 und λ_1 stimmen nicht exakt mit den Parametern V und λ der zeitdiskreten Regelstrecke überein (Fehlanspassung). Sie bestimmen das Regelverhalten (Stabilität, Oszillationen der Sprungantwort des Regelkreises).

Abschn. 5.2: Fourier-Transformation für Signale endlicher Energie

Fourier-Transformation	$x^F(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^n x(i) e^{-j 2\pi f i}$
Parsevalsche Gleichung	Die Frequenzfunktion $x^F(f)$ ist quadratisch integrierbar. Dies kommt durch die Parsevalsche Gleichung $\sum_i x(i) ^2 = \int_{-1/2}^{1/2} x^F(f) ^2 df$ zum Ausdruck. Insbesondere ist $x^F(f)$ auch (absolut) integrierbar.
Regeln	Es gelten wie für Signale endlicher Dauer die Regeln gemäß Buch, Tab. 4.5, S. 136.
Rücktransformation	Es gilt wie für Signale endlicher Dauer die Rücktransformation gemäß $x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} x^F(f) e^{j 2\pi f k} df.$ Einzelne Werte $x^F(f)$ der Frequenzfunktion haben keinen Einfluss auf die Integration bzw. auf $x(k)$.

harmonisches Filter	Impulsantwort: $h(k) = \varepsilon(k-1)/k$. Das IIR-Filter ist kausal, aber nicht stabil. Die Frequenzfunktion ist $h^F(f) = -\ln\{2 \sin[\pi f]\} - j \frac{\pi}{2}(1-2f), \quad 0 < f < 1.$ Sie hat eine Polstelle bei $f = 0$ und ist somit unstetig.
---------------------	--

idealer Tiefpass	Für die Grenzfrequenz f_g und die Verzögerungszeit c lautet die Frequenzfunktion: $h^F(f) = \begin{cases} e^{-j 2\pi f c} & : 0 \leq f \leq f_g \\ 0 & : f_g < f \leq 1/2 \end{cases}.$
Impulsantwort	Durch Rücktransformation erhält man die Impulsantwort $h(k) = 2f_g \cdot \text{si}[2\pi f_g(k-c)]$. $\text{si}(x) := [\sin(x)]/x$ ist die si-Funktion oder Spaltfunktion. Ein idealer Tiefpass ist daher weder stabil noch kausal.
Reihengrenzwert	Der Reihengrenzwert an den Unstetigkeitsstellen $f = \pm f_g$ ist für $c = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^n h(i) e^{-j 2\pi f i} = \frac{h^F(f_g-) + h^F(f_g+)}{2} = 1/2.$

Hilbert–Transformator	Die Frequenzfunktion ist durch eine konstante Amplitudenfunktion $ h^F(f) = 1$ und eine Phasenfunktion mit $\Phi(f) = -\pi/2$, $0 < f < 1/2$ definiert.
Impulsantwort	Durch Rücktransformation erhält man $h(k) = \begin{cases} 2/[\pi k] : k = \pm 1, \pm 3, \dots \\ 0 : \text{sonst} \end{cases}$ Der Hilbert–Transformator ist daher weder stabil noch kausal.
Verzögerer	Die Frequenzfunktion ist durch $h^F(f) = e^{-j2\pi fc}, f < 1/2$ definiert.
Impulsantwort	Durch Rücktransformation erhält man $h(k) = \delta_c(k) := \text{si}[\pi(k - c)].$
Eigenschaften	Für eine ganzzahlige Verzögerungszeit c stimmt der Verzögerer mit dem Verzögerungsglied (Impulsantwort $\delta(k - c)$) überein. Für nichtganzzahlige Verzögerungszeit ist der Verzögerer weder stabil noch kausal. Bei der Hintereinanderschaltung zweier Verzögerer werden die Verzögerungszeiten addiert.
Differenzierer	Die Impulsantwort des Differenzierers ergibt sich aus $\delta_{1/2}(k) * [\delta_{-1/2}(k) - \delta_{1/2}(k)] = \delta(k) - \delta(k - 1).$

Abschn. 5.3: Annäherung eines Faltungssystems durch FIR-Filter

Fensterung	Die Impulsantwort eines FIR-Filters ergibt sich aus der Impulsantwort h des Faltungssystems gemäß $h_n(k) = w_n(k) \cdot h(k).$ w_n bezeichnet die Fensterfunktion mit $w_n(k) = 0$ für $ k > n$.
kausale FIR-Filterung	$g_n(k) = h_n(k - n)$
Rechteckfensterung	Die Fensterfunktion ist durch den Rechteckimpuls $w_n(k) = r_n(k) = r_{[-n,n]}(k)$ gegeben.
Bartlett-Fenster	Die Fensterfunktion ist dreieckförmig gemäß $d_n(k) = \frac{1}{n+1} [r_{n/2}(k) * r_{n/2}(k)].$

Annäherung bei einer Rechteckfensterung

stabile Faltungssysteme	Die Annäherung der Frequenzfunktion $h^F(f)$ durch $h_n^F(f)$ ist gleichmäßig: $ h^F(f) - h_n^F(f) \leq \sum_{ i >n} h(i) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.
beliebige Energiesignale	Die Annäherung der Frequenzfunktion $h^F(f)$ durch $h_n^F(f)$ erfolgt (nur) im quadratischen Mittel: $\int_{-1/2}^{1/2} h^F(f) - h_n^F(f) ^2 df = \sum_{ i >n} h(i) ^2 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.
Beispiele	harmonisches Filter, idealer Tiefpass, Hilbert-Transformator und Verzögerer, s. Buch, Tab. 5.2, S. 250
Dirichlet-Kern	Nach der Produktregel gilt $h_n^F(f) = \int_{-1/2}^{1/2} w_n^F(v) h^F(f - v) dv.$ Für die Rechteckfensterung erhält man den Dirichlet-Kern $r_n^F(f) = \frac{\sin[\pi f(2n+1)]}{\sin[\pi f]}.$

Gibbsches Phänomen	Beim idealen Tiefpass oszilliert die Frequenzfunktion $h_n^F(f)$ in der Nähe der Grenzfrequenz f_g . Für große n beträgt die Abweichung $ h^F(f) - h_n^F(f) $ bei $f \approx f_g \pm 1/(2n)$ ungefähr 8.9 %.
Bartlett-Fenster	Die Frequenzfunktion des Bartlett-Fensters lautet $d_n^F(f) = \frac{1}{n+1} [r_{n/2}^F(f)]^2.$ Da sie nicht negativ ist, werden Oszillationen der Frequenzfunktion $h_n^F(f)$, wie sie bei einer Rechteckfensterung für den idealen Tiefpass auftreten, verhindert.

Abschn. 5.4: Verallgemeinerte Faltungssysteme

Definition	Bei einem verallgemeinerten Faltungssystem wird das Ausgangssignal durch FIR-Filterungen des Eingangssignals angenähert: $y(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(k), \quad y_n = h_n * x,$ wobei h_n die Impulsantwort eines FIR-Filters ist. Im Unterschied zu einem Faltungssystem muss h_n nicht durch Rechteckfensterung aus einer Impulsantwort h (des Faltungssystems) entstehen.
Eingangssignale	Ein Signal x ist nur dann als Eingangssignal erlaubt, wenn der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ für alle Ausgabezeitpunkte k möglich ist. Für den kausalen Mittelwertbildner gilt: Nicht jedes beschränkte Eingangssignal besitzt einen Mittelwert.
Filterkoeffizienten-Schema	Darstellung von $h_n(i)$, wobei n die Zeile definiert und i die Position innerhalb der Zeile

Korrelator	Für ein Signal x_0 liefert $h_n(i) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} x_0(-i) & : 0 \leq i \leq n \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$ die Korrelation zwischen dem Eingangssignal x und dem Signal x_0 gemäß $y(k) = \rho[x_0, x](k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_0(-i) x(k-i).$
------------	--

Beispiele

Systembeispiele
11–17

Tab. 5.4, S. 271 im Buch enthält sieben Beispiele für verallgemeinerte Faltungssysteme. Der Grenzwertbilder und symmetrische Mittelwertbilder aus Abschn. 2.1 gehören dazu. Die Systembeispiele sind keine Faltungssysteme, da ihre Impulsantwort $h = 0$ ist. Daher stellt die Impulsantwort keine Systemcharakteristik dar.

Sinus-Detektor

Der kausale Mittelwertbilder und Sinus-Detektor für alternierende Signale sind beide Sonderfälle des Sinus-Detektors. Er berechnet die Korrelation zwischen dem Eingangssignal x und dem sinusförmigen Signal

$$x_0(i) = \cos[2\pi f_0 i] \text{ für } f_0 = 0 \text{ und } f_0 = 1/2 \text{ bzw.}$$

$$x_0(i) = 2 \cos[2\pi f_0 i] \text{ für } 0 < f_0 < 1/2.$$

Eigenschaften

LTI-Eigenschaft

Verallgemeinerte Faltungssysteme sind LTI-Systeme. Sie sind aber nicht notwendigerweise Faltungssysteme (s. Systembeispiele 11–17).

Faltungsdarstellung

Die Faltungsdarstellung gilt in zwei Fällen:

1. Für Eingangssignale endlicher Dauer.
2. Für Einschaltvorgänge, wenn das verallgemeinerte Faltungssystem kausal ist.

Kausalität

Kausalität liegt vor, wenn $h_n(i) = 0$ für $i < 0$ gilt.

Stabilität

Stabilität liegt vor, wenn $\|h_n\|_1 \leq C$ mit einer oberen Schranke C für alle n gilt.

Die Systembeispiele 11–17 sind alle stabil und damit auch stetig: Kleine Abweichungen zwischen zwei Eingangssignalen führen daher auf kleine Abweichungen zwischen den zugehörigen Ausgangssignalen.

Frequenzfunktion	<p>Sofern der folgende Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durchgeführt werden kann, ist die Frequenzfunktion gemäß $S^F(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^F(f)$ definiert.</p>
Systemcharakteristik	<p>Die Frequenzfunktion ist keine Systemcharakteristik, denn aus der Frequenzfunktion kann nicht auf die Systemoperation geschlossen werden. Die Frequenzfunktion beschreibt das Systemverhalten für periodische Eingangssignale.</p>
sinusförmige Anregung	<p>Wie bei FIR-Filtern oder Faltungssystemen gilt: Die Anregung eines verallgemeinerten Faltungssystems mit $x(k) = \cos[2\pi f k]$ liefert $y(k) = S^F(f) \cdot \cos[2\pi f k + \arg S^F(f)]$.</p> <p>Für $x_c(k) = e^{j 2\pi f k}$ folgt $y_c(k) = x_c(k) \cdot S^F(f)$.</p>
Sinus-Detektor	<p>Die Frequenzfunktion des Sinus-Detektors ist „entartet“, denn sie ist für $0 \leq f \leq 1/2$ nur bei einem einzigen Frequenzwert f_0 ungleich 0 (1). Ein Faltungssystem mit dieser Frequenzfunktion gibt es nicht (s. Buch, S. 236).</p>
Systembeispiele	<p>Sie besitzen die Frequenzfunktion des Sinus-Detektors bis auf Systembeispiel 15: Für dieses System ist $S^F(f) = 0$. Das System detektiert daher ein nichtsinusförmiges Signal x_0, das von sinusförmigen Signalen überlagert wird.</p>
Oszillationen	<p>Die Oszillationen der Frequenzfunktionen $h_n^F(f)$ beim (kausalen) Mittelwertbildern können durch dreieckförmige Fensterung der Impulsantworten h_n vermieden werden (s. Abschn. 5.3). Bei den Filterpotenzen (Systembeispiele 16 und 17) treten sie nicht auf.</p>

Abschn. 5.5: Theorie zeitdiskreter LTI-Systeme

Erzeuger eines Signalraums Mit einer Menge \mathbb{E} von Signalen kann der Signalraum $\Omega = \mathbf{LTI}(\mathbb{E})$, die sog. **LTI-Hülle** von \mathbb{E} , wie folgt gebildet werden:

$$x = \text{FIR}_1(x_1) + \dots + \text{FIR}_n(x_n).$$

Die Signale x_1, \dots, x_n sind aus \mathbb{E} und $\text{FIR}_1, \dots, \text{FIR}_n$ beliebige FIR-Filter.

Die Menge \mathbb{E} ist der Erzeuger von Ω .

Beispiele

s. Buch, Tab. 5.6, S. 294.

Beispiel 8: Der Signalraum $\Omega = \mathbf{LTI}(\varepsilon, 1)$ enthält alle Signale, die bis zu einem ersten Zeitpunkt und ab einem zweiten Zeitpunkt konstant sind.

Beispiel 9: Der Signalraum $\Omega(f) = \mathbf{LTI}(\cos[2\pi f k])$ enthält alle sinusförmigen Signale der Frequenz f .

Signalabhängigkeiten

Intra-Abhängigkeit

Zwischen den Signalwerten eines Signals x besteht eine lineare Abhängigkeit. Sie ist mit Hilfe eines FIR-Filters mit der Impulsantwort $h \neq 0$ gemäß $\text{FIR}(x) = h * x = 0$ darstellbar. Es handelt sich um Eigenbewegungen.

Inter-Abhängigkeit

Zwischen den Signalen x_1, \dots, x_n besteht eine lineare Abhängigkeit, wenn die Gleichung $\text{FIR}_1(x_1) + \dots + \text{FIR}_n(x_n) = 0$ für FIR-Filter FIR_i erfüllbar ist, wobei nicht alle Summanden $\text{FIR}_i(x_i) = 0$ sind.

Generator-Filter

Ein FIR-Filter, dass **primäre** Signalabhängigkeiten darstellt.

1. Für eine Eigenbewegung x_0 ist es ein FIR-Filter, das unter allen FIR-Filtern mit $\text{FIR}(x) = 0$ einen minimalen Filtergrad besitzt.

2. Für einen Signalraum Ω und ein Signal $x_0 \notin \Omega$ ist es ein FIR-Filter, dass unter allen FIR-Filtern mit $\text{FIR}(x_0) \in \Omega$ einen minimalen Filtergrad besitzt.

In beiden Fällen ist das FIR-Filter ungleich 0, da der Filtergrad definiert sein muss.

Unabhängigkeit	<p>Die Signale sind unabhängig, wenn sie nicht abhängig sind:</p> <p>Aus $\text{FIR}_1(x_1) + \dots + \text{FIR}_n(x_n) = 0$ folgt, dass alle Summanden $\text{FIR}_i(x_i) = 0$ sind.</p> <p>Signale einer beliebigen (auch unendlichen) Menge sind unabhängig, wenn jede endliche Auswahl aus dieser Menge unabhängige Signale ergibt.</p>
Beispiel	<p>Die folgenden Signale sind unabhängig:</p> <p>Alle sinusförmigen Signale $x(k) = \cos[2\pi f k]$, $0 \leq f \leq 1/2$ und $\delta(k)$.</p>
Basis	<p>Ein Erzeuger eines Signalraums ist eine Basis des Signalraums, wenn die Signale des Erzeugers unabhängig sind.</p>

Frequenzfunktion	<p>Die Sinusförmigkeit stellt eine spezielle Form der Intra-Abhängigkeit dar. Sie bleibt daher bei der sinusförmigen Anregung eines beliebigen LTI-Systems erhalten — vorausgesetzt, sinusförmige Eingangssignale sind erlaubt. Ein LTI-System besitzt in diesem Fall eine Frequenzfunktion $S^F(f)$.</p>
Voraussetzung	<p>Es wird angenommen, dass das zeitdiskrete LTI-System reellwertig ist und die Linearitätsbeziehung $S(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 S(x_1) + \lambda_2 S(x_2)$ auch für komplexwertige Faktoren λ_i gilt.</p>
sinusförmige Anregung	<p>Die Beziehungen für die sinusförmige Anregung eines verallgemeinerten Faltungssystems (s. Abschn. 5.4) gelten auch für beliebige LTI-Systeme. Sie können daher für die Definition der Frequenzfunktion verwendet werden.</p>
Eigenschaften	<p>Wie für Signale endlicher Dauer ist die Frequenzfunktion periodisch mit der Periodendauer 1. Sie ist konjugiert gerade (Symmetrie) und an den Frequenzgrenzen $f = 0$ und $f = 1/2$ reellwertig.</p> <p>Für die letzten beiden Eigenschaften wird vorausgesetzt, dass das LTI-System reellwertig ist, d. h. es reagiert auf ein reellwertiges Eingangssignal mit einem reellwertigen Ausgangssignal.</p>

Definition eines LTI-Systems mit Hilfe einer Basis

Definition Für $x = \text{FIR}_1(x_1) + \dots + \text{FIR}_n(x_n)$ mit Signalen x_i einer Basis wird das Ausgangssignal gemäß

$$y = S(x) = \text{FIR}_1(y_1) + \dots + \text{FIR}_n(y_n)$$

definiert. Hierbei sind $y_i = S(x_i)$ die Ausgangssignale für Basissignale.

Bedingung: $\text{FIR}_g(y_i) = 0$ für ein Generator-Filter von x_i , falls x_i eine Eigenbewegung ist.

Anwendung

Für den Signalraum

$$\Omega = \text{LTI}(\cos[2\pi f k], 0 \leq f \leq 1/2, \delta(k))$$

kann jede Funktion als Frequenzfunktion definiert werden, die periodisch mit der Periodendauer 1, symmetrisch und an den Frequenzgrenzen $f = 0, 1/2$ reellwertig ist. Ein Zusammenhang zwischen der Frequenzfunktion und der Impulsantwort des LTI-Systems muss nicht bestehen.

Definition eines LTI-Systems mit Hilfe von Signal-Projektoren

direkte Summe

Die **Summe** zweier Signalkäume, $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, ist der Signalraum, welcher alle Überlagerungen

$x = x_1 + x_2$ mit $x_i \in \Omega_i$ enthält.

Eine direkte Summe $\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$ liegt vor, wenn Ω_1 und Ω_2 nur das Nullsignal gemeinsam haben. Dies bedeutet, dass zwischen den Signalen $x_1 \in \Omega_1$ und $x_2 \in \Omega_2$ keine Inter-Abhängigkeit besteht.

Signal-Projektor

Für das Signal $x = x_1 + x_2 \in \Omega_1 \oplus \Omega_2$ sind die beiden Signal-Projektoren durch

$$S_{\text{PR1}}(x) := x_1, S_{\text{PR2}}(x) := x_2$$

definiert. Es liegen LTI-Systeme vor.

Definition

Das Ausgangssignal ist durch

$$y = S(x) = S_1(x_1) + S_2(x_2)$$

definiert, wobei S_i ein beliebiges LTI-System für Eingangssignale aus Ω_i darstellt.

Definition eines LTI-Systems durch Fortsetzung

Definition	<p>Das LTI-System S, welches für Signale des Signalraums Ω definiert ist, soll für ein Signal $x_0 \notin \Omega$ auf den Signalraum $\Omega^+ := \Omega + \mathbf{LTI}(x_0)$ fortgesetzt werden. Ω^+ enthält alle Signale der Form $x_\Omega + \text{FIR}(x_0)$, wobei x_Ω ein Signal aus Ω und FIR ein beliebiges FIR-Filter ist.</p>
Fortsetzung	<p>Die Fortsetzung wird mit S^+ bezeichnet. Sie ist durch das Ausgangssignal $y_0 = S^+(x_0)$ gemäß $S^+(x_\Omega + \text{FIR}(x_0)) = S(x_\Omega) + \text{FIR}(y_0)$ festgelegt.</p>
Fortsetzungsbedingung	<p>Das Signal $y_0 = S^+(x_0)$ muss die folgende Bedingung erfüllen: Für jedes FIR-Filter mit $\text{FIR}(x_0) \in \Omega$ gilt $\text{FIR}(y_0) = S(\text{FIR}(x_0))$.</p> <p>Fall 1: $\text{FIR}(x_0) \in \Omega$ ist nur für das FIR-Filter $\text{FIR} = 0$ erfüllt. Dann ist y_0 beliebig wählbar.</p> <p>Fall 2: Es gibt ein FIR-Filter $\text{FIR} \neq 0$ mit $\text{FIR}(x_0) \in \Omega$. Dann ist die Fortsetzungsbedingung gleichwertig mit $\text{FIRg}(y_0) = S(\text{FIRg}(x_0))$.</p> <p>Hierbei ist FIRg ein Generatorfilter für den Signalraum Ω und das Signal x_0.</p>